STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy

Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

poziom OM

2012 ROK

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Poziom OM
2012 rok

www.omg.edu.pl

WARSZAWA 2014

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Autorzy rozwiązań: Michał Kieza, Szymon Kubicius, Urszula Swianiewicz

Recenzent: dr Joanna Jaszuńska

Skład komputerowy: Łukasz Bożyk, Michał Kieza, Urszula Swianiewicz

Rysunki: Michał Kieza

Projekt okładki: Adam Klemens

ISBN 978-83-63288-02-0

Nakład: 3000 egz.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

www.omg.edu.pl

EGZEMPLARZ BEZPŁATNY

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów odbył się po raz pierwszy w 2011 r. Zakwalifikowano na niego 20 najlepszych laureatów VI edycji OMG (2010/2011) z młodszych klas gimnazjum. Uczestnicy Obozu rywalizowali ze sobą w codziennych zawodach indywidualnych, rozegrali mecz matematyczny (regulamin meczu znajduje się na końcu niniejszej broszury), a także mieli okazję wysłuchać wielu odczytów o tematyce olimpijskiej.

Od 2012 roku Komitet Główny OMG organizuje dwa Obozy Naukowe. Pierwszy z nich (poziom OM) przeznaczony jest dla laureatów OMG z klas trzecich gimnazjum, którzy kończą swoje zmagania z OMG, a rozpoczynają z OM, czyli Olimpiadą Matematyczną na poziomie ponadgimnazjalnym. Drugi Obóz (poziom OMG) przeznaczony jest dla młodszych gimnazjalistów. Każdy z Obozów trwa tydzień, a kwalifikacja przeprowadzana jest na podstawie wyników uzyskanych na finale OMG.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania (wraz z rozwiązaniami) z Obozu na poziomie OM, który odbył się w dniach 3–9 czerwca 2012 roku w miejscowości Perzanowo (woj. mazowieckie), w gospodarstwie agroturystycznym *Relax*. Wzięło w nim udział następujących 20 uczniów wyłonionych na podstawie wyników uzyskanych na finale VII edycji OMG (2011/2012):

Dominika Bakalarz, Damian Czarnecki, Anna Czerwińska, Kosma Grochowski, Daniel Grzegorzewski, Piotr Haryza, Konrad Majewski, Marcin Michorzewski, Jakub Morawski, Adam Nałęcz-Jawecki, Szymon Pajzert, Konrad Paluszek, Piotr Pawlak, Paweł Piwek, Michał Siwiński, Piotr Sochaczewski, Beniamin Stecuła, Oskar Szymański, Ewa Wieczorek oraz Michał Zawalski.

Kadrę obozu stanowili:

Jerzy Bednarczuk, Filip Borowiec, Szymon Kanonowicz, Szymon Kubicius, Jakub Oćwieja, Urszula Swianiewicz oraz Jarosław Wróblewski.

Mamy nadzieję, że publikacja zadań z Obozu wraz z pełnymi rozwiązaniami pozwoli większej liczbie uczniów zapoznać się z nimi i będzie stanowić cenny materiał w przygotowaniach do Olimpiady.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Treści zadań

Zawody indywidualne

1. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, że każda z liczb $ab-1$, $bc-1$ i $ac-1$ jest podzielna przez d. Wykaż, że również liczba $a^2+b^2+c^2-3$ jest podzielna przez d.

2. W pewnej grupie jest $2n$ osób. Wśród nich nie ma takich trzech osób, że każde dwie z nich się znają. Ile maksymalnie może być par osób, które się znają?

3. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Dwusieczna kąta ADC przecina bok AC w punkcie M, a dwusieczna kąta BDC przecina bok BC w punkcie N. Udowodnij, że prosta MN jest równoległa do prostej AB wtedy i tylko wtedy, gdy punkt D jest środkiem odcinka AB.

4. Wyznacz wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (a,b,c,d) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ ab+bc+cd+da=4\,. \end{cases}$$

5. Rozstrzygnij, czy w wyrażeniu

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm 2012^2$$

można tak dobrać znaki $\pm$, aby jego wartość była równa 2012.

6. Dany jest taki niepusty zbiór kół leżących w jednej płaszczyźnie, że ich wnętrza są parami rozłączne. Każde z tych kół jest styczne do dokładnie sześciu innych kół z tego zbioru. Wykaż, że kół jest nieskończenie wiele.

7. Dany jest okrąg ω o średnicy AB. Okrąg o, styczny do okręgu ω, jest styczny do odcinka AB w punkcie E. Cięciwa CD okręgu ω jest prostopadła do AB, styczna do okręgu o i przecina odcinek AE. Wykaż, że $AE=AC$.

8. Wykaż, że istnieje takich 101 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, że „środkowa” liczba nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 100, a każda z pozostałych liczb ma dzielnik pierwszy mniejszy od 100.

9. W grafie o 14 wierzchołkach każde dwa wierzchołki są połączone białą lub czerwoną krawędzią. Wykaż, że można wybrać takie trzy wierzchołki, że każde dwa są połączone białą krawędzią lub takich pięć wierzchołków, że każde dwa są połączone czerwoną krawędzią.

10. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg o przechodzi przez punkty B, C, S. Wykaż, że okrąg o wyznacza na prostych AB i AC równe cięciwy.

11. Różne liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dają co najmniej $k+1$ różnych reszt z dzielenia przez $n+k$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią.

Wykaż, że ze zbioru tych liczb można wybrać niepusty podzbiór o sumie podzielnej przez $n+k$.

12. Dla różnych liczb pierwszych p,q, niech $R(p,q)=\frac{r}{q}$, gdzie r jest odwrotnością liczby p modulo q (czyli najmniejszą taką liczbą całkowitą dodatnią, że liczba $rp-1$ jest podzielna przez q). Niech (p_n) oznacza ciąg kolejnych liczb pierwszych. Wykaż, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych dodatnich k zachodzi nierówność

$$\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} R(p_i,p_j) > \binom{k}{2}\,.$$

13. Czy szachownicę 2012×2012 można pokryć klockami 5×5 i 7×7?

14. Dana jest taka liczba pierwsza $p>3$, że liczby $2p-1$ i $3p-2$ są pierwsze. Niech $n=p(2p-1)(3p-2)$. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba k^n-k jest podzielna przez n.

15. Jaśminka chce powołać komisję, która rozstrzygnie, czy ładniejsze są kotki czy aniołki. Każdy z członków komisji wybierze aniołka z takim samym prawdopodobieństwem $p\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, przy czym decyzje poszczególnych członków komisji są niezależne. Komisja podejmuje decyzję większością głosów, a w przypadku remisu rozstrzygnięcia dokonuje rzucając monetą. Która komisja z większym prawdopodobieństwem wybierze aniołka: 2011-osobowa czy 2012-osobowa?

16. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD i taki punkt E wewnątrz trapezu, że $\sphericalangle AED=\sphericalangle BEC=90^\circ$. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych trapezu. Wykaż, że jeśli $E\neq S$, to prosta ES jest prostopadła do podstaw trapezu.

Mecz matematyczny

17. Dana jest taka liczba całkowita a, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba 2^n+a jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym dodatnim. Wykaż, że a jest równe 0.

18. Wykaż, że dla dowolnej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że liczba 2^n+3^n+n jest podzielna przez p.

19. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o_1. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Okrąg o_2 przechodzi przez punkty A i B oraz przecina prostą CD w punktach E i F. Dowieść, że punkt P oraz środki okręgów opisanych na trójkątach BCE i ADF leżą na jednej prostej.

20. Okrąg o jest wpisany w czworokąt $ABCD$. Proste równoległe do prostej BD są styczne do okręgu o odpowiednio w punktach K i L, przy czym K leży po tej samej stronie prostej BD, co punkt A. Wykaż, że proste AK, CL i BD przecinają się w jednym punkcie.

21. Rozstrzygnij, czy istnieje czworościan, w którym środki okręgów opisanych na ścianach są współliniowe.

22. Dany jest sześcian $8\times 8\times 8$. Czy używając 64 pasków papieru o wymiarach 1×3 można pokryć jego trzy ściany o wspólnym wierzchołku?

23. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wartość wyrażenia

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}$$

można przedstawić w postaci a^2b^3 dla pewnych liczb całkowitych dodatnich a, b.

24. Koko i Spoko grają w następującą grę. Na początku gry na stole znajduje się n monet o nominale 1 EURO każda. Ruch polega na zabraniu ze stołu jednej monety, czterech monet lub liczby monet będącej dzielnikiem pierwszym kwoty na stole. Gracze wykonują ruchy na przemian, zaczyna Koko. Wygrywa ten, kto zabierze ze stołu ostatnią monetę. Rozstrzygnij, w zależności od n, który z graczy ma strategię wygrywającą.

25. Ciąg (a_n) jest określony następująco: $a_0=2$ oraz $a_{n+1}=2a_n^2-1$ dla całkowitych nieujemnych n. Wykaż, że liczba $a_{2102!}$ nie jest podzielna przez $2012!+1$.

26. Wykaż, że dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$2b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\sqrt{2a^4+2c^4}\geqslant 2\sqrt{3}\,.$$

27. Wyznacz największą wartość wyrażenia

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+\ldots+x_{2010}x_{2011}x_{2012}+x_{2011}x_{2012}x_1+x_{2012}x_1x_2\,,$$

gdzie x_1, x_2, $\ldots$, x_{2012} są liczbami rzeczywistymi nieujemnymi spełniającymi warunek $x_1+x_2+\ldots+x_{2012}=2012$.

Rozwiązania zadań

Zawody indywidualne

Zadanie 1. Dane są takie liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, że każda z liczb $ab-1$, $bc-1$ i $ac-1$ jest podzielna przez d. Wykaż, że również liczba $a^2+b^2+c^2-3$ jest podzielna przez d.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$a^2 \equiv a^2(bc)^2 \equiv ab\cdot bc\cdot ca \equiv 1 \pmod{d}.$$

Podobnie dowodzimy, że $b^2 \equiv 1 \pmod{d}$ oraz $c^2 \equiv 1 \pmod{d}$. Teza zadania wynika stąd natychmiast.

Zadanie 2. W pewnej grupie jest $2n$ osób. Wśród nich nie ma takich trzech osób, że każde dwie z nich się znają. Ile maksymalnie może być par osób, które się znają?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez X osobę, która posiada najwięcej znajomych, a ich liczbę przez k. Ponieważ żadni dwaj znajomi X nie mogą się znać, więc każdy z nich ma co najwyżej $2n-k$ znajomych. Z kolei każda z osób, która nie jest znajomym X (takich osób jest $2n-k$) może mieć co najwyżej k znajomych, zgodnie z wyborem X. Wobec tego, skoro w każdej znajomości uczestniczą dwie osoby, to liczba wszystkich znajomości nie przekracza

$$\frac{k\cdot(2n-k)+(2n-k)\cdot k}{2}.$$

Korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, dochodzimy do wniosku, że

$$\frac{k\cdot(2n-k)+(2n-k)\cdot k}{2} = k\cdot(2n-k) \leqslant \left(\frac{k+2n-k}{2}\right)^2 = n^2.$$

Pozostaje skonstruować przykład, dla którego liczba znajomości równa n^2 jest osiągana. Podzielmy $2n$ osób na dwie n-osobowe grupy i niech każda osoba z pierwszej grupy zna wszystkie osoby z drugiej grupy. Wtedy liczba wszystkich par znajomych wynosi $n\cdot n = n^2$ oraz nie ma takich trzech osób, z których każde dwie się znają. Istotnie, wśród dowolnych trzech osób co najmniej dwie należą do tej samej grupy, a znajomości są tylko między osobami z różnych grup.

Zadanie 3. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Dwusieczna kąta ADC przecina bok AC w punkcie M, a dwusieczna kąta BDC przecina bok BC w punkcie N. Udowodnij, że prosta MN jest równoległa do prostej AB wtedy i tylko wtedy, gdy punkt D jest środkiem odcinka AB.

Rozwiązanie

Stosując twierdzenie o dwusiecznej do trójkątów ADC i BDC (rys. 1), otrzymujemy równości

$$\frac{AM}{CM}=\frac{AD}{CD} \quad \text{oraz} \quad \frac{BN}{CN}=\frac{BD}{CD}\,.$$

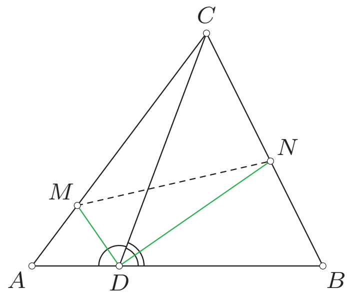
Z twierdzenia Talesa i z twierdzenia odwrotnego do niego wynika, że proste MN i AB są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AM}{CM}=\frac{BN}{CN}.$$

Na mocy wcześniejszych równości jest to równoważne zależności

$$\frac{AD}{CD}=\frac{BD}{CD},$$

czyli $AD=BD$. To jest równoznaczne ze stwierdzeniem, że punkt D jest środkiem odcinka AB.



rys. 1

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie czwórki liczb rzeczywistych (a,b,c,d) spełniające układ równań

$$\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ ab+bc+cd+da=4\,. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Na początku zauważmy, że

$$ab+bc+cd+da=b(a+c)+d(c+a)=(a+c)(b+d)\,.$$

Pierwsze równanie danego układu możemy zaś napisać w postaci

$$(a+c)+(b+d)=4\,.$$

Obserwacje te motywują wprowadzenie oznaczeń $x=a+c$ oraz $y=b+d$. Wyjściowy układ równań jest więc równoważny układowi

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=4\,. \end{cases}$$

Podnosząc pierwsze równanie do kwadratu i odejmując drugie równanie pomnożone przez 4, dostajemy

$$(x+y)^2-4xy=16-16=0\,.$$

Zatem

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=0\,,$$

skąd $x=y$. To w połączeniu z równaniem $x+y=4$ oznacza, że $x=y=2$. Z drugiej strony, para $(2,2)$ oczywiście spełnia zadany układ równań, zatem jest jedynym jego rozwiązaniem.

Wracając do wyjściowych zmiennych, dostajemy układ

$$\begin{cases} a+c=2 \\ b+d=2\,. \end{cases}$$

Wartości a i b możemy przyjąć dowolnie, wówczas $c=2-a$, $d=2-b$. Ostatecznie wszystkimi czwórkami spełniającymi układ równań są czwórki postaci $(a,b,2-a,2-b)$, gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

Zadanie 5. Rozstrzygnij, czy w wyrażeniu

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm \ldots \pm 2012^2$$

można tak dobrać znaki $\pm$, aby jego wartość była równa 2012.

Rozwiązanie

Wstawmy znaki plus przed kwadratami liczb podzielnych przez 4 oraz liczb dających resztę 1 przy dzieleniu przez 4, a minus przed pozostałymi. Dostajemy wówczas sumę 503 wyrażeń postaci

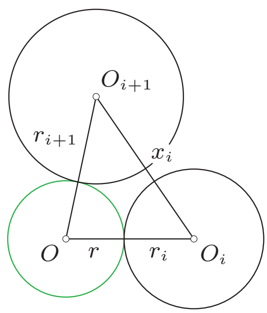
$$(4k+1)^2-(4k+2)^2-(4k+3)^2+(4k+4)^2,$$

a każde takie wyrażenie ma wartość 4. Stąd wartość wyrażenia z zadania wynosi 2012.

Zadanie 6. Dany jest taki niepusty zbiór kół leżących w jednej płaszczyźnie, że ich wnętrza są parami rozłączne. Każde z tych kół jest styczne do dokładnie sześciu innych kół z tego zbioru. Wykaż, że kół jest nieskończenie wiele.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje skończony zbiór kół spełniający warunki zadania. Wybierzmy koło o najmniejszym promieniu. Jeśli takich kół jest więcej niż jedno, wybieramy dowolne koło c o tej własności, że środki wszystkich pozostałych kół o najmniejszym promieniu znajdują się po jednej stronie pewnej prostej przechodzącej przez środek koła c.



rys. 2

Oznaczmy środek wybranego koła przez O, a jego promień przez r. Środki i promienie stycznych do niego kół oznaczmy zaś kolejno, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, przez O_i oraz r_i dla $i=1,2,\ldots,6$. Wówczas dla każdego i mamy $r \leqslant r_i$. Weźmy pod uwagę dowolny z trójkątów OO_iO_{i+1} (rys. 2), gdzie przyjmujemy $O_7 = O_1$. Długości jego boków są równe

$$OO_i = r + r_i, \quad OO_{i+1} = r + r_{i+1}, \quad O_iO_{i+1} = x_i\,,$$

przy czym $x_i \geqslant r_i + r_{i+1}$, bo koła mają rozłączne wnętrza. Bok O_iO_{i+1} jest nie krótszy od każdego z pozostałych, więc miara kąta O_iOO_{i+1} nie jest mniejsza od miary każdego z pozostałych kątów tego trójkąta. Zatem $\sphericalangle O_iOO_{i+1} \geqslant 60^\circ$ dla każdego i, a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt O_iOO_{i+1} jest równoboczny. Z drugiej strony suma kątów O_iOO_{i+1} dla $i = 1, 2, \ldots, 6$ nie przekracza 360°, skąd wniosek, że wszystkie one są równe 60°. Innymi słowy wszystkie trójkąty OO_iO_{i+1} są równoboczne.

Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, 6$ otrzymujemy wówczas

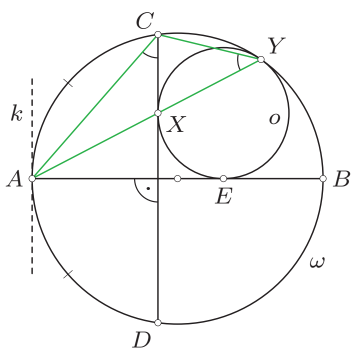
$$r_i + r_{i+1} \geqslant r_i + r = x_i \geqslant r_i + r_{i+1}\,,$$

co prowadzi do wniosku $r = r_{i+1}$ (przyjmujemy $r_7 = r_1$). W takim razie dookoła koła o środku O otrzymujemy 6 kół o promieniach równych r, których środki tworzą sześciokąt foremny. W szczególności nie istnieje prosta przechodząca przez O o tej własności, że wszystkie wierzchołki tego sześciokąta leżą po jednej stronie tej prostej. To przeczy wyborowi koła c, co kończy dowód.

Zadanie 7. Dany jest okrąg ω o średnicy AB. Okrąg o, styczny do okręgu ω, jest styczny do odcinka AB w punkcie E. Cięciwa CD okręgu ω jest prostopadła do AB, styczna do okręgu o i przecina odcinek AE. Wykaż, że $AE = AC$.

Rozwiązanie

Niech X będzie punktem styczności okręgu o z odcinkiem CD, natomiast Y punktem styczności okręgów o i ω (rys. 3). Ponieważ punkty C i D są symetryczne względem odcinka AB, więc łuki AC i AD niezawierające punktu B są równej długości. Stąd wniosek, że punkt A jest środkiem łuku CD niezawierającego punktu B. Zatem prosta k, styczna do okręgu ω w punkcie A, jest równoległa do CD. Jednokładność o środku Y przeprowadzająca okrąg o na ω przeprowadza więc prostą CD na prostą k. Punkt styczności X przechodzi wówczas na punkt styczności A, skąd wniosek, że punkty Y, X, A są współliniowe.



rys. 3

Ponieważ kąty AYC oraz ACD są wpisane w okrąg ω i oparte na łukach równej długości, to mają taką samą miarę. Stąd wniosek, że trójkąty AYC oraz ACX, mające dodatkowo wspólny kąt przy wierzchołku A, są podobne. Zatem

$$\frac{AC}{AY} = \frac{AX}{AC}\,.$$

Stąd i z potęgi punktu A względem okręgu o wynika zależność

$$AC^2 = AX \cdot AY = AE^2\,,$$

która pociąga za sobą tezę zadania.

Zadanie 8. Wykaż, że istnieje takich 101 kolejnych liczb całkowitych dodatnich, że „środkowa” liczba nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 100, a każda z pozostałych liczb ma dzielnik pierwszy mniejszy od 100.

Rozwiązanie

Liczba 97 jest największą liczbą pierwszą mniejszą od 100. Liczby 96! i 97 są względnie pierwsze, zatem z chińskiego twierdzenia o resztach (porównaj rozwiązanie zadania 48 z *Ligi zadaniowej Obozu Naukowego OMG 2012/13*, seria X, kwiecień 2013) istnieje liczba n taka, że $96!\,|\,n+1$ oraz $97\,|\,n+2$.

Liczba n jest względnie pierwsza z $n+1$, więc jest również względnie pierwsza z 96!. Wobec podzielności $97\,|\,n+2$ widzimy, że 97 nie dzieli n. Zatem liczba n nie ma dzielnika pierwszego mniejszego od 100. Dla $i = 1, 2, \ldots, 50$ mamy $i+1\,|\,(n+1)-(i+1)$, gdyż $i+1 \leqslant 96$ oraz $96!\,|\,n+1$. Stąd $n-i$ ma dzielnik większy od 1, a mniejszy od 100; w szczególności ma dzielnik pierwszy mniejszy od 100. Podobnie dla $i = 3, 4, \ldots, 50$ mamy $i-1\,|\,(n+1)+(i-1)$, zatem $n+i$ ma dzielnik pierwszy mniejszy od 100. Ponadto zachodzą podzielności $2\,|\,n+1$, $97\,|\,n+2$.

W takim razie liczby $n-50, n-49, \ldots, n+49, n+50$ spełniają warunki zadania.

Zadanie 9. W grafie o 14 wierzchołkach każde dwa wierzchołki są połączone białą lub czerwoną krawędzią. Wykaż, że można wybrać takie trzy wierzchołki, że każde dwa są połączone białą krawędzią lub takich pięć wierzchołków, że każde dwa są połączone czerwoną krawędzią.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw następujący

Lemat

W grafie o 6 wierzchołkach każde dwa wierzchołki są połączone białą lub czerwoną krawędzią. Wówczas istnieją takie trzy wierzchołki, że każde dwa są połączone białą krawędzią albo takie trzy wierzchołki, że każde dwa są połączone czerwoną krawędzią.

Dowód lematu

Ustalmy dowolny wierzchołek. W myśl zasady szufladkowej Dirichleta, do pewnych trzech innych wierzchołków wychodzą z niego krawędzie jednakowego koloru — powiedzmy białego. Jeśli pewne dwa z tych trzech wierzchołków są połączone białą krawędzią, to wraz wybranym na początku wierzchołkiem tworzą trójkę połączoną białymi krawędziami. W przeciwnym razie wszystkie trzy wierzchołki są połączone czerwonymi krawędziami. To kończy dowód lematu.

Przechodzimy do dowodzenia tezy zadania. Przypuśćmy, że nie można wybrać wierzchołków w sposób podany w treści. Zauważmy najpierw, że jeśli jeden z wierzchołków jest połączony krawędziami białymi z każdym spośród wierzchołków pewnej grupy, to w obrębie tej grupy wszystkie wierzchołki muszą być połączone krawędziami czerwonymi. Istotnie — w przeciwnym razie znajdą się wśród nich takie dwa, które wraz z pierwszym wierzchołkiem utworzą trójkę połączoną białymi krawędziami.

Wybierzmy dowolny wierzchołek w. Gdyby był on połączony białymi krawędziami z co najmniej pięcioma innymi, to zgodnie z uwagą poczynioną w poprzednim akapicie stworzyłyby one piątkę połączoną czerwonymi krawędziami — sprzeczność. Zatem wierzchołek ten musi być połączony czerwonymi krawędziami z co najmniej dziewięcioma innymi.

Analogicznie w zbiorze tych dziewięciu wierzchołków każdy połączony jest czerwoną krawędzią z co najmniej pięcioma innymi. Istotnie, gdyby któryś z tych dziewięciu wierzchołków był połączony białą krawędzią z co najmniej czterema innymi, to te cztery wierzchołki wraz z w tworzyłyby piątkę wierzchołków połączonych czerwonymi krawędziami, a założyliśmy, że taka piątka nie istnieje.

Gdyby każdy z omawianych dziewięciu wierzchołków był połączony czerwoną krawędzią z dokładnie pięcioma innymi, to liczba czerwonych krawędzi je łączących wyniosłaby $\frac{9\cdot 5}{2}$ — sprzeczność, bo nie jest to liczba całkowita. Zatem istnieje taki wierzchołek v wśród tych dziewięciu, który jest połączony czerwonymi krawędziami z co najmniej sześcioma innymi.

Zgodnie z przyjętym przypuszczeniem w zbiorze tych sześciu wierzchołków nie ma trójki wierzchołków połączonych białymi krawędziami. W takim razie na mocy lematu muszą istnieć trzy wierzchołki połączone czerwonymi krawędziami. Jednakże wraz z wierzchołkami v i w tworzą one piątkę połączoną czerwonymi krawędziami. Uzyskana sprzeczność dowodzi fałszywości uczynionego przypuszczenia, a to kończy rozwiązanie.

Zadanie 10. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg o przechodzi przez punkty B, C, S. Wykaż, że okrąg o wyznacza na prostych AB i AC równe cięciwy.

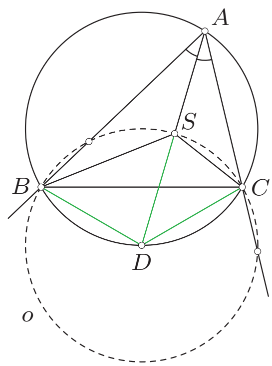
Rozwiązanie

Niech prosta AS przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D różnym od A (rys. 4). Ponieważ AS jest dwusieczną kąta BAC, więc punkt D jest środkiem łuku BC niezawierającego punktu A, skąd wniosek, że $BD=CD$.

Ponadto

$$\sphericalangle DBS = \sphericalangle DBC + \sphericalangle CBS = \sphericalangle DAC + \sphericalangle CBS = \\ = \sphericalangle BAS + \sphericalangle ABS = \sphericalangle BSD,$$

a więc także $BD = SD$. W takim razie punkt D jest środkiem okręgu o.



rys. 4

Okrąg ten jest więc symetryczny względem prostej AS. Ponadto prosta AC jest symetryczna do prostej AB względem dwusiecznej kąta BAC, czyli prostej AS.

Wobec tego cięciwy, o których mowa w zadaniu, również są symetryczne względem prostej AS, a więc mają taką samą długość.

Zadanie 11. Różne liczby całkowite dodatnie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dają co najmniej $k+1$ różnych reszt z dzielenia przez $n+k$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią. Wykaż, że ze zbioru tych liczb można wybrać niepusty podzbiór o sumie podzielnej przez $n+k$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że teza zadania jest fałszywa. To oznacza, że żadna z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nie daje reszty 0 przy dzieleniu przez $n+k$. Istotnie, gdyby $n+k \mid a_i$ dla pewnego $1 \leqslant i \leqslant n$, to otrzymalibyśmy podzbiór $\{a_i\}$ o sumie podzielnej przez $n+k$. Przyjmijmy bez straty ogólności, że liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ dają parami różne (i niezerowe) reszty z dzielenia przez $n+k$. Wprowadźmy ponadto następujące oznaczenia:

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{oraz} \quad P = \sum_{i=k+2}^{n} a_i\,.$$

Rozważmy następujące zbiory:

$$A = \{a_1 + P, a_2 + P, \ldots, a_{k+1} + P\}\,,$$
$$B = \{S, S - a_1, S - a_2, \ldots, S - a_{k+1}\}\,,$$
$$C = \{a_{k+2}, a_{k+2} + a_{k+3}, \ldots, a_{k+2} + a_{k+3} + \ldots + a_n\}.$$

Zauważmy, że w każdym z nich wszystkie elementy dają parami różne reszty z dzielenia przez $n+k$. Istotnie — dla zbiorów A i B wynika to natychmiast z przyjętego założenia o liczbach $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. Dla zbioru C zaś widzimy, że różnica dowolnych dwóch jego elementów jest sumą pewnego podzbioru rozważanych w zadaniu liczb — zgodnie z naszym założeniem nie może więc być podzielna przez $n+k$.

Reszty z dzielenia przez $n+k$ elementów zbioru C są inne niż reszty z dzielenia przez $n+k$ elementów zbiorów A i B. Istotnie — w przeciwnym razie różnica pewnego elementu należącego do któregoś ze zbiorów A lub B i pewnego elementu ze zbioru C dzieliłaby się przez $n+k$. Z drugiej strony taka różnica daje się przedstawić jako suma pewnego podzbioru rozważanych w zadaniu liczb, co prowadzi do sprzeczności. W szczególności jeśli r oznacza liczbę różnych reszt z dzielenia przez $n+k$ elementów zbioru $A\cup B$, to liczba różnych reszt z dzielenia przez $n+k$ elementów zbioru $A\cup B\cup C$ jest równa

$$r+(n-k-1).$$

Wykażemy teraz, że istnieją co najwyżej dwie liczby a_i, mające następującą własność:

liczba a_i+P należąca do zbioru A daje taką samą resztę z dzielenia przez $n+k$, jak pewna liczba ze zbioru B. $(*)$

Jeżeli $k=1$, to w zbiorze A są dokładnie dwie liczby, więc jest to prawda. Przypuśćmy więc, że $k\geqslant 2$. Zauważmy najpierw, że nie może mieć miejsca żadna z kongruencji

$$a_i+P\equiv S \pmod{n+k} \qquad \text{ani} \qquad a_i+P\equiv S-a_j \pmod{n+k}$$

dla $1\leqslant i,j\leqslant k+1$, $i\neq j$. Istotnie, w przeciwnym razie zachodziłaby któraś z zależności

$$0\equiv S-P-a_i=\sum_{t=1}^{k+1}a_t-a_i \pmod{n+k}$$

lub

$$0\equiv S-P-a_i-a_j=\sum_{t=1}^{k+1}a_t-a_i-a_j \pmod{n+k},$$

przy czym $k+1\geqslant 3$. W obu przypadkach oznacza to, że suma pewnego podzbioru danych liczb dzieli się przez $n+k$, co stoi w sprzeczności z naszym założeniem.

W takim razie jeśli pewna liczba a_i ma własność $(*)$, to musi być spełniona zależność

$$a_i+P\equiv S-a_i \pmod{n+k}, \quad \text{czyli} \quad 2a_i\equiv S-P \pmod{n+k}.$$

Jeśli teraz dla pewnego $j\neq i$ liczba a_j również ma własność $(*)$, to

$$2a_i\equiv S-P\equiv 2a_j \pmod{n+k}, \quad \text{więc} \quad n+k\mid 2(a_i-a_j).$$

Gdy $n+k$ jest nieparzyste, powyższa podzielność jest niemożliwa wobec przyjętego założenia o liczbach $a_1,a_2,\ldots,a_{k+1}$. W takim razie w tym przypadku istnieje co najwyżej jedna liczba a_i mająca rozważaną własność $(*)$. Jeśli natomiast $n+k$ jest parzyste, to mamy

$$\frac{n+k}{2}\,\Big|\,a_i-a_j\,,\quad \text{czyli}\quad a_i\equiv a_j \pmod{n+k}\quad \text{lub}\quad a_i\equiv a_j+\frac{n+k}{2} \pmod{n+k}.$$

Skoro $n+k$ nie dzieli a_i-a_j, to ma miejsce druga z powyższych kongruencji. To oznacza, że liczba a_j jest równa reszcie z dzielenia liczby $a_i-\frac{n+k}{2}$ przez $n+k$, a zatem jest jednoznacznie wyznaczona przez a_i. Innymi słowy, jeżeli $n+k$ jest liczbą parzystą, to istnieją co najwyżej dwie liczby mające własność $(*)$: są to a_i oraz a_j. To zaś kończy dowód stwierdzenia, że w zbiorze A istnieją co najwyżej dwie liczby, które dają takie reszty z dzielenia przez $n+k$, jak pewne liczby ze zbioru B.

W takim razie liczba r różnych reszt z dzielenia przez $n+k$ elementów ze zbioru $A\cup B$ jest równa co najmniej

$$(k+1)+(k+2)-2=2k+1\,.$$

Wcześniej udowodniliśmy, że liczba różnych reszt z dzielenia przez $n+k$ elementów zbioru $A\cup B\cup C$ to $r+(n-k-1)$, więc wobec powyższej nierówności $r\geqslant 2k+1$, mamy

$$r+(n-k-1)\geqslant 2k+1+n-k-1=n+k.$$

To dowodzi, że w zbiorze $A\cup B\cup C$ są wszystkie reszty z dzielenia przez $n+k$, w szczególności 0. Innymi słowy, suma pewnego niepustego podzbioru rozważanych w zadaniu liczb dzieli się przez $n+k$, wbrew uczynionemu na początku przypuszczeniu. To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 12. Dla różnych liczb pierwszych p,q, niech $R(p,q)=\frac{r}{q}$, gdzie r jest odwrotnością liczby p modulo q (czyli najmniejszą taką liczbą całkowitą dodatnią, że liczba $rp-1$ jest podzielna przez q). Niech (p_n) oznacza ciąg kolejnych liczb pierwszych. Wykaż, że dla nieskończenie wielu liczb całkowitych dodatnich k zachodzi nierówność

$$\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} R(p_i,\,p_j)>\binom{k}{2}\,.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} R(p_i,p_j)=\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant k\\ i\neq j}} \big(R(p_i,p_j)+R(p_j,p_i)\big)\,,$$

przy czym suma po prawej stronie ma $\binom{k}{2}$ składników. Wykażemy, że

$$R(p,q)+R(q,p)>1$$

dla dowolnych liczb pierwszych p i q, co da nam nierówność z tezy dla wszystkich $k\geqslant 2$.

Niech a i b będą najmniejszymi liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $ap-1$ jest podzielne przez q, a $bq-1$ przez p. Wtedy

$$R(p,q)+R(q,p)=\frac{a}{q}+\frac{b}{p}=\frac{ap+bq}{pq}=\frac{(ap+bq-1)+1}{pq}=\frac{ap+bq-1}{pq}+\frac{1}{pq}$$

i wystarczy udowodnić, że $ap+bq-1 \geqslant pq$.

Liczby ap oraz $bq-1$ dzielą sie przez p, więc ich suma również. Analogicznie dowodzimy, że $q \mid ap+bq-1$. W takim razie liczba dodatnia $ap+bq-1$ jest podzielna przez liczbę pq, a więc musi być od niej większa lub równa. To kończy dowód.

Uwaga

Udowodnimy, że istnieje opisana w treści zadania odwrotność liczby p modulo q, gdzie p, q są różnymi liczbami pierwszymi.

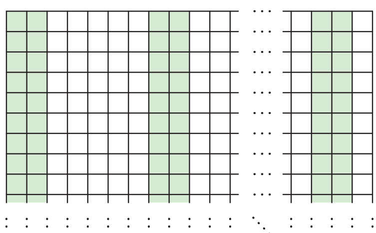
Przypuśćmy, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita r o tej własności, że liczba $rp-1$ dzieli się przez q. Wówczas żadna z q liczb $p, 2p, 3p, \ldots, qp$ nie daje reszty 1 przy dzieleniu przez q, a zatem pewne dwie z tych liczb dają tę samą resztę przy tym dzieleniu, czyli $kp \equiv \ell p \pmod{q}$ dla pewnych $1 \leqslant k < \ell \leqslant q$. Jednak wówczas liczba $(\ell - k)p$ jest podzielna przez q, co nie może mieć miejsca, gdyż p i q są różnymi liczbami pierwszymi oraz $\ell - k < q$. Uzyskana sprzeczność oznacza, że liczba $rp-1$ jest podzielna przez q dla pewnej liczby całkowitej dodatniej r, w szczególności istnieje najmniejsza liczba r o tej własności.

Zadanie 13. Czy szachownicę 2012×2012 można pokryć klockami 5×5 i 7×7?

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie można.

Ponumerujmy kolumny danej szachownicy kolejnymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Pokolorujmy wszystkie pola w kolumnach o numerach dających resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 7, zaś pozostałe pola szachownicy pozostawmy białe (rys. 5).



rys. 5

Zauważmy, że każdy klocek o wymiarach 7×7 pokrywa dokładnie 35 białych pól. Klocek 5×5 pokrywa zaś liczbę białych pól będącą wielokrotnością 5. Gdyby więc istniało żądane pokrycie, to liczba wszystkich białych pól szachownicy musiałaby być podzielna przez 5.

Z drugiej strony mamy $2012 = 7 \cdot 287 + 3$, skąd wniosek, że na szachownicy znajduje się $5 \cdot 287 + 1$ kolumn zawierających białe pola. Zatem liczba takich pól jest równa $2012 \cdot (5 \cdot 287 + 1)$ i nie dzieli się przez 5. To wraz z ostatnim zdaniem poprzedniego akapitu dowodzi, że żądane pokrycie nie jest możliwe.

Zadanie 14. Dana jest taka liczba pierwsza $p > 3$, że liczby $2p-1$ i $3p-2$ są pierwsze. Niech $n = p(2p-1)(3p-2)$. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k liczba $k^n - k$ jest podzielna przez n.

Rozwiązanie

Skoro liczba pierwsza p jest większa od 3, to daje resztę 1 lub 5 z dzielenia przez 6. Jednakże w drugim przypadku liczba $2p-1>3$ jest podzielna przez 3, więc nie może być liczbą pierwszą. W takim razie $p=6\ell+1$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej ℓ.

Wówczas otrzymujemy

$$\begin{aligned} n-1 &= p(2p-1)(3p-2)-1=(6\ell+1)(12\ell+1)(18\ell+1)-1= \\ &= 6\cdot 12\cdot 18\ell^3+(6\cdot 12+12\cdot 18+6\cdot 18)\ell^2+(6+12+18)\ell= \\ &= 6^2\ell\cdot(36\ell^2+11\ell+1)=6(p-1)\cdot(36\ell^2+11\ell+1)\,, \end{aligned}$$

skąd wniosek, że liczba $n-1$ dzieli się przez liczbę $6(p-1)$. W takim razie jest wielokrotnością każdej z liczb $p-1$, $2p-2$ oraz $3p-3$.

Jeśli liczba k dzieli się przez p, to liczba k^n-k także jest podzielna przez p. Jeśli zaś liczba k nie dzieli się przez p, to z małego twierdzenia Fermata dostajemy

$$k^{p-1}\equiv 1 \pmod p\,,$$

co wobec ostatniego zdania poprzedniego akapitu pociąga za sobą

$$k^{n-1}\equiv 1 \pmod p\,.$$

Zatem w szczególności p dzieli liczbę k^n-k.

W analogiczny sposób dowodzimy, że liczba k^n-k dzieli się także przez liczby pierwsze $2p-1$ i $3p-2$. Łącząc otrzymane rezultaty, dochodzimy do wniosku, że k^n-k dzieli się przez $p(2p-1)(3p-2)=n$.

Zadanie 15. Jaśminka chce powołać komisję, która rozstrzygnie, czy ładniejsze są kotki czy aniołki. Każdy z członków komisji wybierze aniołka z takim samym prawdopodobieństwem $p\in(\frac{1}{2},1)$, przy czym decyzje poszczególnych członków komisji są niezależne. Komisja podejmuje decyzję większością głosów, a w przypadku remisu rozstrzygnięcia dokonuje rzucając monetą. Która komisja z większym prawdopodobieństwem wybierze aniołka: 2011-osobowa czy 2012-osobowa?

Rozwiązanie

Odpowiedź: Obie komisje wybiorą aniołka z takim samym prawdopodobieństwem.

Najpierw obliczymy prawdopodobieństwo wyboru aniołka przez komisję 2011-osobową. Wobec nieparzystej liczby członków, w tym przypadku nie dojdzie do rzutu monetą. Niech A_i oznacza zdarzenie, że komisja 2011-osobowa wybrała aniołka oraz dokładnie i spośród jej członków wybrało kotka. Zdarzenie A_i nie zajdzie dla $i\geqslant 1006$, a jego prawdopodobieństwo dla $i\leqslant 1005$ wynosi

$$\binom{2011}{i}p^{2011-i}(1-p)^i\,,$$

gdyż spośród 2011 członków komisji musimy wybrać i, z których każdy wybierze kotka z prawdopodobieństwem $1-p$, pozostali zaś wybiorą aniołka z prawdopodobieństwem p. Ponieważ wybór aniołka przez komisję 2011-osobową jest sumą zdarzeń A_i dla $i=0,1,2,\ldots,1005$, to jego prawdopodobieństwo jest równe

$$\sum_{i=0}^{1005}\binom{2011}{i}p^{2011-i}(1-p)^i\,. \tag{$*$}$$

Teraz zajmiemy się prawdopodobieństwem wyboru aniołka przez komisję 2012-osobową. Niech B_i oznacza zdarzenie, że komisja 2012-osobowa wybrała aniołka oraz dokładnie i spośród jej członków wybrało kotka. Podobnie jak w poprzednim akapicie, stwierdzamy, że zdarzenie B_i nie zajdzie dla $i\geqslant 1007$, zaś jego prawdopodobieństwo dla $i\leqslant 1005$ wynosi

$$\binom{2012}{i}p^{2012-i}(1-p)^i\,.$$

Ponadto zdarzenie B_{1006} zajdzie, gdy po remisowym głosowaniu aniołki zostaną wybrane przy pomocy rzutu monetą. Jego prawdopodobieństwo wynosi więc

$$\binom{2012}{1006}p^{1006}(1-p)^{1006}\cdot\frac{1}{2}\,.$$

Skoro drugie z rozważanych w treści zadania zdarzeń jest sumą zdarzeń B_i dla $i=0,1,2,\ldots,1006$, to jego prawdopodobieństwo jest równe

$$\left(\sum_{i=0}^{1005}\binom{2012}{i}p^{2012-i}(1-p)^i\right)+\binom{2012}{1006}p^{1006}(1-p)^{1006}\cdot\frac{1}{2}\,.$$

Przekształcając powyższe wyrażenie, otrzymujemy kolejno:

$$\left(\sum_{i=0}^{1005}\binom{2012}{i}p^{2012-i}(1-p)^i\right)+\binom{2012}{1006}p^{1006}(1-p)^{1006}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=p^{2012}+\left(\sum_{i=1}^{1005}\left(\binom{2011}{i}+\binom{2011}{i-1}\right)p^{2012-i}(1-p)^i\right)+$$

$$+\left(\binom{2011}{1006}+\binom{2011}{1005}\right)p^{1006}(1-p)^{1006}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=p\cdot\sum_{i=0}^{1005}\binom{2011}{i}p^{2011-i}(1-p)^i+$$

$$+\sum_{i=1}^{1005}\binom{2011}{i-1}p^{2012-i}(1-p)^i+2\cdot\binom{2011}{1005}p^{1006}(1-p)^{1006}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=p\cdot\sum_{i=0}^{1005}\binom{2011}{i}p^{2011-i}(1-p)^i+(1-p)\cdot\sum_{i=0}^{1005}\binom{2011}{i}p^{2011-i}(1-p)^i=$$

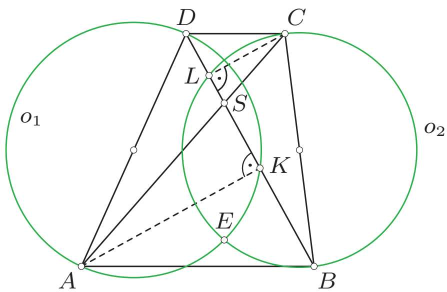
$$=\sum_{i=0}^{1005}\binom{2011}{i}p^{2011-i}(1-p)^i\,.$$

Ostatnia suma jest równa wyrażeniu $(*)$, co oznacza, że oba rozważane prawdopodobieństwa są równe.

Zadanie 16. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD i taki punkt E wewnątrz trapezu, że $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC = 90°$. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych trapezu. Wykaż, że jeśli $E \neq S$, to prosta ES jest prostopadła do podstaw trapezu.

Rozwiązanie

Niech o_1, o_2 będą okręgami odpowiednio o średnicach AD i BC. Jeżeli $AC \perp BD$, to $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC = 90°$, więc punkt S należy do obydwu okręgów o_1 i o_2. Wobec tego prosta ES jest osią potęgową okręgów o_1 i o_2, a zatem jest prostopadła do prostej łączącej środki tych okręgów. Z kolei prosta łącząca środki okręgów o_1, o_2, czyli środki ramion trapezu $ABCD$, jest równoległa do podstaw tego trapezu. W tym przypadku teza zadania jest więc spełniona.



rys. 6

Przypuśćmy teraz, że proste AC i BD nie są prostopadłe. Niech K, L będą rzutami prostokątnymi na prostą BD odpowiednio punktów A, C (rys. 6). Wówczas $S \neq K$ oraz $S \neq L$. Punkt K leży na okręgu o_1, zaś L leży na okręgu o_2. Ponadto proste AK i CL są równoległe, co na mocy twierdzenia Talesa daje

$$\frac{SK}{SL} = \frac{SA}{SC}\,.$$

Korzystając ponownie z twierdzenia Talesa, tym razem dla równoległych podstaw AB i CD danego trapezu wnosimy, że

$$\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}\,.$$

Z powyższych proporcji otrzymujemy

$$\frac{SK}{SL} = \frac{SB}{SD}$$

albo $SK \cdot SD = SL \cdot SB$.

Ostatnia równość oznacza, że punkt S leży na osi potęgowej okręgów o_1 i o_2. Równości $\sphericalangle AED = \sphericalangle BEC = 90°$ oznaczają, że punkt E leży zarówno na okręgu o średnicy AD, jak i na okręgu o średnicy BC. Punkt E jest więc punktem wspólnym okręgów o_1 i o_2, a zatem on również należy do osi potęgowej tych okręgów. Jednakże oś potęgowa jest prostopadła do prostej łączącej środki odcinków AD i BC, a więc także do podstaw AB i CD, a to właśnie chcieliśmy udowodnić.

Mecz matematyczny

Zadanie 17. Dana jest taka liczba całkowita a, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba 2^n+a jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym dodatnim. Wykaż, że a jest równe 0.

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że $2+a \geqslant 2$, skąd $a \geqslant 0$. Przypuśćmy, że istnieje liczba całkowita $a>0$, która spełnia warunki zadania.

Jeśli liczba a jest parzysta, to można ją przedstawić w postaci $a=2^\ell \cdot s$, gdzie ℓ, s są takimi liczbami całkowitymi, że $\ell \geqslant 1$ oraz s jest nieparzyste. Wówczas liczba

$$2^{\ell+1}+a=2^{\ell+1}+2^\ell \cdot s$$

jest podzielna przez 2^ℓ i niepodzielna przez $2^{\ell+1}$ — nie może być zatem potęgą liczby pierwszej.

W takim razie liczba a jest nieparzysta i w związku z tym $2+a$ jest potęgą nieparzystej liczby pierwszej p o wykładniku całkowitym dodatnim. Korzystając z małego twierdzenia Fermata, otrzymujemy

$$2^p+a \equiv 2+a \equiv 0 \pmod p, \qquad 2^{2p-1}+a=2\cdot(2^{p-1})^2+a \equiv 2+a \equiv 0 \pmod p\,,$$

skąd wniosek, że liczby $x=2^p+a$ oraz $y=2^{2p-1}+a$ są podzielne przez p. Ale w myśl warunków zadania liczby te są potęgami liczb pierwszych, więc są one potęgami liczby p o wykładnikach całkowitych dodatnich. To wraz z nierównością $x<y$ dowodzi, że liczba x jest dzielnikiem liczby y. W takim razie liczba nieparzysta $x=2^p+a$ jest dzielnikiem liczby

$$y-x=2^{2p-1}-2^p=2^p(2^{p-1}-1)\,.$$

Zatem $2^p+a \mid 2^{p-1}-1$, co jest niemożliwe, bowiem $0<2^{p-1}-1<2^p+a$.

Uzyskana sprzeczność dowodzi fałszywości uczynionego przypuszczenia, skąd wnosimy, że jedyną możliwością jest $a=0$. W tym przypadku $2^n+a=2^n$ istotnie jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym dla każdej liczby całkowitej dodatniej n.

Zadanie 18. Wykaż, że dla dowolnej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że liczba 2^n+3^n+n jest podzielna przez p.

Rozwiązanie

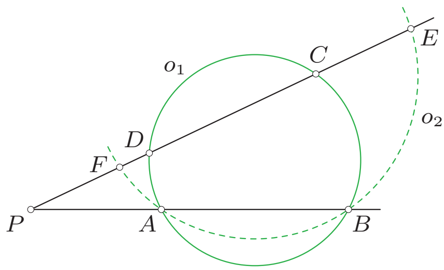
Dla $p=2$ i $p=3$ wystarczy dobrać $n=1$. Załóżmy więc, że $p>3$ i rozważmy $n=2(p-1)$. Korzystając z małego twierdzenia Fermata, otrzymujemy

$$2^n+3^n+n=(2^{p-1})^2+(3^{p-1})^2+2p-2 \equiv 1^2+1^2+0-2=0 \pmod p\,.$$

Zadanie 19. Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o_1. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Okrąg o_2 przechodzi przez punkty A i B oraz przecina prostą CD w punktach E i F. Dowieść, że punkt P oraz środki okręgów opisanych na trójkątach BCE i ADF leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Bez straty ogólności możemy założyć, że punkt F znajduje się bliżej punktu P niż punkt E (rys. 7).



rys. 7

Zastosujmy inwersję względem okręgu o środku w punkcie P oraz promieniu $\sqrt{PA\cdot PB}$. Rozpatrując potęgi punktu P względem okręgów o_1 i o_2, otrzymujemy

$$PC\cdot PD = PA\cdot PB = PE\cdot PF\,,$$

co oznacza, że obrazami punktów B, C, E w tej inwersji są odpowiednio punkty A, D, F. W takim razie obrazem okręgu opisanego na trójkącie BCE jest okrąg opisany na trójkącie ADF. To zaś prowadzi do wniosku, że prosta przechodząca przez środki tych okręgów zawiera także środek inwersji, czyli punkt P.

Zadanie 20. Okrąg o jest wpisany w czworokąt $ABCD$. Proste równoległe do prostej BD są styczne do okręgu o odpowiednio w punktach K i L, przy czym K leży po tej samej stronie prostej BD, co punkt A. Wykaż, że proste AK, CL i BD przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostej AK z prostą BD i rozważmy jednokładność o środku A przekształcającą punkt K na X (rys. 8). Proste AB i AD przechodzą na siebie, natomiast styczna do okręgu o w punkcie K przechodzi na prostą BD. Obraz o' okręgu o w tej jednokładności jest więc styczny do prostej BD w punkcie X oraz styczny do prostych AB i AD odpowiednio w pewnych punktach Y i Z, leżących poza odcinkami AB i AD.

Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy równości

$$BX = BY, \quad DX = DZ, \quad AY = AZ\,.$$

Wobec tego

$$AB+AD+BD = AB+AD+BX+DX = AB+AD+BY+DZ = AY+AZ\,,$$

co w połączeniu z wcześniej otrzymaną równością $AY = AZ$ prowadzi do zależności

$$AY = \frac{1}{2}(AB+AD+BD)\,.$$

W takim razie dostajemy

$$BX = BY = AY - AB = \frac{1}{2}(AB+AD+BD) - AB = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}(AD-AB)\,.$$

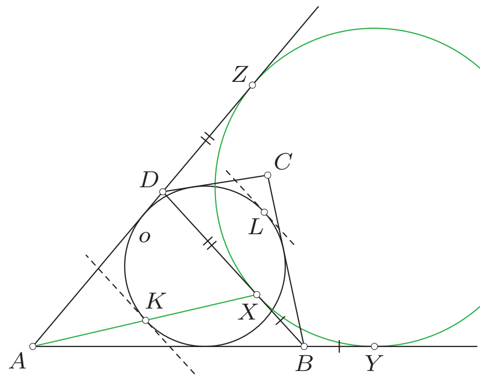
Oznaczając przez X' punkt przecięcia prostych CL i BD oraz przeprowadzając analogiczne rozumowanie, otrzymujemy

$$BX' = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}(CD - BC)\,.$$

Jednakże skoro w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, to

$$AB + CD = BC + AD, \quad \text{czyli} \quad CD - BC = AD - AB\,.$$

To zaś oznacza, że $BX = BX'$, czyli $X = X'$, skąd dostajemy tezę.



rys. 8

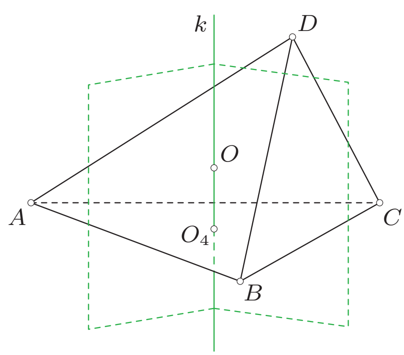
Zadanie 21. Rozstrzygnij, czy istnieje czworościan, w którym środki okręgów opisanych na ścianach są współliniowe.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że taki czworościan nie istnieje.

Przypuśćmy, że istnieje czworościan, w którym rozważane środki leżą na pewnej prostej k.

Niech O_1, O_2, O_3, O_4 będą środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach BCD, ACD, ABD, ABC. Załóżmy bez straty dla ogólności, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest największy. Wówczas punkt O_4 nie leży ani na prostej AB, ani na BC. W takim razie jest rozłączny z płaszczyznami ABD i BCD, a więc nie pokrywa się z żadnym z punktów O_3 i O_1.



rys. 9

Punkty O_1 i O_4 leżą na płaszczyźnie symetralnej odcinka BC, więc leży na niej również prosta k zawierająca oba te punkty. Analogicznie dowodzimy, że prosta k należy do płaszczyzny symetralnej odcinka AB. W takim razie musi pokrywać się z prostą będącą częścią wspólną obu płaszczyzn, czyli prostą prostopadłą do płaszczyzny ABC i przechodzącą przez punkt O_4. Stąd wniosek, że środek O sfery opisanej na czworościanie $ABCD$ należy do prostej k.

Punkt O może pokrywać się co najwyżej z dwoma punktami spośród O_1, O_2, O_3, O_4. Rzeczywiście, gdyby punkt O pokrywał się z pewnymi trzema z tych punktów, to musiałby należeć jednocześnie do płaszczyzn zawierających pewne trzy ściany czworościanu $ABCD$, a tym samym być jednym z jego wierzchołków. Ale wierzchołek czworościanu leży na sferze opisanej na tym czworościanie, nie może być więc jej środkiem.

W szczególności możemy stwierdzić, że punkt O jest różny od co najmniej jednego z punktów O_1, O_3, O_4 np. $O \neq O_1$. Ponieważ punkt O_1 jest rzutem prostokątnym punktu O na płaszczyznę BCD, to prosta k zawierająca oba te punkty jest do tej płaszczyzny prostopadła. W takim razie płaszczyzny ABC i BCD muszą być równoległe, gdyż obie są prostopadłe do prostej k. To jest jednak niemożliwe i dowodzi fałszywości uczynionego przypuszczenia.

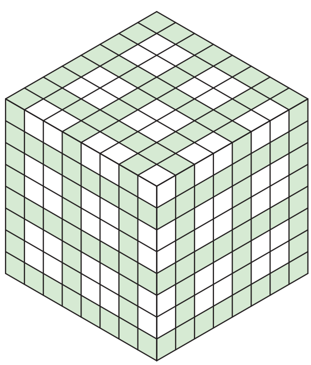
Uwaga

Można wskazać czworościan, w którym środki okręgów opisanych na ścianach leżą na jednej *płaszczyźnie*. Rozpatrzmy mianowicie taki czworościan $ABCD$, że $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 90°$. Wtedy środki okręgów opisanych na ścianach tego czworościanu leżą w płaszczyźnie trójkąta ABC.

Zadanie 22. Dany jest sześcian $8 \times 8 \times 8$. Czy używając 64 pasków papieru o wymiarach 1×3 można pokryć jego trzy ściany o wspólnym wierzchołku?

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie można.



rys. 10

Podzielmy każdą z trzech ścian sześcianu o wspólnym wierzchołku na 64 kwadratowe pola. Łatwo przekonać się, że jeżeli chcemy pokryć całą powierzchnię ścian, każdy z pasków musi przykrywać dokładnie 3 pola.

Pokolorujmy ściany sześcianu tak jak na rysunku 10.

Wówczas liczba pól, które nie zostały zamalowane, jest nieparzysta. Z drugiej strony każdy pasek przykrywa albo zero albo dwa białe pola. Stąd wniosek, że żądane w treści zadania pokrycie nie jest możliwe.

Zadanie 23. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wartość wyrażenia

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}\binom{n}{k}\binom{2n-k}{n}$$

można przedstawić w postaci a^2b^3 dla pewnych liczb całkowitych dodatnich a, b.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}\binom{n}{n-k}\binom{2n-k}{n} = \binom{2n}{n}^2,$$

co wobec wzoru

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

dowiedzie tezy zadania.

Rozważmy grupę złożoną z $2n$ dzieci. Chcemy pewnym n dzieciom dać jabłko oraz pewnym n — gruszkę, przy czym część dzieci otrzyma oba te owoce. Zbadajmy, na ile sposobów można to uczynić.

Aby otrzymać lewą stronę dowodzonej równości, ustalmy liczbę k, przy czym $0 \leqslant k \leqslant n$, i wybierzmy z danej grupy k dzieci, którym damy tylko jabłko. Możemy to uczynić na $\binom{2n}{k}$ sposobów. Następnie z pozostałych $2n-k$ dzieci wybierzmy n i dajmy każdemu z nich gruszkę — możemy to uczynić na $\binom{2n-k}{n}$ sposobów. W końcu, spośród n dzieci, które dostały już gruszkę, wybierzmy $n-k$ i dajmy im jeszcze jabłko. To można uczynić na $\binom{n}{n-k}$ sposobów. Sumując takie wybory po $0 \leqslant k \leqslant n$, dostajemy liczbę

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}\binom{2n-k}{n}\binom{n}{n-k}.$$

Z drugiej strony możemy najpierw wybrać spośród wszystkich dzieci n, którym damy jabłko (na $\binom{2n}{n}$ sposobów); a następnie znów z wszystkich dzieci wybrać n, którym damy gruszkę (znowu na $\binom{2n}{n}$ sposobów). Liczba wszystkich takich wyborów jest więc równa prawej stronie dowodzonej równości, czyli

$$\binom{2n}{n}^2.$$

Zadanie 24. Koko i Spoko grają w następującą grę. Na początku gry na stole znajduje się n monet o nominale 1 EURO każda. Ruch polega na zabraniu ze stołu jednej monety, czterech monet lub liczby monet będącej dzielnikiem pierwszym kwoty na stole. Gracze wykonują ruchy na przemian, zaczyna Koko. Wygrywa ten, kto zabierze ze stołu ostatnią monetę. Rozstrzygnij, w zależności od n, który z graczy ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie

Strategią wygrywającą jest pozostawianie na stole liczby monet podzielnej przez 6. Ponieważ zero jest liczbą podzielną przez 6, a z każdym ruchem zmniejsza się liczba monet na stole, więc gracz, który w trakcie gry będzie stosował taką strategię, wygra.

Jeżeli liczba monet na stole jest podzielna przez 6, to gracz wykonujący w tym momencie ruch nie może pozostawić na stole liczby monet podzielnej przez 6. Wymagałoby to bowiem odjęcia liczby podzielnej przez 6, co nie jest zgodne z regułami gry.

Jeśli natomiast liczba monet na stole nie jest podzielna przez 6, to można wykonać ruch pozostawiający na stole liczbę monet będącą wielokrotnością 6. Istotnie — jeśli liczba monet na stole daje resztę 1 lub 4 z dzielenia przez 6, to można zabrać odpowiednio jedną lub cztery monety. Gdy reszta ta wynosi 2 lub 3, liczba jest podzielna odpowiednio przez 2 lub 3, więc można zabrać właśnie tyle monet.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy liczba monet na stole jest postaci $\ell = 6k+5$ (gdzie k jest pewną liczbą całkowitą nieujemną). Wykażemy, że wówczas ℓ ma dzielnik tej samej postaci. Zauważmy, że liczba ℓ nie dzieli się ani przez 2 ani przez 3, zatem wszystkie jej dzielniki pierwsze dają resztę 1 lub 5 z dzielenia przez 6. Jednakże iloczyn liczb dających resztę 1 z dzielenia przez 6 także daje resztę 1 z dzielenia przez 6. To zaś oznacza, że ℓ ma pewien dzielnik d dający resztę 5 z dzielenia przez 6. Zabranie wówczas d monet pozostawia na stole liczbę monet podzielną przez 6.

W takim razie dla liczb n podzielnych przez 6 strategię wygrywającą ma Spoko, a dla pozostałych Koko.

Zadanie 25. Ciąg (a_n) jest określony następująco: $a_0=2$ oraz $a_{n+1}=2a_n^2-1$ dla całkowitych nieujemnych n. Wykaż, że liczba $a_{2102!}$ nie jest podzielna przez $2012!+1$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że liczba $a_{2102!}$ dzieli się przez $2012!+1$. W szczególności oznacza to, że w rozważanym ciągu istnieją wyrazy podzielne przez $2012!+1$. Wybierzmy zatem spośród nich wyraz a_t o najmniejszym indeksie t. Wówczas oczywiście $t \leqslant 2102!$.

Zauważmy najpierw, że jeśli pewien wyraz rozważanego ciągu daje resztę 1 z dzielenia przez $2012!+1$, to następny — i w konsekwencji wszystkie kolejne wyrazy — także daje resztę 1 z dzielenia przez $2012!+1$. Jeśli bowiem

$$a_s \equiv 1 \pmod{2012!+1}$$

dla pewnej dodatniej liczby całkowitej s, to także

$$a_{s+1} = 2a_s^2 - 1 \equiv 2\cdot 1^2 - 1 = 1 \pmod{2012!+1}.$$

Skoro a_t dzieli się przez $2012!+1$, to

$$a_{t+1} = 2a_t^2 - 1 \equiv 2\cdot 0^2 - 1 \equiv -1 \pmod{2012!+1}$$

oraz

$$a_{t+2} = 2a_{t+1}^2 - 1 \equiv 2\cdot(-1)^2 - 1 = 1 \pmod{2012!+1}.$$

Zatem wszystkie wyrazy $a_{t+2}, a_{t+3}, \ldots$ dają resztę 1 z dzielenia przez $2012!+1$. Wynika stąd w szczególności, że $t+2 > 2102!$, co w połączeniu z nierównością $t \leqslant 2102!$ oznacza, że $t=2102!$ lub $t=2102!-1$. Druga z tych równości nie może mieć jednak miejsca, gdyż wówczas $a_{2102!} = a_{t+1} \equiv -1 \pmod{2012!+1}$, co jest sprzeczne z założeniem poczynionym na początku rozwiązania. Stąd $t=2102!$.

Z drugiej strony z zasady szufladkowej Dirichleta otrzymujemy, że wśród $2012!+2$ liczb $a_0, a_1, \ldots, a_{2012!+1}$ istnieją dwie dające jednakowe reszty z dzielenia przez $2012!+1$. Niech to będą liczby a_k oraz $a_{k+\ell}$, przy czym $\ell > 0$ oraz k, $k+\ell \leqslant 2012!+1$. Wówczas, skoro $a_k^2 \equiv a_{k+\ell}^2 \pmod{2012!+1}$, to również

$$a_{k+1} = 2a_k^2 - 1 \equiv 2a_{k+\ell}^2 - 1 = a_{k+\ell+1} \pmod{2012!+1}.$$

Powtarzając to rozumowanie stwierdzamy, że dowolne dwa wyrazy ciągu (a_n) o indeksach większych od k oraz różniących się o ℓ dają takie same reszty z dzielenia przez $2012!+1$.

Ponieważ $t+2-\ell \geqslant 2102!+2-2012!-1 > 2012!+1 \geqslant k$, więc

$$a_{t+2-\ell} \equiv a_{t+2} \equiv 1 \pmod{2012!+1}.$$

Stąd i z drugiego akapitu wynika, że wszystkie wyrazy ciągu począwszy od $a_{t+2-\ell}$ dają resztę 1 z dzielenia przez $2012!+1$. To jest jednak niemożliwe, bowiem $\ell > 0$, więc $t+2-\ell \leqslant t+1$, a jednocześnie wiemy, że a_{t+1} daje resztę -1 z dzielenia przez $2012!+1$. W takim razie uczynione na początku rozwiązania przypuszczenie było fałszywe, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 26. Wykaż, że dla dowolnych niezerowych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$2b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \sqrt{2a^4+2c^4} \geqslant 2\sqrt{3}.$$

Rozwiązanie

Z nierówności między średnią kwadratową i arytmetyczną dla dodatnich liczb $2a^2$ i $2c^2$ otrzymujemy

$$\sqrt{2a^4+2c^4} = \sqrt{\frac{(2a^2)^2+(2c^2)^2}{2}} \geqslant \frac{2a^2+2c^2}{2} = a^2+c^2.$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned}
&2b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\sqrt{2a^4+2c^4}-2\sqrt{3}\geqslant \\
&\quad\geqslant 2b^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+a^2+c^2-2\sqrt{3}= \\
&\quad=\left(\frac{\sqrt{3}}{2a}-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2c}-c\right)^2+\left(b+\frac{1}{2a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2c}\right)^2\geqslant 0\,,
\end{aligned}$$

co daje tezę.

Zadanie 27. Wyznacz największą wartość wyrażenia

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+\ldots+x_{2010}x_{2011}x_{2012}+x_{2011}x_{2012}x_1+x_{2012}x_1x_2\,,$$

gdzie x_1, x_2, …, x_{2012} są liczbami rzeczywistymi nieujemnymi spełniającymi warunek $x_1+x_2+\ldots+x_{2012}=2012$.

Rozwiązanie

Możemy bez straty ogólności przyjąć, że x_6 jest największą liczbą spośród x_1, x_2, …, x_{2012} (jeżeli największych liczb jest więcej niż jedna, za x_6 przyjmujemy dowolną z nich). Mamy wówczas

$$\begin{aligned}
&x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+\ldots+x_{2010}x_{2011}x_{2012}+x_{2011}x_{2012}x_1+x_{2012}x_1x_2\leqslant \\
&\quad\leqslant x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+\ldots+x_{2010}x_{2011}x_{2012}+x_{2011}x_{2012}x_6+x_6x_1x_2\leqslant \\
&\quad\leqslant (x_1+x_4+\ldots+x_{2011})(x_2+x_5+\ldots+x_{2012})(x_3+x_6+\ldots+x_{2010})\leqslant \\
&\quad\leqslant \left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2012}}{3}\right)^3=\left(\frac{2012}{3}\right)^3.
\end{aligned}$$

W ostatnim z zastosowanych szacowań skorzystaliśmy z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną trzech liczb.

Pozostaje zauważyć, że równość w powyższej nierówności jest osiągana na przykład dla

$$x_1=x_6=x_{2012}=\frac{2012}{3}\quad\text{oraz}\quad x_2=\ldots=x_5=x_7=\ldots=x_{2011}=0\,.$$

W takim razie największą wartością danego w treści zadania wyrażenia jest liczba $\left(\frac{2012}{3}\right)^3$.

Regulamin meczu matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7** i **8**. Drużyna zmieniająca referującego traci n punktów przy swojej n-tej zmianie w czasie meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6** – **11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6** – **11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

18. Interpretacja regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści