STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ

KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy

Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

poziom OM

2014 ROK

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

www.omg.edu.pl

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Poziom OM
2014 rok

WARSZAWA 2014

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Autorzy rozwiązań: Sylwester Błaszczuk, Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Szymon Kanonowicz, Jarosław Wróblewski

Recenzent: dr Jerzy Bednarczuk

Skład komputerowy: Sylwester Błaszczuk, Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Szymon Kanonowicz, Jarosław Wróblewski

Rysunki: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Jarosław Wróblewski

Projekt okładki: Adam Klemens

ISBN 978-83-63288-06-8

Nakład: 3000 egz.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

www.omg.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów odbył się po raz pierwszy w 2011 r. Zakwalifikowano na niego 20 najlepszych laureatów VI edycji OMG (2010/2011) z młodszych klas gimnazjum. Uczestnicy Obozu rywalizowali ze sobą w codziennych zawodach indywidualnych, rozegrali mecz matematyczny (regulamin meczu znajduje się na końcu niniejszej broszury), a także mieli okazję wysłuchać wielu odczytów o tematyce olimpijskiej.

Od 2012 roku Komitet Główny OMG organizuje dwa Obozy Naukowe. Pierwszy z nich (poziom OM) przeznaczony jest dla laureatów OMG z klas trzecich gimnazjum, którzy kończą swoje zmagania z OMG, a rozpoczynają z OM, czyli Olimpiadą Matematyczną na poziomie ponadgimnazjalnym. Drugi Obóz (poziom OMG) przeznaczony jest dla młodszych gimnazjalistów. Każdy z Obozów trwa tydzień, a kwalifikacja przeprowadzana jest na podstawie wyników uzyskanych na finale OMG.

Niniejszy zeszyt zawiera wszystkie zadania (wraz z rozwiązaniami) z Obozu na poziomie OM, który odbył się w dniach od 25–31 maja 2014 roku w miejscowości Perzanowo (woj. mazowieckie), w gospodarstwie agroturystycznym *Relax*. Wzięło w nim udział następujących 20 uczniów wyłonionych na podstawie wyników uzyskanych na zawodach trzeciego stopnia IX edycji OMG (2013/2014):

Jakub Boguta, Jakub Brojacz, Maciej Dziuba, Tomasz Grześkiewicz, Iwona Kotlarska, Adrian Koźluk, Jan Lebioda, Rafał Łyżwa, Wojciech Mitros, Jan Olkowski, Bogna Pawlus, Paweł Poczobut, Dominik Rafacz, Błażej Rozwoda, Jan Równicki, Jakub Różycki, Philip Smolenski, Szymon Stolarczyk, Magdalena Szybka oraz Mariusz Trela.

Kadrę Obozu stanowili:

Jerzy Bednarczuk, Sylwester Błaszczuk, Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Szymon Kanonowicz oraz Jarosław Wróblewski.

W ramach zawodów indywidualnych można było uzyskać 132 punkty. Trzy najlepsze wyniki to: 89 punktów, 74 punkty i 61 punktów. Aby ułatwić Czytelnikowi ocenę trudności poszczególnych zadań, opracowano tabelę punktacji uczestników Obozu dla poszczególnych zadań (zob. następna strona).

Mamy nadzieję, że publikacja zadań z Obozu wraz z pełnymi rozwiązaniami pozwoli większej liczbie uczniów zapoznać się z nimi i będzie stanowić cenny materiał w przygotowaniach do Olimpiady.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Zestawienie ocen z zawodów indywidualnych

Zad.	l. prac na 6 p.	l. prac na 5 p.	l. prac na 2 p.	l. prac na 0 p.
1.	5	0	0	15
2.	16	0	1	3
3.	1	0	0	19
4.	0	8	0	12
5.	16	0	0	4
6.	5	1	0	14
7.	8	2	0	10
8.	8	1	1	10
9.	1	0	1	18
10.	0	0	0	20
11.	2	2	0	16
12.	1	0	0	19
13.	8	0	0	12
14.	8	5	0	7
15.	4*	0	0	16
16.	0	0	0	20
17.	11	1	0	8
18.	5	0	0	15
19.	3	1	0	16
20.	2	3	0	15
21.	6	0	0	14

* w tym jedna praca oceniona na 12 punktów (patrz treść zadania 15).

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ wybrano takie punkty E i F, że $\sphericalangle FAE = 45^\circ$. Odcinki AE i AF przecinają przekątną BD kwadratu odpowiednio w punktach G i H. Wykaż, że pole trójkąta AGH jest równe polu czworokąta $EGHF$.

2. Wielomian $W(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n i każdej liczby pierwszej p liczba

$$W(n-p) - 2\cdot W(n) + W(n+p)$$

jest podzielna przez p^2.

3. Udowodnij, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby

$$(5+\sqrt{26})^{2014}$$

na pierwszych 2014 miejscach po przecinku nie występuje cyfra 7.

4. W okrąg ω wpisany jest taki pięciokąt $ABCDE$, że $AE = BC = CD$. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że środek okręgu opisanego na trójkącie BDF leży na okręgu ω.

5. Udowodnij, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$8xy \leqslant x^4 + y^4 + 8.$$

6. Rozstrzygnij, czy prostokąt o wymiarach $10^{2014} \times 3^{2014}$ można pociąć na prostokąty o wymiarach 5×6.

7. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ostrosłup pięciokątny, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi i który można rozciąć na takie dwa ostrosłupy czworokątne, których wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi.

8. Udowodnij, że wśród liczb postaci $2^n + 3^n$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią mniejszą od 10^{2014}, jest mniej niż 10 000 liczb pierwszych.

Drugie zawody indywidualne

9. Liczba n jest iloczynem czterech różnych liczb pierwszych większych od 100. Udowodnij, że istnieją takie różne dodatnie liczby całkowite a, b, c, d mniejsze od $n/4$, że liczby a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-d^2 są podzielne przez n.

10. Na prostych zawierających boki BC, CA, AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio po dwa punkty A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2 w taki sposób, że

$$A_1A = AB = BB_2, \quad B_1B = BC = CC_2, \quad C_1C = CA = AA_2.$$

Wykaż, że środki ciężkości trójkątów $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ pokrywają się.

11. Udowodnij, że dla każdej pary liczb rzeczywistych $x<y$ zachodzi nierówność
$$x+\sqrt[16]{y^{16}+16}<y+\sqrt[16]{x^{16}+16}.$$

12. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 28 można pociąć na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×10 lub 1×11.

Trzecie zawody indywidualne

13. W czworokącie wypukłym $ABCD$ o osi symetrii BD przekątne przecinają się w punkcie S. Na odcinkach AS i CS wybrano odpowiednio takie punkty K i L, że $SK=SL$. Proste BL i CD przecinają się w punkcie M, a proste DK i AB przecinają się w punkcie N. Wykaż, że punkty M, N, S leżą na jednej prostej.

14. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie dodatnie liczby całkowite m, n, że $m\equiv n \pmod{p(p-1)}$. Udowodnij, że $m^m\equiv n^n \pmod{p}$.

15. Przyjmij $n=21$ (wersja łatwiejsza) lub $n=19$ (wersja trudniejsza za podwójną liczbę punktów), a następnie udowodnij, że wśród dowolnych n osób istnieją trzy osoby, z których żadne dwie się nie znają lub sześć osób, z których każde dwie się znają.

16. Rozstrzygnij, czy istnieje wielościan wypukły, który ma dokładnie pięć ścian trójkątnych i dokładnie trzy wierzchołki, w których schodzą się trzy krawędzie.

Czwarte zawody indywidualne

17. Dla liczby pierwszej p, na potrzeby tego zadania, liczbę całkowitą n nazwiemy *p-fajną*, jeżeli liczba $(n+1)^p-n^p-1$ jest podzielna przez p^2.

Udowodnij, że liczba n jest *p-fajna* wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n+p$ jest *p-fajna*.

18. Rozstrzygnij, czy istnieją dodatnie liczby całkowite k, m, n spełniające równość
$$(3+\sqrt{7})^k\cdot(4+\sqrt{7})^m=(5+\sqrt{7})^n.$$

19. Dany jest nierównoramienny trójkąt ostrokątny ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie H. Punkty X, Y leżą odpowiednio na odcinkach CA, CB, przy czym czworokąt $CXHY$ jest równoległobokiem. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na symetralnej odcinka XY.

20. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 2^{2014} można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok 3 lub 5.

21. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 2^{2014} można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok 3, 5 lub 7.

Mecz matematyczny

22. Niech $a_n = [n\cdot\sqrt{2}]$ dla $n=1,2,3,\ldots$ oraz niech (b_n) będzie rosnącym ciągiem złożonym ze wszystkich dodatnich liczb całkowitych niewystępujących w ciągu (a_n). Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczby a_n i b_n są tej samej parzystości.

Uwaga: Symbolem $[x]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą, która nie jest większa od liczby x.

23. Punkt P wybrano na podstawie AB ostrokątnego trójkąta równoramiennego ABC. Punkty E i D są symetryczne do punktu P odpowiednio względem prostych AC i BC. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie Q. Udowodnij, że prosta PQ przechodzi przez pewien punkt niezależny od wyboru punktu P.

24. W kwadracie o boku 48 umieszczono 100 trójkątów (niekoniecznie rozłącznych) o sumie pól równej 600 i sumie obwodów równej 1200. Udowodnij, że w danym kwadracie można umieścić koło o promieniu 1, którego wnętrze jest rozłączne z wnętrzami tych trójkątów.

25. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{99}$ spełniają warunek

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_{99}) = 100.$$

Wykaż, że

$$(1+a_1^2)(1+2a_2^2)(1+3a_3^2)\ldots(1+99a_{99}^2) \geqslant 100.$$

26. Rozstrzygnij, czy istnieje taki wielokąt wypukły, że każda jego przekątna ma taką samą długość jak pewnien jego bok oraz każdy bok wielokąta ma taką samą długość jak pewna jego przekątna.

27. Interesują nas takie liczby naturalne, które mają dokładnie jedno przedstawienie w postaci $ab+2a+3b$, gdzie a, b są dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że takich liczb jest nieskończenie wiele.

28. Udowodnij, że spośród dowolnych 64 wierzchołków 2015-kąta foremnego można wybrać cztery, które są wierzchołkami trapezu.

29. Okrąg ω jest opisany na trójkącie ABC. Okrąg o jest styczny do odcinków AC i BC odpowiednio w punktach K i L oraz styczny wewnętrznie do okręgu ω. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu ω oraz zewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że istnieje prosta styczna do okręgów o, o_1, o_2.

30. Rozstrzygnij, czy równanie $a^2+b^2=5^{2014}$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych a, b niepodzielnych przez 5.

31. Rozstrzygnij, czy równanie $a^3+b^3+c^3=5^{2014}$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych a, b, c.

32. Czworościan $ABCD$ ma tę własność, że suma kątów płaskich przy wierzchołku A jest równa sumie kątów płaskich przy wierzchołku B, a suma kątów płaskich przy wierzchołku C jest równa sumie kątów płaskich przy wierzchołku D. Udowodnij, że $AC=BD$.

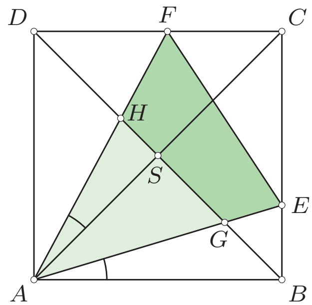
Rozwiązania zadań

Pierwsze zawody indywidualne

Zadanie 1. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ wybrano takie punkty E i F, że $\sphericalangle FAE = 45^\circ$. Odcinki AE i AF przecinają przekątną BD kwadratu odpowiednio w punktach G i H. Wykaż, że pole trójkąta AGH jest równe polu czworokąta $EGHF$.

Rozwiązanie

Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych kwadratu $ABCD$ (rys. 1). Zauważmy, że $\sphericalangle HSA = \sphericalangle EBA = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle HAS = 45^\circ - \sphericalangle SAG = \sphericalangle EAB$. Wobec tych równości trójkąty HSA i EBA są podobne na mocy cechy kąt–kąt.



rys. 1

Trójkąt ABS jest równoramienny oraz $\sphericalangle ASB = 90^\circ$, więc $AB = \sqrt{2} \cdot AS$. Z powyższego podobieństwa wynika, że

$$\frac{AE}{AH} = \frac{AB}{AS} = \sqrt{2}\,.$$

Postępując analogicznie, dowodzimy, że

$$\frac{AF}{AG} = \sqrt{2}\,.$$

Wówczas podobne są trójkąty AFE i AGH na mocy cechy podobieństwa bok–kąt–bok, a skala podobieństwa wynosi

$$\frac{AE}{AH} = \frac{AF}{AG} = \sqrt{2}\,.$$

Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Stosunek pól trójkątów podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa, więc $[AFE] = 2 \cdot [AGH]$. Ponadto mamy $[AFE] = [AGH] + [EGHF]$. Stąd otrzymujemy równość $[AGH] = [EGHF]$.

Zadanie 2. Wielomian $W(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n i każdej liczby pierwszej p liczba

$$W(n-p) - 2 \cdot W(n) + W(n+p)$$

jest podzielna przez p^2.

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw postulowaną podzielność dla jednomianów postaci $W_k(x)=x^k$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, uzyskujemy

$$W_k(n-p)-2\cdot W_k(n)+W_k(n+p)=(n-p)^k-2n^k+(n+p)^k=$$
$$=\left(n^k-\binom{k}{1}n^{k-1}p+\binom{k}{2}n^{k-2}p^2-\binom{k}{3}n^{k-3}p^3+\ldots+(-1)^kp^k\right)-2n^k+$$
$$+\left(n^k+\binom{k}{1}n^{k-1}p+\binom{k}{2}n^{k-2}p^2+\binom{k}{3}n^{k-3}p^3+\ldots+p^k\right)=p^2\cdot a,$$

gdzie a jest pewną liczbą całkowitą. Korzystając z udowodnionej podzielności w oczywisty sposób otrzymujemy tezę zadania dla jednomianów postaci a_kx^k, gdzie a_k jest liczbą całkowitą. W takim razie, teza zadania zachodzi również dla wielomianów o współczynnikach całkowitych w ogólnej postaci

$$W(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\ldots+a_1x+a_0.$$

Zadanie 3. Udowodnij, że w rozwinięciu dziesiętnym liczby

$$(5+\sqrt{26})^{2014}$$

na pierwszych 2014 miejscach po przecinku nie występuje cyfra 7.

Rozwiązanie

Używając wzoru dwumianowego Newtona, wnioskujemy, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie a, b, że

$$(5+\sqrt{26})^{2014}=a+b\sqrt{26}.$$

Zauważmy, że na podstawie tego samego wzoru uzyskujemy również, że

$$(5-\sqrt{26})^{2014}=a-b\sqrt{26}.$$

Wobec tego liczba $(5+\sqrt{26})^{2014}+(5-\sqrt{26})^{2014}$ jest całkowita.

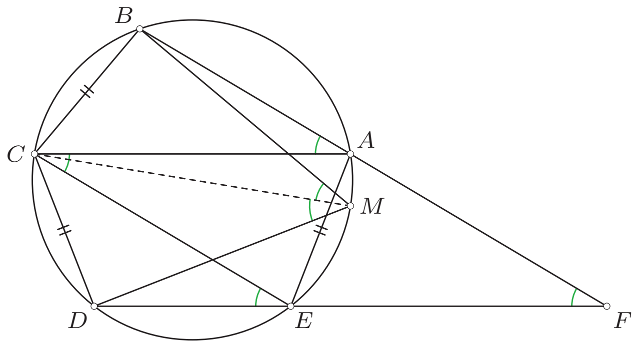
Oznaczmy kolejno $x=(5+\sqrt{26})^{2014}$, $y=(5-\sqrt{26})^{2014}$. Ponadto niech $\{z\}$ oznacza część ułamkową liczby z. Ponieważ $|5-\sqrt{26}|<1/10$, więc zachodzi $y<1/10^{2014}$, a jako że liczba y jest dodatnia, to w szczególności spełniona jest równość $y=\{y\}$. Ponieważ x, y nie są liczbami całkowitymi (a nawet są niewymierne) i ich suma jest całkowita, więc musi zachodzić $\{x\}+\{y\}=1$. Stąd wnioskujemy, że $\{x\}=1-\{y\}\geqslant 1-1/10^{2014}$, zatem na pierwszych 2014 miejscach po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby x występują tylko cyfry 9. W szczególności nie występuje tam cyfra 7.

Zadanie 4. W okrąg ω wpisany jest taki pięciokąt $ABCDE$, że $AE=BC=CD$. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że środek okręgu opisanego na trójkącie BDF leży na okręgu ω.

Rozwiązanie

Niech CM będzie średnicą okręgu ω (rys. 2). Udowodnimy, że punkt M jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BDF.

Punkty B i D są symetryczne względem prostej CM, więc $MB = MD$. Pozostaje udowodnić, że punkt F należy do okręgu o środku M i promieniu MB, czyli że $\sphericalangle BFD = \frac{1}{2}\sphericalangle BMD$.



rys. 2

Z równości $\sphericalangle ACE = \sphericalangle CED$ (kątów wpisanych w okrąg ω opartych na przystających łukach) wynika, że proste AC i DE są równoległe. Stąd

$$\sphericalangle BFD = \sphericalangle BAC = \sphericalangle BMC = \tfrac{1}{2}\sphericalangle BMD,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 5. Udowodnij, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$8xy \leqslant x^4 + y^4 + 8.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Zauważmy, że wyrażenie

$$x^4 + y^4 + 8 - 8xy = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 2x^2y^2 - 8xy + 8 = (x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 2)^2$$

jest sumą kwadratów dwóch liczb rzeczywistych. Zachodzi zatem nierówność $x^4 + y^4 + 8 - 8xy \geqslant 0$, która jest równoważna tezie zadania.

Sposób II

Na mocy nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną zastosowanej dla nieujemnych liczb x^4, y^4, 4, 4, otrzymujemy

$$x^4 + y^4 + 8 = x^4 + y^4 + 4 + 4 \geqslant 4\sqrt[4]{x^4 \cdot y^4 \cdot 4 \cdot 4} = 8|xy| \geqslant 8xy.$$

Zadanie 6. Rozstrzygnij, czy prostokąt o wymiarach $10^{2014} \times 3^{2014}$ można pociąć na prostokąty o wymiarach 5×6.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że taki podział prostokąta jest niemożliwy, a nawet udowodnimy więcej: danego w zadaniu prostokąta nie można pociąć na prostokąty o wymiarach 1×6.

W tym celu podzielimy prostokąt na kwadraty jednostkowe zwane dalej polami i ponumerujemy lub pokolorujemy je w odpowiedni sposób. Ponieważ $10^{2014} \equiv 22 \pmod 6$ oraz $3^{2014} \equiv 21 \pmod 6$, a numerowania lub kolorowania będą okresowe w poziomie i pionie z okresem 6, więc sposób numerowania lub kolorowania przedstawimy na przykładzie prostokąta o wymiarach 22×21.

Sposób I
Ponumerujmy pola prostokąta jak na rysunku 3.

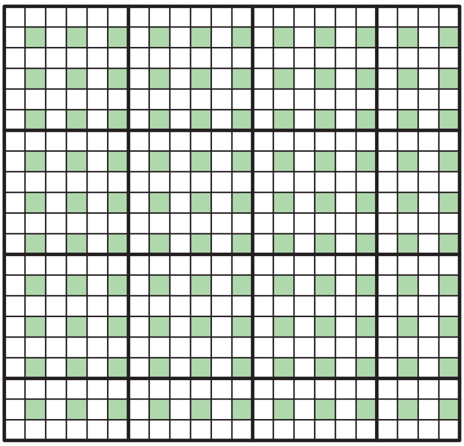
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4
2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1
5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2
6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4
2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1
5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2
6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4
2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1
5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2
6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4
2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6

rys. 3

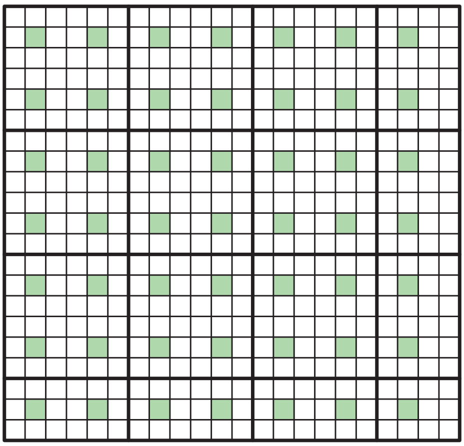
Zauważmy, że każdy prostokąt 1×6 pokrywający 6 pól pokrywa pola z różnymi numerami. Ponieważ prawe dolne naroże o wymiarach 4×3 (zaznaczone kolorem) zawiera jedno pole z numerem 1 i trzy pola z numerem 3, a w pozostałej części prostokąta liczby pól z numerami od 1 do 6 są równe, więc cały prostokąt zawiera więcej pól z numerem 3 niż pól z numerem 1. Stąd wynika, że nie jest możliwe pokrycie danego prostokąta zgodne z warunkami zadania.

Sposób II
Pokolorujmy pola prostokąta jak na rysunku 4.

Wówczas każdy prostokąt 1×6 pokrywający 6 pól pokrywa 0 lub 3 zamalowane pola. Gdyby dany prostokąt dało się wypełnić prostokątami 1×6, liczba zamalowanych pól byłaby podzielna przez 3. Tymczasem prawe dolne naroże o wymiarach 4×3 zawiera dwa zamalowane pola, a liczba zamalowanych pól w pozostałej części prostokąta jest podzielna przez 3.



rys. 4



rys. 5

Sposób III

Pokolorujmy pola prostokąta jak na rysunku 5.

Wówczas każdy prostokąt 1×6 pokrywający 6 pól pokrywa 0 lub 2 zamalowane pola. Gdyby dany prostokąt dało się wypełnić prostokątami 1×6, liczba zamalowanych pól byłaby parzysta. Tymczasem prawe dolne naroże o wymiarach 4×3 zawiera jedno zamalowane pole, a liczba zamalowanych pól w pozostałej części prostokąta jest parzysta.

Sposób IV

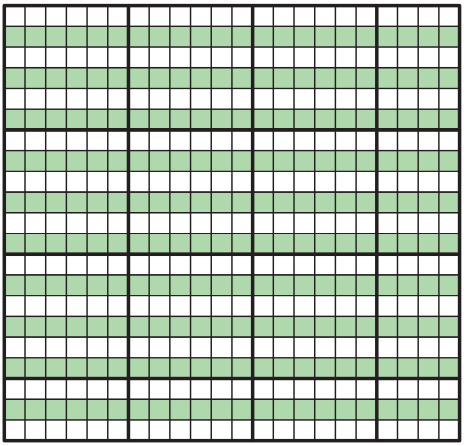
Pokolorujmy pola prostokąta jak na rysunku 6.

Wówczas każdy prostokąt 1×6 pokrywający 6 pól pokrywa 0, 3 lub 6 zamalowanych pól. Gdyby dany prostokąt dało się wypełnić prostokątami 1×6, liczba zamalowanych pól byłaby podzielna przez 3. Tymczasem prawe dolne naroże o wymiarach 4×3 zawiera cztery zamalowane pola, a liczba zamalowanych pól w pozostałej części prostokąta jest podzielna przez 3.

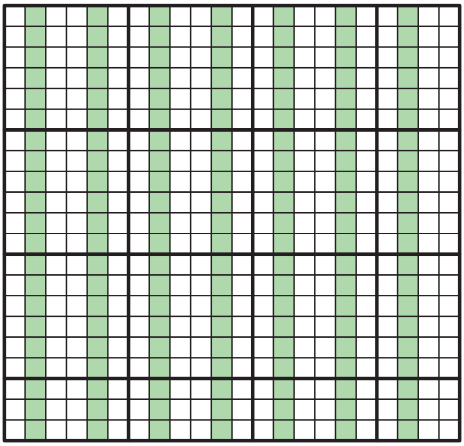
Sposób V

Pokolorujmy pola prostokąta jak na rysunku 7.

Wówczas każdy prostokąt 1×6 pokrywający 6 pól pokrywa 0, 2 lub 6 zamalowanych pól. Gdyby dany prostokąt dało się wypełnić prostokątami 1×6, liczba zamalowanych pól byłaby parzysta. Tymczasem prawe dolne naroże o wymiarach 4×3 zawiera trzy zamalowane pola, a liczba zamalowanych pól w pozostałej części prostokąta jest parzysta.



rys. 6

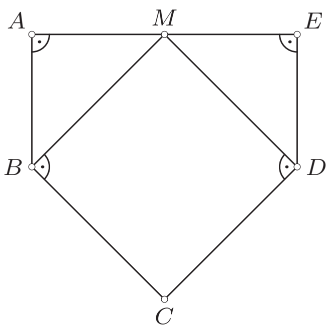


rys. 7

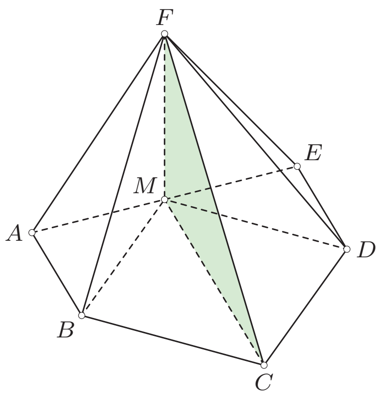
Zadanie 7. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ostrosłup pięciokątny, którego wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi i który można rozciąć na takie dwa ostrosłupy czworokątne, których wszystkie ściany boczne są trójkątami prostokątnymi.

Rozwiązanie

Rozważmy prostokąt $ABDE$ o bokach długości $AE = BD = 2$, a także $AB = DE = 1$. Niech punkt M będzie środkiem odcinka AE, a punkt C będzie odbiciem punktu M względem prostej BD (rys. 8). Wówczas kąty MAB, MBC, CDM, DEM są proste.



rys. 8



rys. 9

Niech F będzie punktem leżącym na prostej przechodzącej przez punkt M i prostopadłej do płaszczyzny zawierającej pięciokąt $ABCDE$, przy czym $FM = 1$. Wykażemy, że ostrosłup $ABCDEF$ ma żądane własności.

Zauważmy, że rzutami odcinków FA, FB, FD, FE na płaszczyznę zawierającą pięciokąt $ABCDE$ są odcinki MA, MB, MD, ME. Ponieważ kąty MAB, MBC, CDM, DEM są proste, więc na mocy twierdzenia o trzech prostopadłych kąty FAB, FBC, CDF, DEF również są proste. Ponadto, z określenia punktu F wynika, że trójkąt AEF jest równoramiennym trójkątem prostokątnym o kącie prostym przy wierzchołku F. Zatem każda ze ścian bocznych ostrosłupa $ABCDEF$ jest trójkątem prostokątnym.

Rozetnijmy ostrosłup $ABCDEF$ płaszczyzną FMC na dwa ostrosłupy czworokątne $ABCMF$ oraz $CDEMF$. Wykazaliśmy już wcześniej, że ich ściany boczne FAB, FBC, FCD, FDE są trójkątami prostokątnymi. Ich pozostałe ściany AMF, CMF, EMF mają kąty proste przy wierzchołku M, gdyż MF jest odcinkiem prostopadłym do płaszczyzny podstawy. Warunki zadania są zatem spełnione.

Zadanie 8. Udowodnij, że wśród liczb postaci 2^n+3^n, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią mniejszą od 10^{2014}, jest mniej niż 10 000 liczb pierwszych.

Rozwiązanie

Wykażemy, że jeśli liczba n ma nieparzysty dzielnik pierwszy, to liczba 2^n+3^n jest złożona. Niech p będzie pewnym nieparzystym dzielnikiem pierwszym liczby n. Wówczas $n=pm$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej m mniejszej od n. Wstawiając do tożsamości

$$x^p+y^p=(x+y)(x^{p-1}-x^{p-2}y+x^{p-3}y^2-\ldots-xy^{p-2}+y^{p-1})$$

liczby $x=2^m$ i $y=3^m$, wnioskujemy, że liczba 2^n+3^n jest podzielna przez 2^m+3^m, a zatem nie jest liczbą pierwszą. Oznacza to, że jeśli 2^n+3^n jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą dwójki.

Ponieważ zachodzą nierówności

$$10^{2014}<10^{2016}=1000^{672}<1024^{672}=2^{6720}<2^{10000},$$

więc liczba potęg dwójki mniejszych od 10^{2014} jest mniejsza od 10 000. Stąd dostajemy, że wśród liczb postaci 2^n+3^n, gdzie $n<10^{2014}$, liczb pierwszych jest mniej niż 10 000.

Drugie zawody indywidualne

Zadanie 9. Liczba n jest iloczynem czterech różnych liczb pierwszych większych od 100. Udowodnij, że istnieją takie różne dodatnie liczby całkowite a, b, c, d mniejsze od $n/4$, że liczby a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-d^2 są podzielne przez n.

Rozwiązanie

Zapiszmy zdefiniowaną w zadaniu liczbę naturalną jako $n=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot p_4$, gdzie p_1, p_2, p_3, p_4 są różnymi liczbami pierwszymi większymi od 100.

Sposób I

Wiemy, że dla każdej liczby pierwszej $p>2$ i każdej liczby całkowitej m, liczby m^2 i $(p-m)^2=p^2-2pm+m^2$ dają tę samą resztę z dzielenia przez p. Zatem różnych reszt z dzielenia kwadratów liczb całkowitych przez p jest maksymalnie $(p-1)/2+1=(p+1)/2$. Prawdziwy jest nawet mocniejszy fakt, a mianowicie, wszystkich reszt kwadratowych modulo $p\geqslant 3$ jest dokładnie $(p+1)/2$.

Nie będziemy się tu powoływać na ten fakt, ale gorąco zachęcamy Czytelnika do udowodnienia tego twierdzenia.

Każdej dodatniej liczbie całkowitej k mniejszej od $n/4$ można przyporządkować czwórkę uporządkowaną (k_1,k_2,k_3,k_4), gdzie liczba całkowita k_i jest resztą z dzielenia liczby k^2 przez p_i. Jak wspomnieliśmy wcześniej, liczba wszystkich możliwych takich czwórek uporządkowanych wynosi co najwyżej

$$\frac{p_1+1}{2}\cdot\frac{p_2+1}{2}\cdot\frac{p_3+1}{2}\cdot\frac{p_4+1}{2}.$$

Ponieważ każda z liczb p_i jest większa od 100, więc wyżej wymieniona liczba jest mniejsza od

$$\frac{1}{16}\left(p_1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(p_4+\frac{p_4}{100}\right)=\frac{1{,}01^4\cdot n}{16}<\frac{n}{15}.$$

Teraz wystarczy tylko zauważyć, że jeśli $n>100^4$, to liczb całkowitych dodatnich mniejszych od $n/4$ jest ponad 3 razy więcej od $n/15$. Na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieją cztery takie całkowite liczby a, b, c, d, które mają przypisaną tę samą czwórkę uporządkowaną (r_1,r_2,r_3,r_4). Korzystając z chińskiego twierdzenia o resztach, uzyskujemy ostatecznie, że liczby a^2, b^2, c^2, d^2 dają tę samą resztę z dzielenia przez n, co jest równoważne tezie zadania.

Sposób II

Zauważmy, że $a^2-(a-p_1p_2p_3)^2=p_1p_2p_3(2a-p_1p_2p_3)$.

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach istnieje rozwiązanie układu kongruencji

$$\begin{cases} x\equiv p_1p_2p_3 \pmod{p_4}\\ x\equiv p_2p_3p_4 \pmod{p_1}\\ x\equiv p_3p_4p_1 \pmod{p_2}\\ x\equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$$

gdzie $0<x<2p_1p_2p_4<n/50$. Przyjmując $2a=x$, $b=|a-p_1p_2p_3|$, $c=|a-p_2p_3p_4|$, $d=|a-p_3p_4p_1|$, uzyskujemy natychmiast, że liczby a^2-b^2, a^2-c^2, a^2-d^2 są podzielne przez n, co jest równoważne tezie zadania. Musimy jednak wcześniej sprawdzić, że liczby b, c, d są parami różnymi dodatnimi liczbami całkowitymi mniejszymi od $n/4$, co zostawiamy Czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

Zadanie 10. Na prostych zawierających boki BC, CA, AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio po dwa punkty A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2 w taki sposób, że

$$A_1A=AB=BB_2,\quad B_1B=BC=CC_2,\quad C_1C=CA=AA_2.$$

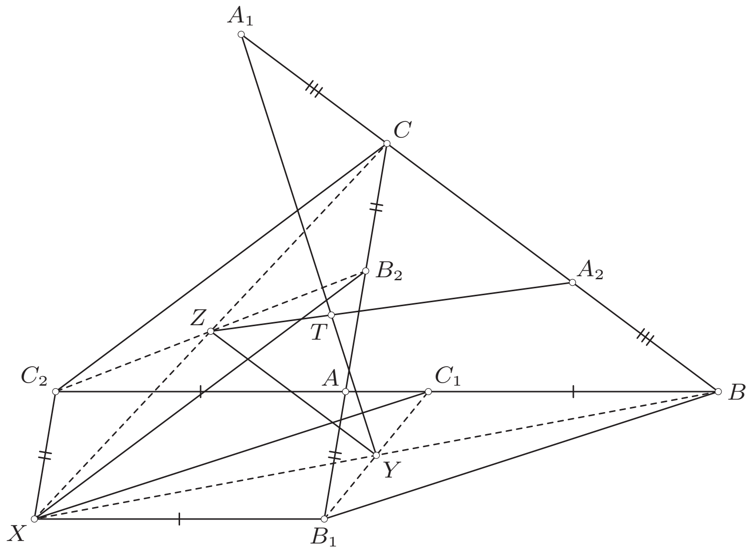
Wykaż, że środki ciężkości trójkątów $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ pokrywają się.

Rozwiązanie

Sposób I

Z określenia punktów A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 wynika, że trójkąty CC_1C_2 oraz CAB są symetryczne względem wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka C. Oznacza to, że spełniona jest równość $\overrightarrow{C_2A} = \overrightarrow{C_1B}$. Podobnie uzasadniamy, że $\overrightarrow{CB_2} = \overrightarrow{AB_1}$ oraz $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{CB}$.

Niech X będzie takim punktem, że czworokąt AB_1XC_2 jest równoległobokiem (rys. 10). Wówczas $\overrightarrow{XB_1} = \overrightarrow{C_2A} = \overrightarrow{C_1B}$, zatem czworokąt XB_1BC_1 jest równoległobokiem. Podobnie uzasadniamy, że czworokąt XC_2CB_2 jest równoległobokiem.



rys. 10

Przyjmijmy, że punkty Y oraz Z są środkami odpowiednio równoległoboków XB_1BC_1 oraz XC_2CB_2. Ponieważ są one środkami odcinków XB oraz XC, więc $\overrightarrow{YZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_1}$. Oznaczmy punkt przecięcia odcinków YA_1 i ZA_2 przez T. Wówczas na mocy twierdzenia Talesa otrzymujemy

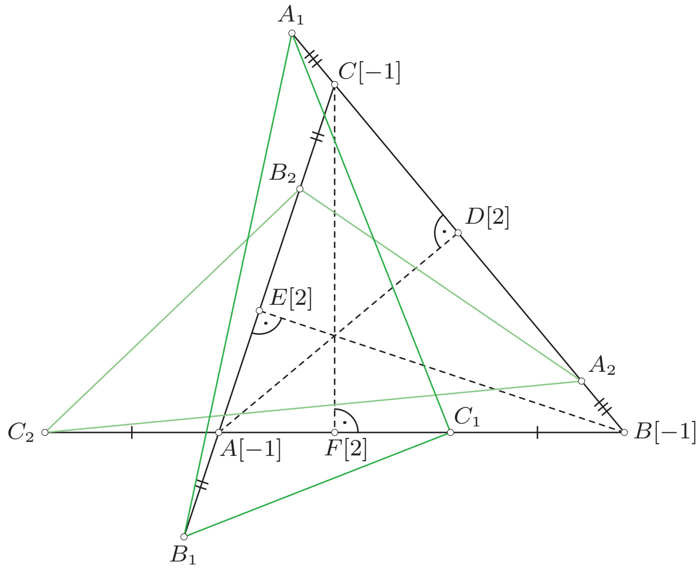
$$\frac{A_1T}{TY} = \frac{A_2T}{TZ} = 2\,.$$

Skoro punkty Y, Z są środkami równoległoboków XB_1BC_1 i XC_2CB_2, to są to środki odcinków C_1B_1 oraz C_2B_2. Powyżej wykazaliśmy, że punkt T dzieli odcinki A_1Y oraz A_2Z w stosunku $2:1$, zatem punkt ten pokrywa się ze środkami ciężkości trójkątów $A_1B_1C_1$ oraz $A_2B_2C_2$.

Sposób II

Oznaczmy przez D, E, F spodki wysokości trójkąta ABC poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A, B, C (rys. 11). Rozważmy układ mas, w którym każdy z punktów A, B, C ma masę -1, a każdy z punktów D, E, F ma masę 2. Środek ciężkości S tego układu jest określony jednoznacznie.

Podobnie jak w sposobie pierwszym uzasadniamy, że punkty A_1, B_1, C_1 są symetryczne do punktów B, C, A odpowiednio względem punktów D, E, F oraz analogicznie dla punktów A_2, B_2, C_2.



rys. 11

Grupując masy par punktów B i D, C i E, A i F otrzymujemy masę 1 w każdym z punktów A_1, B_1, C_1. To oznacza, że punkt S jest środkiem ciężkości trójkąta $A_1B_1C_1$. Analogicznie grupując masy par punktów C i D, A i E, B i F, otrzymujemy masę 1 w każdym z wierzchołków trójkąta $A_2B_2C_2$, więc punkt S jest również środkiem ciężkości tego trójkąta.

Zadanie 11. Udowodnij, że dla każdej pary liczb rzeczywistych $x<y$ zachodzi nierówność
$$x+\sqrt[16]{y^{16}+16}<y+\sqrt[16]{x^{16}+16}.$$

Rozwiązanie

Wielokrotnie korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, otrzymujemy tożsamość
$$a^{16}-b^{16}=(a^8+b^8)\cdot(a^4+b^4)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a+b)\cdot(a-b). \tag{1}$$
Jeżeli $a+b\neq 0$, to równość (1) można zapisać w postaci
$$a-b=\frac{a^{16}-b^{16}}{(a^8+b^8)\cdot(a^4+b^4)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a+b)}. \tag{2}$$

Daną w zadaniu nierówność możemy przepisać równoważnie jako
$$\sqrt[16]{y^{16}+16}-\sqrt[16]{x^{16}+16}<y-x. \tag{3}$$
Z założenia $x<y$ wynika, że prawa strona nierówności (3) jest dodatnia.

Przyjmijmy oznaczenie $S_k = \sqrt[k]{y^{16}+16} + \sqrt[k]{x^{16}+16}$.

Wówczas zastosowanie tożsamości (2) dla $a = \sqrt[16]{y^{16}+16}$ i $b = \sqrt[16]{x^{16}+16}$ do różnicy występującej po lewej stronie nierówności (3) oraz ponowne wykorzystanie tożsamości (1), tym razem dla $a=y$ i $b=x$, prowadzi kolejno do

$$\sqrt[16]{y^{16}+16} - \sqrt[16]{x^{16}+16} = \frac{(y^{16}+16)-(x^{16}+16)}{S_2\cdot S_4\cdot S_8\cdot S_{16}} = \frac{y^{16}-x^{16}}{S_2\cdot S_4\cdot S_8\cdot S_{16}} =$$
$$= \frac{(y^8+x^8)\cdot(y^4+x^4)\cdot(y^2+x^2)\cdot(y+x)\cdot(y-x)}{S_2\cdot S_4\cdot S_8\cdot S_{16}} =$$
$$= \frac{y^8+x^8}{S_2}\cdot\frac{y^4+x^4}{S_4}\cdot\frac{y^2+x^2}{S_8}\cdot\frac{y+x}{S_{16}}\cdot(y-x)\,. \qquad (4)$$

Zauważmy, że

$$y^8+x^8 = \sqrt{y^{16}} + \sqrt{x^{16}} < \sqrt{y^{16}+16} + \sqrt{x^{16}+16} = S_2, \qquad (5)$$
$$y^4+x^4 = \sqrt[4]{y^{16}} + \sqrt[4]{x^{16}} < \sqrt[4]{y^{16}+16} + \sqrt[4]{x^{16}+16} = S_4, \qquad (6)$$
$$y^2+x^2 = \sqrt[8]{y^{16}} + \sqrt[8]{x^{16}} < \sqrt[8]{y^{16}+16} + \sqrt[8]{x^{16}+16} = S_8 \qquad (7)$$

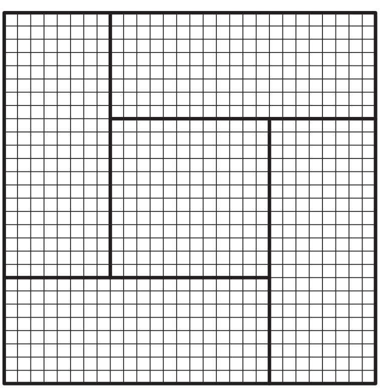
oraz

$$y+x \leqslant |y|+|x| = \sqrt[16]{y^{16}} + \sqrt[16]{x^{16}} < \sqrt[16]{y^{16}+16} + \sqrt[16]{x^{16}+16} = S_{16}. \qquad (8)$$

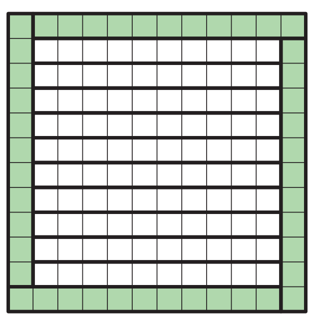
Z nierówności (5)–(8) wynika, że pierwsze cztery czynniki iloczynu (4) są mniejsze od 1. Ponadto czynniki pierwszy, drugi, trzeci i piąty są nieujemne. Zatem cały ten iloczyn jest mniejszy od $y-x$, co kończy dowód nierówności danej w treści zadania.

Zadanie 12. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 28 można pociąć na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×10 lub 1×11.

Rozwiązanie



rys. 12



rys. 13

Wykażemy, że taki podział jest możliwy.

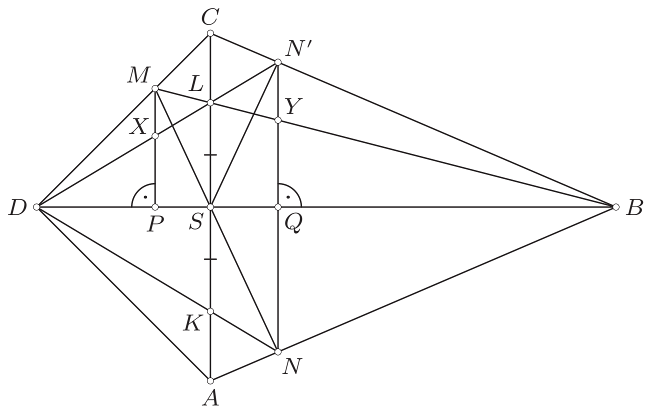
Zauważmy, że kwadrat o boku 28 można rozciąć na cztery prostokąty 8×20 i jeden kwadrat 12×12 (rys. 12). Z kolei prostokąt 8×20 w oczywisty sposób daje się złożyć z 16 prostokątów 1×10. Pozostaje zauważyć, że kwadrat o boku 12 można podzielić na prostokąty 1×11 (kolorowe) oraz 1×10 (białe) jak na rysunku 13.

Trzecie zawody indywidualne

Zadanie 13. W czworokącie wypukłym $ABCD$ o osi symetrii BD przekątne przecinają się w punkcie S. Na odcinkach AS i CS wybrano odpowiednio takie punkty K i L, że $SK=SL$. Proste BL i CD przecinają się w punkcie M, a proste DK i AB przecinają się w punkcie N. Wykaż, że punkty M, N, S leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie

Na początku zauważmy, że punkty K i L są symetryczne względem prostej BD. Oznaczmy przez N' punkt przecięcia prostych BC i DL. Wówczas punkt N' jest symetryczny do N względem prostej BD, a co za tym idzie $NN'\perp BD$. Oznaczmy rzuty prostopadłe punktów M i N' na prostą BD odpowiednio przez P i Q (rys. 14).



rys. 14

Udowodnimy, że $\sphericalangle MSP=\sphericalangle NSQ$. W tym celu wprowadźmy jeszcze dwa oznaczenia: niech X będzie punktem przecięcia prostych DL i MP, a Y punktem przecięcia prostych BL i $N'Q$. Na mocy twierdzenia Talesa dla prostych PM i SC oraz kątów SDC i LDC prawdziwe są następujące równości

$$\frac{PM}{SC}=\frac{DM}{DC}=\frac{XM}{LC}.$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\frac{QN'}{SC}=\frac{YN'}{LC}.$$

Przekształcając otrzymane wyniki, uzyskujemy

$$\frac{PM}{XM}=\frac{SC}{LC}=\frac{QN'}{YN'},$$

a co za tym idzie

$$\frac{PM}{QN'} = \frac{XM}{YN'}.$$

Ponadto, z twierdzenia Talesa dla prostych XM, YN' i kąta XLM, a także dla prostych PX, SL, QN' i kąta $\sphericalangle QDN'$ wynikają odpowiednio równości

$$\frac{XM}{YN'} = \frac{XL}{LN'} \quad \text{oraz} \quad \frac{XL}{LN'} = \frac{PS}{SQ}.$$

Łącząc otrzymane zależności, otrzymujemy

$$\frac{PM}{QN} = \frac{PM}{QN'} = \frac{XM}{YN'} = \frac{XL}{LN'} = \frac{PS}{SQ},$$

więc trójkąty MPS i NQS są podobne na mocy cechy bok–kąt–bok. Stąd $\sphericalangle MSP = \sphericalangle NSQ$, czyli punkty M, N, S leżą na jednej prostej.

Zadanie 14. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie dodatnie liczby całkowite m, n, że $m \equiv n \pmod{p(p-1)}$. Udowodnij, że $m^m \equiv n^n \pmod{p}$.

Rozwiązanie

Załóżmy bez straty ogólności, że $m \geqslant n$. Z warunku $m \equiv n \pmod{p(p-1)}$ wynika, że $m \equiv n \pmod{p}$ oraz $m \equiv n \pmod{p-1}$. To oznacza, że istnieją liczby całkowite nieujemne k, l spełniające równości $m = kp+n$ oraz $m = l(p-1)+n$.

Jeśli $m \equiv 0 \pmod{p}$, to $n \equiv 0 \pmod{p}$ i wówczas $m^m \equiv 0 \equiv n^n \pmod{p}$, więc teza jest spełniona.

Jeśli $m \not\equiv 0 \pmod{p}$, to stosując własności kongruencji oraz małe twierdzenie Fermata, dostajemy

$$m^m = (kp+n)^m \equiv n^m = n^{l(p-1)+n} = (n^{p-1})^l \cdot n^n \equiv 1^l \cdot n^n = n^n \pmod{p}.$$

Zadanie 15. Przyjmij $n = 21$ (wersja łatwiejsza) lub $n = 19$ (wersja trudniejsza za podwójną liczbę punktów), a następnie udowodnij, że wśród dowolnych n osób istnieją trzy osoby, z których żadne dwie się nie znają lub sześć osób, z których każde dwie się znają.

Rozwiązanie

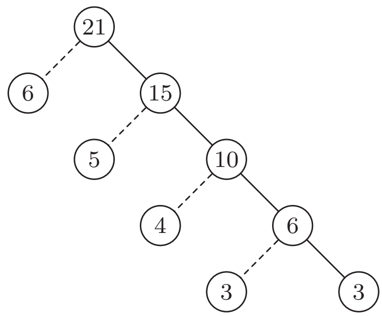
Wersja łatwiejsza ($n = 21$).

Załóżmy, że pewna osoba A nie zna pewnych 6 innych osób. Wtedy wśród tych 6 osób albo pewna para się nie zna, co po uwzględnieniu A prowadzi nas do istnienia trójki osób, z których żadne dwie się nie znają, albo każdy zna każdą inną osobę, czyli możemy wskazać sześć osób, z których każde dwie się znają.

Jeśli wstępne założenie nie jest prawdziwe, to A zna 15 innych osób (rys. 15). Wskazujemy wśród nich dowolną osobę B i rozpatrujemy dwa przypadki — w grupie znajomych A osoba B albo nie zna co najmniej 5 osób, albo zna co najmniej 10 osób.

Pierwszy przypadek rozpatrujemy analogicznie jak powyżej — albo wśród tych 5 osób istnieją dwie, które się nie znają (pamiętając, że nie znają też B), albo każdy zna każdego (tu pamiętając, że znają też A).

Jeśli zaś osoba B zna co najmniej 10 osób wśród znajomych A, to kontynuujemy nasze rozumowanie wybierając z tej grupy osobę C i patrząc, czy nie zna ona 4 osób, czy też zna ona 6 osób (w obu przypadkach zawężamy ten wybór do wspólnych znajomych A i B). W pierwszym przypadku teza jest prawdziwa po sprawdzeniu dwóch oczywistych możliwości (jak we wcześniejszym rozumowaniu). Natomiast w drugim przypadku kontynuujemy rozumowanie dla sześciu wspólnych znajomych A, B i C.



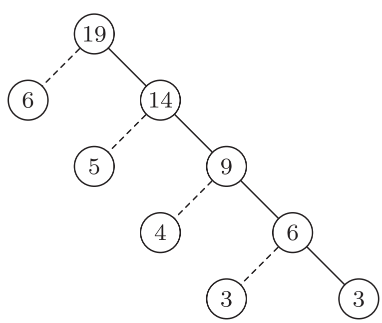
rys. 15

W ten sam sposób dowodzimy, że teza jest prawdziwa, lub wśród wspólnych znajomych A, B i C istnieje taka osoba D, która zna 3 innych wspólnych znajomych osób A, B i C. Wśród wspomnianych 3 wspólnych znajomych A, B, C i D albo pewna para się zna (zatem mamy sześć osób, które się znają), albo żadna para się nie zna, co wskazuje trzy osoby, z których żadne dwie się nie znają.

Jak widzimy, rozważyliśmy wszystkie przypadki, a w każdym z nich teza zadania okazała się prawdziwa.

Wersja trudniejsza ($n = 19$).

Rozumowanie jest analogiczne do przeprowadzonego powyżej (rys. 16). Odnotujemy tylko miejsca, w których dodamy kolejny krok rozumowania.



rys. 16

Posługując się argumentem z łatwiejszej wersji zadania uzyskalibyśmy, że jeśli nie jest prawdą, że A nie zna pewnych 6 osób, to A zna pewne 13 osób (dla $n=21$ zamiast 13 pojawiła się liczba 15). Jednak osoba A była wybrana dowolnie, a gdyby wszystkie osoby znały dokładnie 13 osób, to liczba par znajomych wynosiłaby dokładnie $19\cdot 13/2$. Nie jest to jednak liczbą całkowitą. Istnieje więc osoba, która zna co najmniej 14 innych osób, dla przejrzystości oznaczeń, niech będzie to właśnie osoba A.

Analogicznie sprowadzamy zadanie do przypadku, gdy wśród znajomych osoby A jest taka osoba B, że A i B mają co najmniej 9 wspólnych znajomych. Rozumowanie podobne jak w wersji dla $n=21$ prowadzi nas do sytuacji, w której wśród tych 9 osób istnieje osoba C, która zna co najmniej 5 innych osób.

Zauważmy jednak, że osoba C nie była w tym rozumowaniu w żaden sposób wyróżniona. Gdyby każda ze wspomnianych 9 osób znała dokładnie 5 osób z tej grupy, to liczba par znajomych w tej grupie byłaby równa dokładnie $9\cdot 5/2$, co jednak nie jest liczbą całkowitą. Zatem wśród tych 9 osób istnieje taka osoba, która zna co najmniej 6 innych osób, dla przejrzystości oznaczeń, niech będzie to C.

Dalsze rozumowanie przebiega identycznie jak w wersji łatwiejszej.

Zadanie 16. Rozstrzygnij, czy istnieje wielościan wypukły, który ma dokładnie pięć ścian trójkątnych i dokładnie trzy wierzchołki, w których schodzą się trzy krawędzie.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje wielościan o zadanych własnościach mający k krawędzi. Dla $n\geqslant 3$ przez s_n oznaczmy liczbę ścian n-kątnych tego wielościanu, a przez w_n — liczbę wierzchołków tego wielościanu, w których schodzi się dokładnie n krawędzi. Mamy więc $s_3=5$ oraz $w_3=3$.

Jeżeli policzymy krawędzie każdej ściany i zsumujemy wyniki, otrzymamy dwukrotność liczby krawędzi omawianego wielościanu, gdyż każda krawędź jest bokiem dokładnie dwóch ścian tego wielościanu. To oznacza, że

$$3s_3+4s_4+5s_5+\ldots=2k.$$

Analogicznie, jeżeli policzymy krawędzie schodzące się w każdym wierzchołku i zsumujemy wyniki, uzyskamy $2k$, czyli

$$3w_3+4w_4+5w_5+\ldots=2k.$$

Dodając stronami otrzymane równości, uzyskujemy

$$3(w_3+s_3)+4(w_4+s_4)+5(w_5+s_5)+\ldots=4k.$$

Z drugiej strony, korzystając ze wzoru Eulera $w-k+s=2$, gdzie $w=w_3+w_4+\ldots$ oraz $s=s_3+s_4+\ldots$ to odpowiednio liczby wierzchołków i ścian omawianego wielościanu, otrzymujemy $4k=4(w+s)-8$. W takim razie

$$\begin{aligned}3(w_3+s_3)+4(w_4+s_4)+5(w_5+s_5)+\ldots&=\\ =4(w_3+s_3)+4(w_4+s_4)+4(w_5+s_5)+\ldots-8.&\end{aligned}$$

Przekształcając powyższą zależność oraz korzystając z równości $s_3=5$ i $w_3=3$, otrzymujemy

$$(w_5+s_5)+2(w_6+s_6)+3(w_7+s_7)+\ldots=w_3+s_3-8=0.$$

Liczby $w_5,s_5,w_6,s_6,\ldots$ są nieujemne, więc wszystkie muszą być równe 0. W takim razie z równości $3s_3+4s_4+5s_5+\ldots=2k$ wynika, że $15=2k-4s_4$, co nie jest jednak możliwe, gdyż liczba $2k-4s_4$ jest parzysta, a zatem różna od 15.

Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje wielościan spełniający warunki zadania.

Czwarte zawody indywidualne

Zadanie 17. Dla liczby pierwszej p, na potrzeby tego zadania, liczbę całkowitą n nazwiemy p-*fajną*, jeżeli liczba $(n+1)^p-n^p-1$ jest podzielna przez p^2. Udowodnij, że liczba n jest p-*fajna* wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n+p$ jest p-*fajna*.

Rozwiązanie

Udowodnimy następujący lemat:

Lemat

Dla każdej liczby pierwszej p oraz liczb całkowitych a, b spełniających kongruencję $a\equiv b \pmod p$ zachodzi $a^p\equiv b^p \pmod{p^2}$.

Dowód lematu

Niech a,b będą takimi liczbami całkowitymi, że różnica $a-b$ jest podzielna przez p. Wówczas liczba $k=(a-b)/p$ jest całkowita i zachodzi równość

$$a=b+k\cdot p.$$

Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, otrzymujemy

$$\begin{aligned}a^p=(b+kp)^p&=\binom{p}{0}b^p+\binom{p}{1}b^{p-1}kp+\binom{p}{2}b^{p-2}k^2p^2+\binom{p}{3}b^{p-3}k^3p^3+\\&\quad+\ldots+\binom{p}{p-2}b^2k^{p-2}p^{p-2}+\binom{p}{p-1}bk^{p-1}p^{p-1}+\binom{p}{p}k^pp^p\equiv\\&\equiv\binom{p}{0}b^p+\binom{p}{1}b^{p-1}kp=b^p+pb^{p-1}kp\equiv b^p \pmod{p^2},\end{aligned}$$

co kończy dowód lematu.

Na podstawie lematu otrzymujemy $(n+p)^p\equiv n^p \pmod{p^2}$ oraz

$$(n+1+p)^p\equiv(n+1)^p \pmod{p^2},$$

skąd

$$(n+1)^p-n^p-1\equiv(n+p+1)^p-(n+p)^p-1 \pmod{p^2}. \qquad (1)$$

Teza zadania wynika bezpośrednio z kongruencji (1).

Zadanie 18. Rozstrzygnij, czy istnieją dodatnie liczby całkowite k, m, n spełniające równość

$$(3+\sqrt{7})^k\cdot(4+\sqrt{7})^m=(5+\sqrt{7})^n. \qquad (1)$$

Rozwiązanie

Rozumując analogicznie jak w rozwiązaniu zadania 3, wnioskujemy, że z danej w treści zadania równości wynika, że

$$(3-\sqrt{7})^k\cdot(4-\sqrt{7})^m=(5-\sqrt{7})^n. \qquad (2)$$

Wymnożenie stronami równości (1) i (2) prowadzi kolejno do

$$\begin{aligned}(3-\sqrt{7})^k\cdot(3+\sqrt{7})^k\cdot(4-\sqrt{7})^m\cdot(4+\sqrt{7})^m&=(5-\sqrt{7})^n\cdot(5+\sqrt{7})^n\,,\\ 2^k\cdot 9^m&=18^n\,,\\ 2^k\cdot 3^{2m}&=2^n\cdot 3^{2n}\,. \qquad (3)\end{aligned}$$

Po obu stronach równania (3) występują iloczyny potęg różnych liczb pierwszych. Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że w obu iloczynach występują odpowiednie liczby pierwsze w tych samych potęgach. Porównując wykładniki, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} k=n\\ 2m=2n,\end{cases}$$

skąd $k=n=m$.

Zatem równość (1) może zachodzić tylko w przypadku, gdy $k=m=n$ i przybiera wówczas postać

$$(3+\sqrt{7})^k\cdot(4+\sqrt{7})^k=(5+\sqrt{7})^k.$$

Ponieważ podstawy potęg występujących w powyższej równości są dodatnie, więc równość ta jest równoważna zależności

$$(3+\sqrt{7})\cdot(4+\sqrt{7})=5+\sqrt{7}.$$

Jednak lewa strona tej równości jest większa od 12, a prawa jest mniejsza od $5+3=8$. Otrzymaliśmy sprzeczność.

Odpowiedź

Liczby k, m, n spełniające warunki zadania nie istnieją.

Uwaga

Zmiana jednego znaku w treści zadania zmieniłaby konkluzję rozwiązania, można bowiem sprawdzić, że ma miejsce równość

$$(3+\sqrt{7})\cdot(4-\sqrt{7})=5+\sqrt{7}.$$

Zadanie 19. Dany jest nierównoramienny trójkąt ostrokątny ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie H. Punkty X, Y leżą odpowiednio na odcinkach CA, CB, przy czym czworokąt $CXHY$ jest równoległobokiem. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na symetralnej odcinka XY.

Rozwiązanie

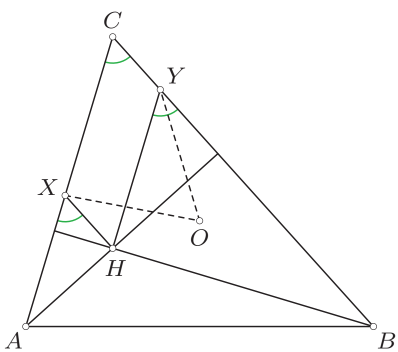
Sposób I

Niech O będzie środkiem okręgu ω opisanego na trójkącie ABC i niech R będzie jego promieniem (rys. 17). Teza zadania $OX = OY$ jest równoważna równości $OX^2 - R^2 = OY^2 - R^2$, czyli równości potęg punktów X i Y względem okręgu ω. Wystarczy więc udowodnić, że $XA \cdot XC = YB \cdot YC$. Ponieważ czworokąt $CXHY$ jest równoległobokiem, więc $XH = YC$ oraz $XC = YH$. Teza zadania jest równoważna równości $XA \cdot YH = XH \cdot YB$.

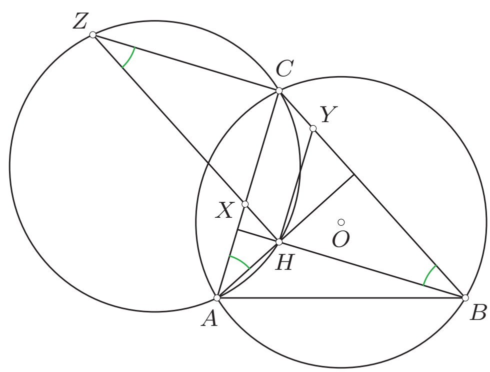
Ponieważ $\sphericalangle AXH = \sphericalangle ACB = \sphericalangle HYB$ oraz $\sphericalangle AHX = 90° = \sphericalangle BHY$, więc trójkąty AHX oraz BHY są podobne. Stąd

$$\frac{XA}{XH} = \frac{YB}{YH},$$

co po wymnożeniu przez mianowniki dowodzi równości, do której została sprowadzona teza.



rys. 17



rys. 18

Sposób II

Podobnie jak w pierwszym rozwiązaniu będziemy wykazywać, że spełniona jest równość $BY \cdot YC = AX \cdot XC$. Obierzmy punkt Z tak, że czworokąt $ZCBH$ jest równoległobokiem (rys. 18).

Wówczas $\sphericalangle HZC = \sphericalangle CBH = 90° - \sphericalangle ACB = \sphericalangle HAC$, zatem skoro punkty A i Z leżą po jednej stronie prostej HC, to na czworokącie $ZCHA$ można opisać okrąg.

Zauważmy teraz, że $ZX = ZH - XH = BC - YC = BY$. Wobec tego

$$BY \cdot YC = ZX \cdot XH = AX \cdot XC.$$

Sposób III

Niech punkt P będzie punktem symetrycznym do punktu H względem prostej BC. W myśl znanego twierdzenia punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Zachodzą równości odcinków: $OP = OC$ oraz $PY = HY = XC$.

Wykażemy, że $\sphericalangle YPO = \sphericalangle XCO$. Na mocy cechy przystawania trójkątów bok–kąt–bok otrzymamy przystawanie $\triangle YPO \equiv \triangle XCO$, a stąd tezę zadania.

Ponieważ trójkąty OCA i OPA są równoramienne, więc zachodzą równości $\sphericalangle OCX = \sphericalangle OAC$ oraz $\sphericalangle OPA = \sphericalangle OAP$. Ponieważ $YP = YH$ oraz $YH \| AC$, więc $\sphericalangle YPH = \sphericalangle YHP = \sphericalangle CAP$.

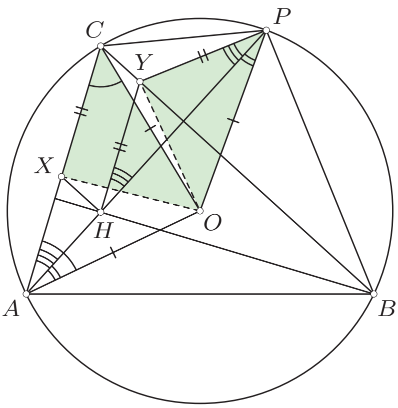
Jeżeli $AC < AB$ (rys. 19), to

$$\sphericalangle YPO = \sphericalangle YPH + \sphericalangle OPA = \sphericalangle CAP + \sphericalangle OAP = \sphericalangle OAC = \sphericalangle XCO.$$

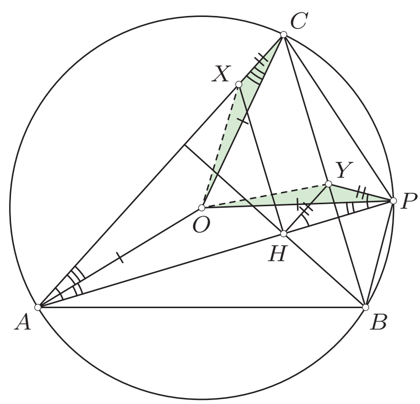
Jeżeli natomiast $AC > AB$ (rys. 20), to

$$\sphericalangle YPO = \sphericalangle YPH - \sphericalangle OPA = \sphericalangle CAP - \sphericalangle OAP = \sphericalangle OAC = \sphericalangle XCO.$$

Uzyskana równość kończy rozwiązanie zadania.



rys. 19



rys. 20

Zadanie 20. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 2^{2014} można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok 3 lub 5.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że taki podział nie jest możliwy. W tym celu w odpowiedni sposób pokolorujemy duży kwadrat, przy czym kolorowanie będzie okresowe w pionie i poziomie z okresem 15. Ponieważ

$$2^{2014} = 2^{2012} \cdot 2^2 = 16^{503} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{15},$$

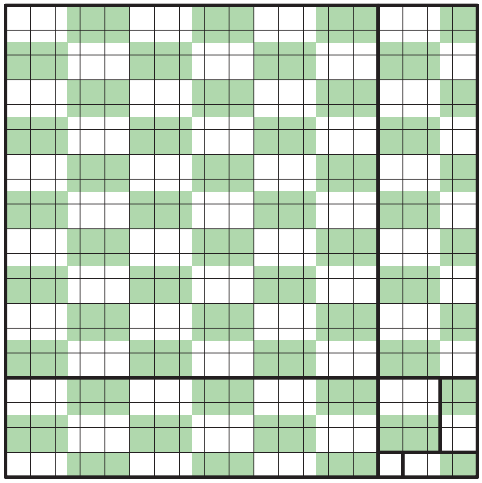
więc sposób kolorowania przedstawimy na przykładzie kwadratu o boku 19.

Sposób I

Pokolorujmy dany kwadrat w szachownicę jak na rysunku 21. Wówczas każdy kwadrat o boku 3 lub 5 umieszczony w dużym kwadracie tak, aby pokrywał odpowiednio 9 lub 25 kwadratów jednostkowych, pokrywa tyle samo pola kolorowego, co białego.

Tymczasem kwadratowe naroże 4×4 w prawym dolnym rogu ma pole białe o powierzchni o 1 większej od pola kolorowego, a pozostała część dużego kwadratu ma tyle samo pola białego, co kolorowego.

Zatem dany w zadaniu kwadrat, jako zawierający więcej pola białego niż kolorowego, nie może być podzielony na kwadraty 3×3 i 5×5.



rys. 21

Sposób II

Podzielmy kwadrat o boku 2^{2014} na kwadraty jednostkowe (zwane dalej polami) i wpiszmy w te pola liczby jak na rysunku 22.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

rys. 22

Wówczas każdy kwadrat o boku 3 pokrywający 9 pól pokrywa pola o sumie liczb równej 0. Z kolei każdy kwadrat o boku 5 pokrywający 25 pól pokrywa pola o sumie podzielnej przez 5. Zatem każda figura, którą można pokryć kwadratami o boku 3 lub 5, ma sumę liczb wpisanych w jej pola podzielną przez 5.

Tymczasem suma liczb wpisanych w dany w zadaniu kwadrat jest równa sumie jedynek wpisanych w dolny wiersz — jest więc równa 2^{2014} i w związku z tym nie jest podzielna przez 5. To oznacza, że tego kwadratu nie można podzielić na kwadraty 3×3 i 5×5.

Sposób III

Podzielmy kwadrat o boku 2^{2014} na kwadraty jednostkowe (zwane dalej polami) i wpiszmy w te pola liczby jak na rysunku 23.

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

rys. 23

Wówczas każdy kwadrat o boku 5 pokrywający 25 pól pokrywa pola o sumie liczb równej 0. Z kolei każdy kwadrat o boku 3 pokrywający 9 pól pokrywa pola o sumie podzielnej przez 3. Zatem każda figura, którą można pokryć kwadratami o boku 3 lub 5, ma sumę liczb wpisanych w jej pola podzielną przez 3.

Tymczasem suma liczb wpisanych w dany w zadaniu kwadrat jest równa sumie jedynek wpisanych w dolny wiersz — jest więc równa 2^{2014} i w związku z tym nie jest podzielna przez 3. To oznacza, że tego kwadratu nie można podzielić na kwadraty 3×3 i 5×5.

Zadanie 21. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 2^{2014} można podzielić na kwadraty, z których każdy ma bok 3, 5 lub 7.

Rozwiązanie

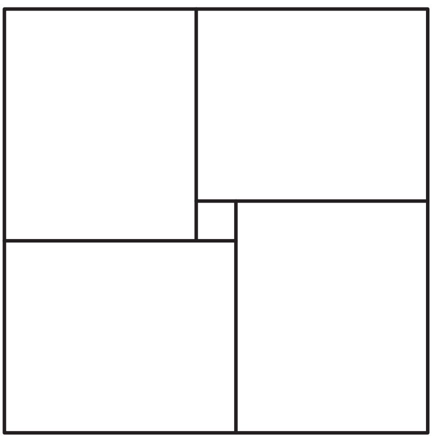
Zauważmy, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych p, q, z kwadratów o boku p można złożyć prostokąt o wymiarach $pq \times p$, a z kwadratów o boku q można złożyć prostokąt o wymiarach $pq \times q$. Z kolei z tych prostokątów można złożyć prostokąt o wymiarach $pq \times (ap+bq)$, dla dowolnych nieujemnych liczb całkowitych a, b.

Wykorzystując powyższą uwagę, skonstruujemy podział kwadratu o boku 64 na kwadraty rozmiaru 3×3, 5×5 i 7×7. Ponieważ dany w zadaniu kwadrat w oczywisty sposób można podzielić na kwadraty o boku 64, będzie stąd wynikała możliwość dokonania podziału wymaganego w treści zadania.

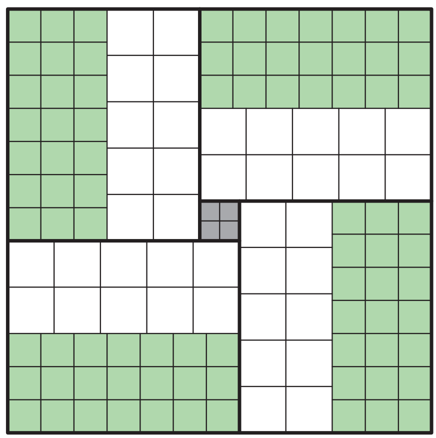
Sposób I

Podzielmy kwadrat o boku 64 na cztery prostokąty 35×29 i jeden kwadrat 6×6 jak na rysunku 24.

Dzieląc prostokąty 35×29 na kwadraty 5×5 i 7×7, a kwadrat 6×6 na kwadraty 3×3, otrzymamy zapowiedziany podział kwadratu 64×64, przedstawiony na rysunku 25. Tym samym wskazaliśmy zgodny z warunkami zadania sposób podziału kwadratu o boku 2^{2014}.



rys. 24

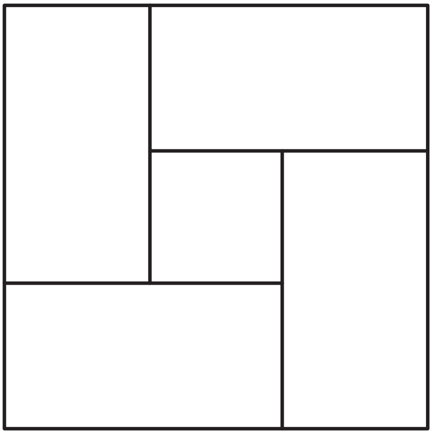


rys. 25

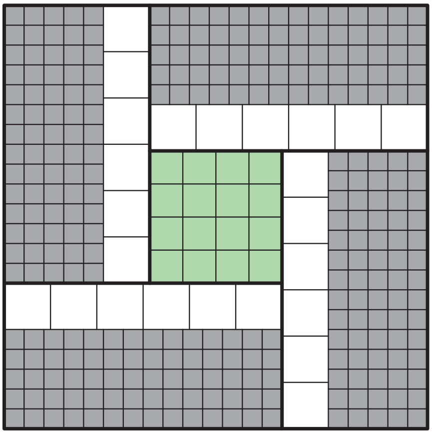
Sposób II

Podzielmy kwadrat o boku 64 na cztery prostokąty 42×22 i jeden kwadrat 20×20 jak na rysunku 26.

Dzieląc prostokąty 42×22 na kwadraty 3×3 i 7×7, a kwadrat 20×20 na kwadraty 5×5 otrzymamy zapowiedziany podział kwadratu 64×64, przedstawiony na rysunku 27. Tym samym wskazaliśmy zgodny z warunkami zadania sposób podziału kwadratu o boku 2^{2014}.



rys. 26



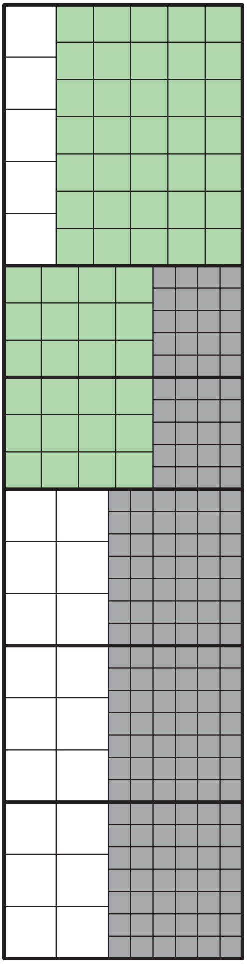
rys. 27

Sposób III

Tym razem konstruujemy podział prostokąta o wymiarach 32×128.

W tym celu zauważamy, że taki prostokąt daje się złożyć z prostokąta 32×35, dwóch prostokątów 32×15 i trzech prostokątów 32×21.

Powstały w ten sposób podział przedstawiony jest na rysunku 28.



rys. 28

Mecz matematyczny

Zadanie 22. Niech $a_n = [n\cdot\sqrt{2}]$ dla $n=1,2,3,\ldots$ oraz niech (b_n) będzie rosnącym ciągiem złożonym ze wszystkich dodatnich liczb całkowitych niewystępujących w ciągu (a_n). Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczby a_n i b_n są tej samej parzystości.

Uwaga: Symbolem $[x]$ oznaczamy największą liczbę całkowitą, która nie jest większa od liczby x.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego lematu.

Lemat

Niech α, β będą dodatnimi liczbami niewymiernymi spełniającymi warunek

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1.$$

Wówczas ciągi (a_n) oraz (b_n) określone wzorami

$$a_n=[\alpha\cdot n], \qquad b_n=[\beta\cdot n]$$

są rosnącymi ciągami o wyrazach całkowitych dodatnich oraz każda dodatnia liczba całkowita występuje w dokładnie jednym z tych ciągów.

Dowód lematu

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k wyznaczmy łączną liczbę wyrazów ciągów (a_n) i (b_n) mniejszych od k.

Warunek $a_n<k$ jest równoważny warunkowi $[\alpha\cdot n]<k$, a to jest równoważne nierówności $\alpha\cdot n<k$, czyli

$$n<\frac{k}{\alpha}, \quad \text{lub równoważnie} \quad n\leqslant\left[\frac{k}{\alpha}\right].$$

Zatem w ciągu (a_n) występuje $\left[\frac{k}{\alpha}\right]$ wyrazów mniejszych od k i analogicznie w ciągu (b_n) występuje $\left[\frac{k}{\beta}\right]$ wyrazów mniejszych od k.

Zatem dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k, w obu ciągach występuje $\left[\frac{k}{\alpha}\right]+\left[\frac{k}{\beta}\right]$ wyrazów mniejszych od k. Ponieważ dla dowolnej liczby niewymiernej x zachodzą nierówności $x-1<[x]<x$, otrzymujemy

$$k-2=\frac{k}{\alpha}-1+\frac{k}{\beta}-1<\left[\frac{k}{\alpha}\right]+\left[\frac{k}{\beta}\right]<\frac{k}{\alpha}+\frac{k}{\beta}=k.$$

Liczba $\left[\frac{k}{\alpha}\right]+\left[\frac{k}{\beta}\right]$ jest całkowita, więc uzyskujemy

$$\left[\frac{k}{\alpha}\right]+\left[\frac{k}{\beta}\right]=k-1.$$

Wykazaliśmy więc, że w ciągach (a_n) i (b_n) występuje $k-1$ wyrazów mniejszych od k. Analogicznie dowodzimy, że w ciągach (a_n) i (b_n) występuje k wyrazów mniejszych od $k+1$. Wobec tego dokładnie jeden wyraz jest równy k, co kończy dowód lematu.

Przystępując do rozwiązania zadania, przyjmijmy $\alpha=\sqrt{2}$ oraz $\beta=2+\sqrt{2}$. Wówczas

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=1,$$

więc możemy skorzystać z lematu.

Zauważmy, że ciąg (a_n) zdefiniowany w treści zadania jest identyczny z ciągiem (a_n) zdefiniowanym w lemacie. W konsekwencji także ciąg (b_n) zdefiniowany w treści zadania jest identyczny z ciągiem (b_n) zdefiniowanym w lemacie, skąd

$$b_n=\left[n\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)\right].$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dowolnej liczby całkowitej k zachodzi równość

$$[x+k]=[x]+k.$$

Zatem dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwa jest zależność

$$b_n=a_n+2n.$$

Teza zadania wynika bezpośrednio z powyższej równości.

Zadanie 23. Punkt P wybrano na podstawie AB ostrokątnego trójkąta równoramiennego ABC. Punkty E i D są symetryczne do punktu P odpowiednio względem prostych AC i BC. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie Q. Udowodnij, że prosta PQ przechodzi przez pewien punkt niezależny od wyboru punktu P.

Rozwiązanie

Sposób I

Niech S będzie takim punktem, że $\sphericalangle SAB=\sphericalangle SBA=\sphericalangle ACB$ oraz punkty C i S leżą po tej samej stronie prostej AB (rys. 29). Udowodnimy, że punkt S należy do prostej PQ niezależnie od położenia punktu P.

Punkt przecięcia prostych AS i BE oznaczmy przez K, a punkt przecięcia prostych BS i AD oznaczmy przez L. Zauważmy, że

$$\sphericalangle EAS=\sphericalangle EAB-\sphericalangle SAB=2\sphericalangle BAC-\sphericalangle ACB=180^\circ-2\sphericalangle ACB=\sphericalangle ASB.$$

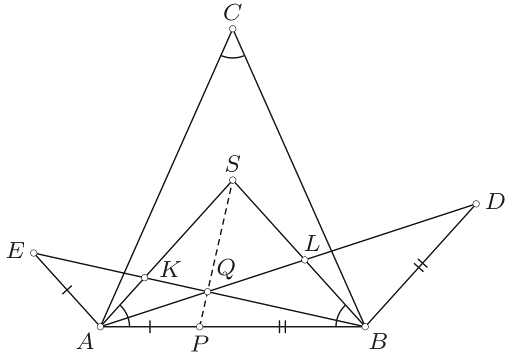
Analogicznie $\sphericalangle DBS=\sphericalangle BSA$. Na mocy cechy kąt–kąt, AEK i SBK oraz BDL i SAL to pary trójkątów podobnych. Stąd wynika, że

$$\frac{SK}{AK}=\frac{SB}{AE} \quad \text{oraz} \quad \frac{BL}{SL}=\frac{BD}{SA}.$$

Mnożąc powyższe równości stronami oraz korzystając z tego, że $SA=SB$, $AE=AP$, $BD=BP$, uzyskujemy

$$\frac{SK}{AK}\cdot\frac{BL}{SL}=\frac{BP}{AP},\quad \text{czyli}\quad \frac{SK}{KA}\cdot\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BL}{LS}=1.$$

Na mocy twierdzenia Cevy zastosowanego do trójkąta ABS, z ostatniego związku wynika, że proste AL, BK, SP przecinają się w jednym punkcie. To oznacza, że punkt S leży na prostej PQ.



rys. 29

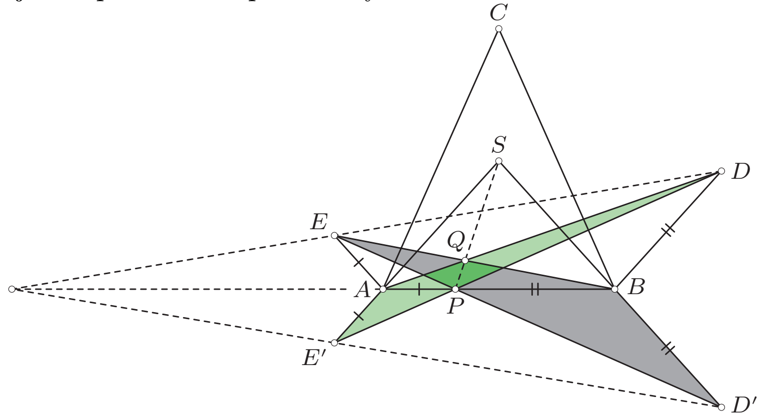
Sposób II

Punkt S określamy tak, jak w poprzednim sposobie. Udowodnimy, że punkty P, Q, S leżą na jednej prostej.

Niech D' i E' będą punktami symetrycznymi odpowiednio do D i E względem prostej AB (rys. 30). Zauważmy, że

$$\measuredangle E'AB+\measuredangle BAS=\measuredangle EAB+\measuredangle ACB=2\measuredangle BAC+\measuredangle ACB=180^\circ,$$

skąd wynika, że punkty E', A, S leżą na jednej prostej. Analogicznie uzasadniamy, że punkty D', B, S leżą na jednej prostej. Ponadto z równości $\measuredangle APE'=\measuredangle APE=\measuredangle BPD=\measuredangle BPD'$ wynika, że E', P, D oraz D', P, E również są trójkami punktów współliniowych.



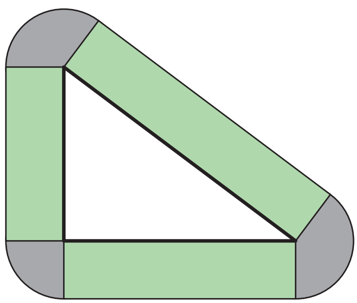
rys. 30

Zauważmy, że proste DE, $D'E'$, AB przecinają się w jednym punkcie, gdyż proste DE i $D'E'$ są symetryczne względem prostej AB. W takim razie z twierdzenia Desargues'a dla trójkątów ADE' i BED' wynika, że punkty $P = DE' \cap ED'$, $Q = AD \cap BE$, $S = AE' \cap BD'$ leżą na jednej prostej.

Zadanie 24. W kwadracie o boku 48 umieszczono 100 trójkątów (niekoniecznie rozłącznych) o sumie pól równej 600 i sumie obwodów równej 1200. Udowodnij, że w danym kwadracie można umieścić koło o promieniu 1, którego wnętrze jest rozłączne z wnętrzami tych trójkątów.

Rozwiązanie

Dla dowolnego trójkąta rozważmy zbiór wszystkich punktów płaszczyzny odległych od co najmniej jednego punktu tego trójkąta o mniej niż 1 (nazwijmy go *otoczeniem* trójkąta). Jednocześnie jest to zbiór wszystkich takich punktów O, że wnętrze koła o środku O i promieniu 1 ma punkty wspólne z danym trójkątem. Zbiór ten, dla trójkąta o polu P i bokach długości a, b, c, jest sumą tegoż trójkąta (na rysunku 31 zaznaczony kolorem białym), trzech prostokątów o wymiarach $1 \times a$, $1 \times b$, $1 \times c$ (kolor) oraz trzech wycinków koła o promieniu 1 (kolor szary), składających się łącznie na całe koło. Pole takiej figury jest równe $P + p + \pi$, gdzie $p = a + b + c$ jest obwodem rozpatrywanego trójkąta.



rys. 31

Rozważmy teraz otoczenia wszystkich trójkątów umieszczonych w danym kwadracie o boku 48. Suma ich pól jest równa

$$S = \Sigma(P) + \Sigma(p) + N\pi,$$

gdzie N jest liczbą trójkątów, $\Sigma(P)$ sumą ich pól, a $\Sigma(p)$ sumą ich obwodów. Podstawiając dane występujące w treści zadania, otrzymujemy

$$S = 600 + 1200 + 100\pi = 1800 + 100\pi < 1800 + 100 \cdot 3{,}15 = 2115.$$

Zauważmy, że punkty wewnętrzne danego kwadratu odległe o więcej niż 1 od jego brzegu, tworzą kwadrat K o boku 46. Pole tego kwadratu jest równe $46^2 = 2116$, a więc jest większe od sumy pól otoczeń trójkątów. Zatem istnieje punkt wewnątrz kwadratu K nienależący do żadnego z otoczeń trójkątów. Koło o środku w tym punkcie i promieniu 1 spełnia warunki zadania.

Zadanie 25. Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{99}$ spełniają warunek
$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_{99})=100.$$
Wykaż, że
$$(1+a_1^2)(1+2a_2^2)(1+3a_3^2)\ldots(1+99a_{99}^2)\geqslant 100.$$

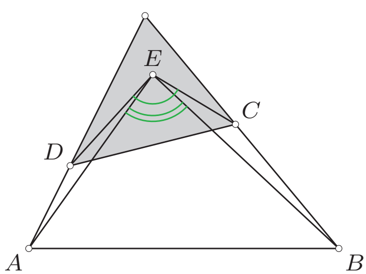
Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw, że dla $k=1,2,\ldots,99$ zachodzi nierówność
$$1+ka_k^2 \geqslant \frac{k}{k+1}(1+a_k)^2. \qquad (1)$$
Przekształcamy tę nierówność równoważnie, uzyskując kolejno
$$(k+1)(1+ka_k^2)\geqslant k(1+2a_k+a_k^2),$$
$$k+1+k^2a_k^2+ka_k^2\geqslant k+2a_kk+ka_k^2,$$
$$(ka_k)^2-2a_kk+1\geqslant 0,$$
$$(ka_k-1)^2\geqslant 0.$$
Ostatnia nierówność jest oczywiście spełniona, więc dowód jest zakończony. Mnożąc stronami nierówności (1) dla $k=1,2,\ldots,99$ oraz korzystając z warunku danego w treści zadania, otrzymujemy
$$\begin{aligned}&(1+a_1^2)(1+2a_2^2)(1+3a_3^2)\ldots(1+99a_{99}^2)\geqslant\\ &\geqslant \frac{1}{2}(1+a_1)^2\cdot\frac{2}{3}(1+a_2)^2\cdot\frac{3}{4}(1+a_3)^2\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}(1+a_{99})^2=\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\Big((1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_{99})\Big)^2=\\ &=\frac{1}{100}\cdot 100^2=100.\end{aligned}$$

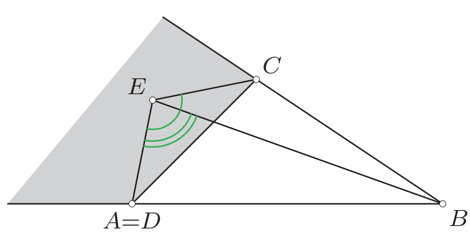
Zadanie 26. Rozstrzygnij, czy istnieje taki wielokąt wypukły, że każda jego przekątna ma taką samą długość jak pewnien jego bok oraz każdy bok wielokąta ma taką samą długość jak pewna jego przekątna.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że taki wielokąt istnieje. Niech odcinek AB będzie najdłuższym bokiem tego wielokąta, a odcinek CD jego najkrótszą przekątną, przy czym punkty są nazwane w taki sposób, że AC i BD są przekątnymi czworokąta $ABCD$ (rys. 32). Może się zdarzyć, że $A=D$ (rys. 33).



rys. 32



rys. 33

Ponieważ rozważany wielokąt jest wypukły oraz CD jest jego przekątną, więc istnieje wierzchołek tego wielokąta E zawarty w zaznaczonym obszarze.

Z wyboru odcinków AB i CD wynika, że AB jest najdłuższym bokiem trójkąta ABE, więc $\sphericalangle AEB \geqslant 60°$ oraz CD jest najkrótszym bokiem trójkąta CDE, zatem $\sphericalangle DEC \leqslant 60°$. Zatem

$$60° \leqslant \sphericalangle AEB < \sphericalangle DEC \leqslant 60°,$$

co jest sprzecznością. Zatem nie istnieje wielokąt spełniający warunki zadania.

Zadanie 27. Interesują nas takie liczby naturalne, które mają dokładnie jedno przedstawienie w postaci $ab+2a+3b$, gdzie a, b są dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że takich liczb jest nieskończenie wiele.

Rozwiązanie

Niech n będzie liczbą naturalną, dla której szukamy wszystkich przedstawień spełniających warunki zadania, czyli rozwiązań równania

$$ab + 2a + 3b = n \tag{1}$$

w dodatnich liczbach całkowitych a, b. Przekształcanie równania (1) prowadzi kolejno do:

$$ab + 2a + 3b + 6 = n + 6,$$

$$(a+3)(b+2) = n + 6. \tag{2}$$

Podstawiając $s = a+3$, $t = b+2$, otrzymujemy równanie (2) w postaci

$$st = n + 6$$

z dodatkowymi warunkami

$$s \geqslant 4, \quad t \geqslant 3. \tag{3}$$

Wobec tego zadanie sprowadza się do wykazania, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych mających jednoznaczne przedstawienie w postaci iloczynu st, którego czynniki spełniają warunki (3).

Udowodnimy to na dwa sposoby, wskazując odpowiednie nieskończone rodziny liczb spełniających warunki zadania.

Sposób I

Jeżeli $s = t = p$, gdzie $p \geqslant 5$ jest liczbą pierwszą, to liczba $n+6 = p^2$ ma natępujące 3 rozkłady na iloczyn dwóch dodatnich liczb całkowitych:

$$n + 6 = 1 \cdot p^2 = p \cdot p = p^2 \cdot 1,$$

ale tylko w drugim rozkładzie czynniki spełniają nierówności wynikające z (3).

Odpowiedź

Warunki zadania są spełnione przez liczby $p^2 - 6$, gdzie $p \geqslant 5$ jest liczbą pierwszą.

Sposób II

Jeżeli $s=t=3p$, gdzie $p\geqslant 5$ jest liczbą pierwszą, to liczba $n+6=3p$ ma natępujące 4 rozkłady na iloczyn dwóch dodatnich liczb całkowitych:

$$n+6=1\cdot 3p=3\cdot p=p\cdot 3=3p\cdot 1,$$

ale tylko w trzecim rozkładzie czynniki spełniają nierówności wynikające z warunku (3).

Odpowiedź

Warunki zadania są spełnione przez liczby $3p-6$, gdzie $p\geqslant 5$ jest liczbą pierwszą.

Zadanie 28. Udowodnij, że spośród dowolnych 64 wierzchołków 2015-kąta foremnego można wybrać cztery, które są wierzchołkami trapezu.

Rozwiązanie

Ponumerujmy kolejno wierzchołki danego 2015-kąta foremnego liczbami naturalnymi od 1 do 2015.

Rozpatrzmy zbiór numerów dowolnie wybranych 64 wierzchołków. Wówczas liczba nieuporządkowanych par różnych numerów z tego zbioru jest równa

$$\binom{64}{2}=\frac{64\cdot 63}{2}=2^5\cdot(2^6-1)=2^{11}-2^5=2048-32=2016.$$

Każdej parze numerów przyporządkujemy resztę z dzielenia ich sumy przez 2015. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że pewne dwie pary liczb, powiedzmy (a, b) i (c, d), mają przyporządkowaną tę samą resztę, czyli zachodzi przystawanie

$$a+b\equiv c+d \pmod{2015}.$$

Wobec tego prosta przechodząca przez wierzchołki o numerach a i b jest równoległa do prostej przechodzącej przez wierzchołki o numerach c i d. Zatem wierzchołki o numerach a, b, c i d są wierzchołkami trapezu.

Zadanie 29. Okrąg ω jest opisany na trójkącie ABC. Okrąg o jest styczny do odcinków AC i BC odpowiednio w punktach K i L oraz styczny wewnętrznie do okręgu ω. Okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu ω oraz zewnętrznie do okręgu o odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że istnieje prosta styczna do okręgów o, o_1, o_2.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez P i Q punkty styczności okręgu ω odpowiednio z okręgami o i o_1. Przez R oznaczmy drugi punkt przecięcia okręgu o_1 z prostą CQ, a przez S drugi punkt przecięcia okręgu o z prostą CP (rys. 34). Niech p oznacza prostą styczną do okręgu ω w punkcie P. Udowodnimy, że prosta SR jest styczna do okręgów o i o_1. Oznaczmy przez Y dowolny punkt na prostej p, leżący po tej samej stronie prostej CP co punkt R. Z własności potęgi punktu C względem okręgów o i o_1 wynika, że $CR\cdot CQ=CK^2=CP\cdot CS$.

Wobec tego na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg, a co za tym idzie $\sphericalangle PSR = 180° - \sphericalangle PQR$.

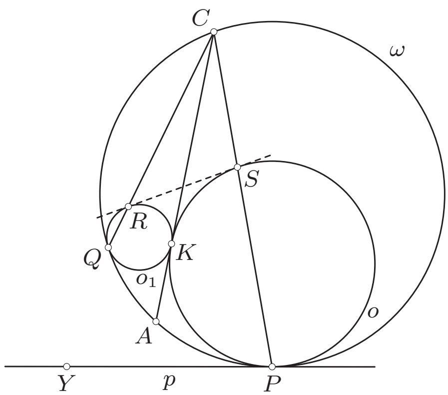
Na mocy twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą otrzymujemy

$$\sphericalangle CPY = 180° - \sphericalangle PQC.$$

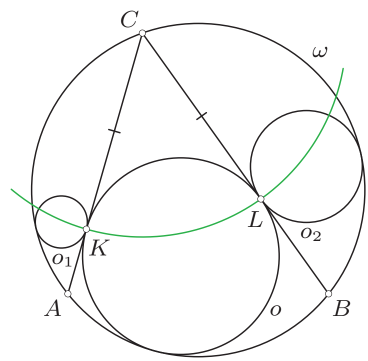
Z ostatnich dwóch równości wynika, że

$$\sphericalangle SPY = \sphericalangle CPY = 180° - \sphericalangle PQC = 180° - \sphericalangle PQR = \sphericalangle PSR.$$

Wobec tego proste p i SR są symetryczne względem symetralnej odcinka PS. Okrąg o także jest symetryczny względem symetralnej odcinka PS. Skoro prosta p jest styczna do okręgu o, to prosta SR także jest do niego styczna. Analogicznie można udowodnić, że prosta SR jest styczna do okręgu o_1 w punkcie R. Wobec tego prosta styczna do okręgu o w punkcie S jest styczna do okręgu o_1. Analogicznie dowodzimy, że prosta ta jest styczna do okręgu o_2, co kończy dowód.



rys. 34



rys. 35

Sposób II

Zauważmy, że $CK = CL$ jako odcinki stycznych do okręgu o poprowadzonych z punktu C. Rozważmy inwersję względem okręgu o środku C i promieniu CK (rys. 35).

Ponieważ okręgi o, o_1, o_2 są prostopadłe do okręgu inwersji, więc każdy z nich zachowuje swoje położenie. Z kolei okrąg ω, jako przechodzący przez środek inwersji, przechodzi na prostą. Prosta ta, w myśl warunków zadania, jest styczna do każdego z okręgów o, o_1, o_2.

Zadanie 30. Rozstrzygnij, czy równanie $a^2 + b^2 = 5^{2014}$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych a, b niepodzielnych przez 5.

Rozwiązanie

Określmy liczby a_n oraz b_n wzorami

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n - b_n, \quad b_{n+1} = 2b_n + a_n. \tag{1}$$

Udowodnimy następujący lemat:

Lemat

Dla każdej liczby naturalnej n liczby a_n, b_n są niepodzielne przez 5, a ponadto zachodzi równość

$$a_n^2 + b_n^2 = 5^n \tag{2}$$

oraz kongruencja

$$a_n \equiv 2b_n \pmod 5. \tag{3}$$

Dowód lematu

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n=1$ lemat jest prawdziwy.

2° Załóżmy, że n jest taką liczbą naturalną, że zachodzą (2) i (3), a przy tym liczby a_n, b_n są niepodzielne przez 5. Wykażemy, że wówczas

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = 5^{n+1} \tag{4}$$

oraz

$$a_{n+1} \equiv 2b_{n+1} \pmod 5, \tag{5}$$

a ponadto liczby a_{n+1}, b_{n+1} są niepodzielne przez 5.

Wychodząc od lewej strony równości (4) i korzystając ze wzorów rekurencyjnych (1), otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 &= (2a_n - b_n)^2 + (2b_n + a_n)^2 = \\ &= 4a_n^2 - 4a_nb_n + b_n^2 + 4b_n^2 + 4a_nb_n + a_n^2 = \\ &= 5 \cdot (a_n^2 + b_n^2) = 5 \cdot 5^n = 5^{n+1}, \end{aligned}$$

co dowodzi równości (4).

Ponadto z kongruencji

$$a_{n+1} = 2a_n - b_n \equiv 4b_n - b_n = 3b_n \pmod 5$$

oraz

$$b_{n+1} = 2b_n + a_n \equiv 2b_n + 2b_n = 4b_n \pmod 5$$

wynika niepodzielność liczb a_{n+1}, b_{n+1} przez 5 oraz prawdziwość kongruencji (5).

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej lemat jest prawdziwy dla każdej liczby naturalnej n.

Odpowiedź

Dane równanie ma rozwiązanie spełniające warunki zadania, a mianowicie $a = a_{2014}$ i $b = b_{2014}$, gdzie liczby a_n i b_n są zdefiniowane rekurencyjnie wzorami (1).

Uwaga

Wzory (1) wynikają z następującej konstrukcji liczb a_n i b_n, używającej liczb zespolonych: $a_n + b_n \cdot i = (2+i)^n$.

Zadanie 31. Rozstrzygnij, czy równanie $a^3+b^3+c^3=5^{2014}$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych a, b, c.

Rozwiązanie

Z tożsamości $(3k)^3=9\cdot 3k^3$ oraz
$$(3k\pm 1)^3=9\cdot(3k^3\pm 3k^2+k)\pm 1$$
wynika, że sześcian dowolnej liczby całkowitej przy dzieleniu przez 9 może dawać tylko jedną z następujących trzech reszt: 0, 1, 8. W konsekwencji suma trzech sześcianów może dawać przy dzieleniu przez 9 jedną z reszt: 0, 1, 2, 3, 6, 7, 8. Zatem każda liczba całkowita, która przy dzieleniu przez 9 daje resztę 4 lub 5, nie jest sumą trzech sześcianów.

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że
$$5^{2014}=5^{2013}\cdot 5=125^{671}\cdot 5\equiv(-1)^{671}\cdot 5=-5\equiv 4 \pmod 9.$$

Odpowiedź

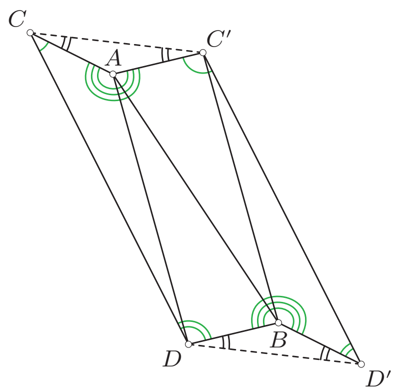
Dane w zadaniu równanie nie ma rozwiązań.

Zadanie 32. Czworościan $ABCD$ ma tę własność, że suma kątów płaskich przy wierzchołku A jest równa sumie kątów płaskich przy wierzchołku B, a suma kątów płaskich przy wierzchołku C jest równa sumie kątów płaskich przy wierzchołku D. Udowodnij, że $AC=BD$.

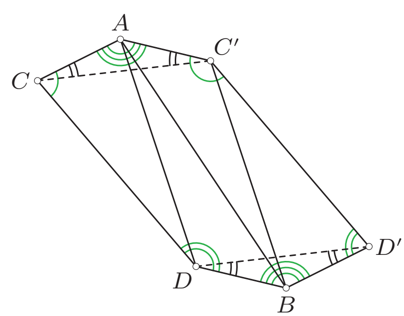
Rozwiązanie

Sposób I

Rozważmy siatki czworościanu $ABCD$ przedstawione na rysunkach 36 oraz 37.



rys. 36



rys. 37

Ponieważ suma kątów płaskich przy wierzchołku A jest równa sumie kątów płaskich przy wierzchołku B, więc $\sphericalangle CAC'=\sphericalangle DBD'$ i skoro $AC=AC'$ oraz $BD=BD'$, to $\sphericalangle ACC'=\sphericalangle C'CA=\sphericalangle BDD'=\sphericalangle DD'B$.

Z równości sum kątów płaskich przy wierzchołkach C i D wnioskujemy, że $\sphericalangle DCA+\sphericalangle AC'D'=\sphericalangle C'D'B+\sphericalangle BDC$. Rozważając teraz czworokąt $CC'D'D$ i uwzględniając powyższe równości wnioskujemy, że
$$\sphericalangle DCC'+\sphericalangle CC'D'=\sphericalangle C'D'D+\sphericalangle D'DC.$$

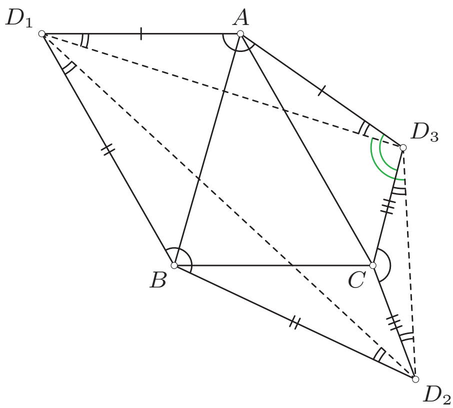
Ponieważ jednocześnie $\sphericalangle DCC' + \sphericalangle CC'D' + \sphericalangle C'D'D + \sphericalangle D'DC = 360°$, więc $\sphericalangle DCC' + \sphericalangle C'CD = 180°$. Stąd wynika, że $DC \| C'D'$. Ponieważ także $CD = C'D'$, więc czworokąt $CC'D'D$ jest równoległobokiem. Stąd otrzymujemy $CC' = DD'$. Dodatkowo trójkąty ACC' i BDD' mają odpowiednie kąty równe, więc są podobne, a wobec ostatniej równości, są przystające. Zatem $AC = BD$.

Sposób II

Oznaczmy przez S_X sumę kątów płaskich przy wierzchołku X.

Z warunków zadania otrzymujemy równości $S_A = S_B$ oraz $S_C = S_D$. Ponadto $S_A + S_B + S_C + S_D = 4 \cdot 180° = 720°$. Stąd otrzymujemy, że $S_A + S_C = 360°$.

Przypuśćmy, że $S_A < 180°$. Rozłóżmy siatkę ostrosłupa jak na rysunku. Wówczas $AD_1 = AD_3$, $BD_1 = BD_2$, $CD_2 = CD_3$ i skoro kąty wypukłe $\sphericalangle D_1AD_3$, $\sphericalangle D_2BD_1$ oraz $\sphericalangle D_2CD_3$ są równe, to trójkąty równoramienne D_1AD_3, D_2BD_1 i D_2CD_3 są podobne.



rys. 38

Stąd wynika, że $\sphericalangle AD_3D_1 = \sphericalangle CD_3D_2$, zatem $\sphericalangle AD_3C = \sphericalangle D_1D_3D_2$. Z podobieństwa trójkątów $\triangle D_1AD_3 \sim \triangle D_2CD_3$ mamy równość

$$\frac{AD_3}{CD_3} = \frac{D_1D_3}{D_2D_3}.$$

Na mocy cechy podobieństwa trójkątów bok–kąt–bok dostajemy podobieństwo trójkątów $\triangle AD_3C \sim \triangle D_1D_3D_2$. Zatem

$$\frac{AC}{D_1D_2} = \frac{AD_3}{D_1D_3} = \frac{BD_1}{D_1D_2},$$

gdzie pierwsza równość wynika z podobieństwa $\triangle AD_3C \sim \triangle D_1D_3D_2$, a druga z podobieństwa $\triangle D_1AD_3 \sim \triangle D_2BD_1$. Zatem $AC = BD$.

Jeśli $S_A > 180°$, to $S_C < 180°$ i dowód przeprowadzamy analogicznie. Jeśli $S_A = 180°$, to $S_C = 180°$ i po rozłożeniu siatki ujrzymy trójkąt $D_1D_3D_2$, którego środkami boków są punkty A, B i C. W tym przypadku teza zadania jest spełniona.

Regulamin meczu matematycznego

Ustalenia wstępne

1. W meczu biorą udział dwie drużyny. Każda z drużyn wybiera ze swojego grona Kapitana.

2. W pierwszej fazie meczu obie drużyny rozwiązują 11 zadań dostarczonych przez Jury i przygotowują się do zreferowania rozwiązań przy tablicy. Drugą fazą meczu jest rozgrywka.

Rozgrywka

3. Ekipy na przemian wywołują drużynę przeciwną do zreferowania przy tablicy rozwiązania jednego z niewybranych dotąd zadań. Numer zadania jest wybierany przez drużynę wywołującą. Wywoływanie rozpoczyna drużyna wylosowana tuż przed rozgrywką.

4. Drużyna wywołana do rozwiązania zadania deklaruje, czy przyjmuje zadanie. Dalszy przebieg rozgrywki zależy od decyzji drużyny wywołanej.

Jeśli drużyna wywołana przyjmuje zadanie...

5. Drużyna wywołana staje się drużyną referującą.

6. Zawodnika drużyny referującej, który przedstawia rozwiązanie przy tablicy, wyznacza Kapitan drużyny przeciwnej.

7. Zawodnik może być wyznaczony jedynie wtedy, gdy każdy zawodnik z jego drużyny zakończył referowanie zadania nie mniej razy niż on. Nie można wyznaczyć zawodnika po raz drugi do tego samego zadania. Jeżeli do referowania wyznaczono Kapitana, wskazuje on na czas pobytu pod tablicą swego zastępcę.

8. Osoba referująca nie może korzystać z notatek, ani konsultować się ze swoją drużyną. Drużyna przeciwna nie może przeszkadzać lub przerywać referującemu.

9. Kapitan drużyny referującej może odwoływać osoby referujące dowolną liczbę razy. Także osoba referująca może zrezygnować z referowania. Wówczas Kapitan drużyny przeciwnej wskazuje kolejną osobę drużyny referującej do kontynuowania rozwiązania przy tablicy na zasadach opisanych w punktach **7** i **8**. Drużyna zmieniająca referującego traci n punktów przy swojej n-tej zmianie w czasie meczu.

10. Łączny czas na zreferowanie rozwiązania przez drużynę referującą wynosi 10 minut. Po upływie tego czasu Jury może przerwać referowanie, poprosić o streszczenie dalszej części rozwiązania lub pozwolić na dalsze referowanie, w zależności od tego, czy rozwiązanie zdaniem Jury rokuje nadzieję na poprawność i zbliża się do końca.

11. Po oznajmieniu przez referującego, że referowanie rozwiązania zostało zakończone, drużyna przeciwna może zgłosić zastrzeżenia co do poprawności rozwiązania, a następnie referujący odpowiada na te zastrzeżenia.

12. Jeżeli podczas dyskusji drużyna wywołująca zwróciła uwagę na błędy lub luki dyskwalifikujące rozwiązanie, ma ona prawo do zreferowania brakujących części rozwiązania na zasadach określonych w punktach **6** – **11**.

13. Ostatecznie Jury ocenia zaprezentowane referaty oraz dyskusję i przyznaje obu drużynom nieujemne liczby punktów o sumie nie przekraczającej 10 punktów. Drużyna, która przedstawiła poprawne rozwiązanie, otrzymuje co najmniej 7 punktów.

Jeśli drużyna wywołana nie przyjmuje zadania...

14. Drużyna wywołująca staje się drużyną referującą i prezentuje rozwiązanie zgodnie z zasadami określonymi w punktach **6** – **11**.

15. Ostatecznie Jury przyznaje drużynie referującej od 7 do 10 punktów, jeżeli zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne, albo -10 (minus dziesięć) punktów w przeciwnym przypadku. Jury może również przydzielić drużynie przeciwnej punkty za wskazanie luk lub błędów w przedstawionym rozwiązaniu.

Ustalenia końcowe

16. Rozgrywka kończy się po wywołaniu 8 zadań. W przypadku remisu wywołuje się dodatkowo 2 zadania.

17. Przewodniczący Jury może nałożyć karę punktową na drużynę za niezgodne z niniejszym regulaminem zachowania jej zawodników.

18. Interpretacja regulaminu należy do przewodniczącego Jury.

Spis treści