Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów — poziom OM

29 maja – 5 czerwca 2022 r.

Skład komputerowy: Bartosz Głowacki, Łukasz Kamiński, Kosma Kasprzak, Piotr Kuc, Hai An Mai, Arkadiusz Męcel, Krzysztof Salata, Witold Sikora, Stefan Świerczewski

Rysunki: Hai An Mai, Stefan Świerczewski

Recenzent: dr Arkadiusz Męcel

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy OMJ (poziom OM) odbył się w dniach 29 maja – 5 czerwca 2022 r. w ośrodku „Gronik” w Szczyrku — wracając po trzech latach do formy stacjonarnej. Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej — pracując zarówno w grupach, jak i indywidualnie. Obok codziennych omówień zadań uczniowie brali również udział w wykładach oraz rozmaitych formach rekreacji.

W Obozie Naukowym na poziomie OM udział wzięło 20 najlepszych uczestników XVII OMJ. Od roku 2019 w zawodach OMJ startują wyłącznie uczniowie szkół podstawowych. Uczestnicy Obozów Naukowych są więc o rok młodsi od swoich poprzedników. Zmiany te mają wpływ na dobór tematyki i trudności zadań na Obozie.

W niniejszym opracowaniu zgromadzone są wszystkie zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Poziom trudności tych problemów nawiązuje przede wszystkim do międzynarodowych zawodów juniorskich oraz do Olimpiady Matematycznej dla szkół ponadpodstawowych. Jednocześnie, tematyka zadań adresowanych do najlepszych uczestników OMJ związana jest bezpośrednio z programem merytorycznym OMJ i jego możliwymi rozszerzeniami, unikając zagadnień specyficznych dla programu nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych. Dodatkowa trudność niektórych zadań wynikać może również stąd, że ich rozwiązania oparte są o elementarne rezultaty uzasadnione w trakcie zajęć na Obozie. W pewnych przypadkach fakty te są w niniejszej broszurze jedynie formułowane. Ich dowody znaleźć można w literaturze poświęconej przygotowaniom do Olimpiady Matematycznej.

Zachęcamy do wykorzystania poniższych materiałów w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej Juniorów, zwłaszcza w zawodach finałowych, a także w przygotowaniach do Olimpiady Matematycznej dla szkół ponadpodstawowych. Miłej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OM)

Uczniowie: Szymon Anders, Maria Bążecka, Kazimierz Chomicz, Łukasz Ganczarek, Ignacy Kus, Antoni Mazur, Mateusz Miernik, Aleksander Misterski, Stanisław Mocny, Mateusz Orleański, Emilia Pitera, Tadeusz Rylski, Adam Sienkiewicz, Karol Szczygieł, Kamil Szmurło, Filip Śliwa, Szymon Urban, Jan Uss, Jakub Wilczyński, Jan Ząbkiewicz.

Kadra: Tomasz Szymczyk (kierownik), Bartosz Głowacki, Łukasz Kamiński, Kosma Kasprzak, Piotr Kuc, Krzysztof Salata

Treści zadań

Zadanie 1.

Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ przez a_n określamy sumę liczby n oraz najmniejszego dzielnika liczby n większego od 1. Dla ilu liczb naturalnych n liczba a_n przyjmuje wartość 12126?

Zadanie 2.

Ania wybrała dodatnią liczbę całkowitą $X < 1000000$. Szymon próbuje zgadnąć tę liczbę. Może on wybrać dwie dodatnie liczby całkowite M, $N < 1000000$ i pytać o $\mathrm{NWD}(X + M, N)$. Wykaż, że Szymon może poznać wartość X, zadając 20 pytań.

Zadanie 3.

Kosma i Krzyś dzielą się tabliczką czekolady o wymiarach $m \times n$. Zaczynając od Krzysia, każdy gracz na zmianę odrywa część wierszy bądź kolumn, zmniejszając jeden z wymiarów tabliczki, przy czym nikt nie może wziąć całej części pozostawionej mu w poprzednim ruchu. Przegrywa osoba, która zostanie z pojedynczym kawałkiem czekolady. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych m i n Krzyś może zagwarantować sobie zwycięstwo?

Zadanie 4.

Niech a, b, c będą długościami boków w trójkącie o polu S. Udowodnij, że

$$S \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}.$$

Zadanie 5.

Designerska tabliczka czekolady składa się z czterech różnych smakowych czekolad. Firma *Łedeł*^{TM} zarządziła, aby każde dwie designerskie tabliczki dzieliły nie więcej niż 1 z 4 smaków czekolad. Wiemy, że *Łedeł*^{TM} wydała łącznie 10 designerskich tabliczek. Ile przynajmniej smaków czekolad firma ta musiała użyć do ich produkcji?

Zadanie 6.

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n określamy wyrażenie

$$a_n = \frac{2n + 1 + \sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Wyznacz wartość $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2022}$.

Zadanie 7.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite, które można przedstawić w postaci

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c},$$

dla parami względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych a, b, c.

Zadanie 8.

W trójkącie ABE punkty C i D leżą w tej kolejności na odcinku BE tak, że zachodzi równość $BC = CD = DE$. Niech punkty X, Y, Z oraz T będą odpowiednio środkami okręgów opisanych na trójkątach ABE, ABC, ADE i ACD. Wykaż, że punkt T jest środkiem ciężkości trójkąta XYZ.

Zadanie 9.

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, takie że

$$a+b+c+\frac{1}{abc}=\frac{19}{2}.$$

Jaka jest największa możliwa wartość liczby a?

Zadanie 10.

W trójkącie ABC przez M i N oznaczamy odpowiednio środki boków AB i AC. Niech $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ABN$. Udowodnij, że ABC jest trójkątem równoramiennym.

Zadanie 11.

Pająki schwytały w swoją sieć n much, przy czym n jest dodatnią, parzystą liczbą całkowitą. Pomiędzy każdymi dwiema muchami przebiega dokładnie jedna nić sieci. Każda z tych nici przebiega pomiędzy dwiema schwytanymi muchami. Pająki mogą chodzić jedynie po swoich niciach i każda nić należy do dokładnie jednego pająka. Okazało się, że każdy pająk jest w stanie przejść do każdej muchy jedynie po swoich niciach. Jaka jest największa możliwa liczba pająków znajdujących się na tej sieci?

Zadanie 12.

Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniające równość $a^2 + ab - 1 = c^2$. Udowodnij, że zachodzi nierówność $b \geqslant \sqrt{4c-3}$.

Zadanie 13.

Punkt O leżący wewnątrz równoległoboku $ABCD$ spełnia warunek

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = \sphericalangle BOC + \sphericalangle DOA.$$

Udowodnij, że istnieje okrąg styczny jednocześnie do okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach AOB, BOC, COD i DOA.

Zadanie 14.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, takie że istnieje n parami różnych liczb pierwszych, których średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą.

Zadanie 15.

Parami różne liczby rzeczywiste a, b, c są niezerowe i spełniają równości

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Wyznacz wszystkie możliwe wartości iloczynu abc.

Zadanie 16.

Na płaszczyźnie wyróżniono $n \geqslant 2$ parami różnych punktów. Następnie każdy punkt płaszczyzny będący środkiem odcinka o obu wyróżnionych końcach pomalowano na zielono. Jaka jest największa możliwa liczba wyróżnionych punktów, które są jednocześnie zielone?

Zadanie 17.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$, takie że na prostej można wybrać n punktów w ten sposób, że zachodzą jednocześnie dwa warunki:

- odległość między każdymi dwoma wybranymi punktami jest liczbą całkowitą,
- jeśli wszystkim wybranym punktom przypiszemy sumy odległości tych punktów od $n-1$ pozostałych punktów, to w rezultacie otrzymamy n kolejnych liczb całkowitych w pewnym porządku.

Zadanie 18.

Trzy dodatnie liczby całkowite a, b, c są względnie pierwsze, czyli $\mathrm{NWD}(a, b, c) = 1$, oraz spełniają warunek

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + 2bc + 2ca.$$

Udowodnij, że liczby a, b, c są kwadratami liczb całkowitych.

Zadanie 19.

Dana jest liczba całkowita $k \geqslant 2$ oraz dodatnie liczby całkowite $n_1, n_2, \ldots, n_k$, przy czym dla każdej liczby całkowitej od 1 do k liczba n_{i+1} jest dzielnikiem liczby $2^{n_i} - 1$ (dla $i = k$ przyjmujemy, że $n_{i+1} = n_1$). Wykaż, że $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$.

Zadanie 20.

Niech S będzie zbiorem wszystkich trójek dodatnich liczb całkowitych (a, b, c) spełniających równość

$$2a^2 + 3b^3 = 4c^4.$$

Udowodnij, że:

a) Dla każdej trójki (a, b, c) należącej do zbioru S liczby a, b, c są podzielne przez 6.

b) Zbiór S ma nieskończenie wiele elementów.

Zadanie 21.

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Załóżmy, że zachodzi równość $AC + AI = BC$. Udowodnij, że $\measuredangle BAC = 2 \cdot \measuredangle ABC$.

Zadanie 22.

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geqslant a + b + c + d.$$

Zadanie 23.

Kosma zgubił się w Szczyrku! Dobrym modelem Szczyrku jest płaszczyzna z układem współrzędnych o osiach OX, OY. Kosma ostatni raz był widziany w punkcie $(0, 0)$. Wiemy, że co godzinę Kosma wykonuje z jednakowym prawdopodobieństwem krok długości 1 w jednym z czterech kierunków równoległych do osi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po n godzinach Kosma znajdzie się znów na osi OX?

Zadanie 24.

Rozwiąż w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z równanie $4^x + 3^y = z^2$.

Zadanie 25.

Znajdź wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, których wszystkie dodatnie dzielniki można wpisać w pola prostokątnej tablicy tak, aby w każdym polu znajdowała się inna liczba, aby sumy liczb w każdym wierszu były równe, i aby sumy liczb w każdej kolumnie były równe.

Zadanie 26.

Dana jest liczba $n = 7k + 2$, gdzie k jest pewną dodatnią liczbą całkowitą. Niech

$$x = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1.$$

Udowodnij, że liczba $x^2 + x + 1$ nie ma dzielnika pierwszego większego od x.

Zadanie 27.

Dany jest trapez $ABCD$, w którym proste AD i BC są równoległe oraz zachodzi równość $AB = BC$. Punkty E i F są środkami odpowiednio odcinków BC i AD. Przypuśćmy, że dwusieczna kąta ABC przechodzi przez punkt F. Wyznacz stosunek długości odcinków BD oraz EF.

Zadanie 28.

Trzy okręgi o równych promieniach przecinają się w punkcie X oraz przecinają się parami w punktach A, B i C. Udowodnij, że punkt X jest ortocentrum (czyli punktem przecięcia się wysokości) trójkąta ABC.

Zadanie 29.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg ω. Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg ω w punkcie M, różnym od A. Punkt P znajduje się na odcinku AM oraz leży wewnątrz trójkąta ABC. Proste przechodzące przez punkt P i równoległe do prostych AB oraz AC przecinają prostą BC odpowiednio w punktach E i F. Proste ME i MF przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że proste AM, BL i CK przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 30.

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające układ równań

$$\begin{cases} ab = c - a - b, \\ cb = a - b - c, \\ ac = b - a - c. \end{cases}$$

Zadanie 31.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = AC$. Punkt D jest środkiem boku BC, a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC. Prosta BE przecina okrąg opisany na trójkącie ABD w punkcie F. Proste DE i AF przecinają się w punkcie G. Wykaż, że $DG = GE$.

Zadanie 32.

Pewne miasto ma n skrzyżowań. Z każdego z nich wychodzą 4 (niekoniecznie proste) ulice, przy czym możliwe jest, że więcej niż jedna ulica łączy te same dwa skrzyżowania. Zakładamy jednak, że wszystko dzieje się na płaszczyźnie, więc żadna ulica nie może przejść pod lub nad inną. Dwóch turystów rozpoczyna swoje wędrówki na pewnych dwóch skrzyżowaniach. Na początku każdy wybiera ulicę, w którą wchodzi i przechodzi przez nią. Od tego momentu każdy z turystów, gdy dojdzie do skrzyżowania, ignoruje drogi najbliżej na swoje lewo i prawo, i kontynuuje pozostałą drogą. Każdy z turystów zatrzymuje się, gdy napotka skrzyżowanie, z którego rozpoczął podróż, dochodząc do niego z tej przeciwnej strony niż ta, z której zaczął (innymi słowy — od razu zanim wejdzie ponownie w pierwszą ulicę, którą przechodził). Okazuje się, że każde skrzyżowanie zostało odwiedzone dokładnie raz, przez dokładnie jednego turystę. Udowodnij, że n jest liczbą parzystą.

Zadanie 33.

Marek gra w *Biegacza Labiryntów*. Gracz musi przejść robotem z lewego dolnego rogu kwadratowej planszy rozmiaru $n \times n$ do prawego górnego rogu. Plansza jest podzielona na jednostkowe pola, których pewne krawędzie są ścianami, przez które robot nie może przejść (należy do nich cały obwód szachownicy). Gracz kontroluje robota pilotem z czterema przyciskami, którymi może sprawić żeby przeszedł na górne, dolne, lewe lub prawe pole sąsiadujące z polem, na którym stoi. Gdy gracz każe robotowi przejść na pole, od którego jest oddzielony ścianą, robot stoi w miejscu. Marek ma dwa zestawy gry (z różnymi labiryntami, o różnych wymiarach), ale tylko jednego pilota, którym kontroluje oba roboty. Wykaż, że może on doprowadzić jednocześnie oba roboty do prawych górnych pól odpowiadających im plansz.

Zadanie 34.

Dwuosobowa gra rozgrywa się na $2n \geqslant 4$ punktach, przy czym żadne trzy z nich nie są współliniowe. Każdy ruch polega na wybraniu dwóch z tych punktów i narysowaniu łączącego je odcinka. Przegrywa pierwszy gracz, który narysuje krawędź tworzącą łamaną zamkniętą złożoną z nieparzystej liczby odcinków. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n, takie że pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ przez a_n określamy sumę liczby n oraz najmniejszego dzielnika liczby n większego od 1. Dla ilu liczb naturalnych n liczba a_n przyjmuje wartość 12126?

Rozwiązanie: Oznaczmy przez p_n najmniejszy dzielnik liczby n większy od 1. Liczba ta jest pierwsza. Niech $d_n = \frac{n}{p_n}$. Skoro

$$a_n = n + p_n = d_n p_n + p_n = p_n(d_n + 1),$$

to liczba pierwsza p_n jest dzielnikiem liczby a_n.

Wnioskujemy stąd, że jeśli $a_n = 12126 = 2 \cdot 3 \cdot 43 \cdot 47$, to liczba p_n jest równa jednej z liczb 2, 3, 43, 47. W każdej z tych sytuacji mamy $n = 12126 - p_n$, co prowadzi do czterech możliwych wartości n: 12124, 12123, 12083, 12079. Sprawdzamy bezpośrednio, że we wszystkich tych przypadkach najmniejszym dzielnikiem n większym od 1 jest właśnie $12126 - n$, więc wszystkie te liczby spełniają warunek $a_n = 12126$. Zatem liczba ta występuje czterokrotnie jako wartość a_n.

Zadanie 2.

Ania wybrała dodatnią liczbę całkowitą $X < 1000000$. Szymon próbuje zgadnąć tę liczbę. Może on wybrać dwie dodatnie liczby całkowite M, $N < 1000000$ i pytać o $\mathrm{NWD}(X + M, N)$. Wykaż, że Szymon może poznać wartość X, zadając 20 pytań.

Rozwiązanie: Zauważmy, że $2^{19} = 2^{10} \cdot 2^9 = 1024 \cdot 512 < 1000000$. Wykażemy, że po $k \leqslant 19$ pytaniach Szymon może poznać resztę z dzielenia liczby X przez 2^k.

Każda dodatnia liczba całkowita daje przy dzieleniu przez $1 = 2^0$ resztę 0. Jeśli po otrzymaniu k odpowiedzi Szymon zna resztę r z dzielenia liczby X przez 2^k, dla pewnego $k \leqslant 18$, to w pytaniu o numerze $k + 1$ Szymon może przyjąć $M = 2^{19} - r$ oraz $N = 2^{k+1}$. Te liczby wynoszą maksymalnie 2^{19}, więc są mniejsze od 1000000. Wtedy liczba 2^k jest dzielnikiem liczby $X + M$. Stąd odpowiedź na pytanie o numerze $k + 1$ jest równa 2^k lub 2^{k+1}. W pierwszym przypadku, liczba X daje przy dzieleniu przez 2^{k+1} resztę $2^k + r$, a w drugim przypadku resztę r.

W konsekwencji stwierdzamy, że po 19 pytaniach Szymon może poznać resztę r z dzielenia X przez 2^{19}. Jednakże $10^6 < 2^{20}$, więc liczba X jest równa r lub $2^{19} + r$. Jeśli przez t oznaczymy resztę z dzielenia r przez 3, to w ostatnim pytaniu wystarczy przyjąć $M = 6 - r$ i $N = 3$, by rozróżnić między wskazanymi wyżej przypadkami.

Zadanie 3.

Kosma i Krzyś dzielą się tabliczką czekolady o wymiarach $m \times n$. Zaczynając od Krzysia, każdy gracz na zmianę odrywa część wierszy bądź kolumn, zmniejszając jeden z wymiarów tabliczki, przy czym nikt nie może wziąć całej części pozostawionej mu w poprzednim ruchu. Przegrywa osoba, która zostanie z pojedynczym kawałkiem czekolady. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych m i n Krzyś może zagwarantować sobie zwycięstwo?

Rozwiązanie: Stanie się tak dokładnie wtedy, gdy $m \neq n$. Wtedy Krzyś może trzymać się następującej zasady – po każdym swoim ruchu pozostawiać tabliczkę w kształcie kwadratu. Zawsze będzie to możliwe, bo jeśli Kosma otrzyma taką tabliczkę, zmniejszając jeden z wymiarów, to otrzyma prostokąt niebędący kwadratem, a taki kształt Krzyś może zamienić w kwadrat. Skoro po ruchu Kosmy nigdy nie zostaje kwadrat, to nie może on nigdy zostawić pojedynczego kawałka Krzysiowi, więc to Krzyś wygra grę.

Jeśli natomiast $m = n$, to Krzyś musi zmniejszyć któryś z wymiarów, a wtedy Kosma może zastosować strategię opisaną wyżej. Zatem w tym przypadku Krzyś nie może zagwarantować sobie zwycięstwa.

Zadanie 4.

Niech a, b, c będą długościami boków w trójkącie o polu S. Udowodnij, że

$$S \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}.$$

Rozwiązanie: Na początku zauważmy, że zachodzi nierówność

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6} \geqslant \frac{ab + bc + ca}{6}.$$

Istotnie, mnożąc obie strony przez 12 i przenosząc wyrazy na jedną stronę, mamy:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geqslant 0.$$

Oznaczmy wierzchołki rozważanego trójkąta przez A, B, C, oraz przyjmijmy, że $AB = c$, $BC = a$ i $AC = b$.

Zauważmy najpierw, że $S \leqslant \frac{ab}{2}$. Powód jest następujący: pole trójkąta równe jest $\frac{ah}{2}$, gdzie h jest wysokością opuszczoną z wierzchołka A. Jednakże h to najmniejsza możliwa długość odcinka łączącego punkt A z prostą BC, skąd $h \leqslant b$. Zatem

$$S = \frac{ah}{2} \leqslant \frac{ab}{2}.$$

Analogicznie postępujemy z ac i bc, otrzymując

$$3S \leqslant \frac{ab}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{bc}{2}.$$

Łącząc ten wniosek z nierównością uzyskaną na początku rozwiązania, uzyskujemy

$$S \leqslant \frac{ab + bc + ca}{6} \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6},$$

co kończy dowód.

Uwaga. W powyższych nierównościach równość zachodzi tylko, gdy $a = b = c = 0$. Te wartości nie spełniają jednak warunków zadania, więc rozważana nierówność jest zawsze ostra.

Zadanie 5.

Designerska tabliczka czekolady składa się z czterech różnych smakowych czekolad. Firma *Łedeł*^{TM} zarządziła, aby każde dwie designerskie tabliczki dzieliły nie więcej niż 1 z 4 smaków czekolad. Wiemy, że *Łedeł*^{TM} wydała łącznie 10 designerskich tabliczek. Ile przynajmniej smaków czekolad firma ta musiała użyć do ich produkcji?

Rozwiązanie: Dysponując 13 smakami a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, wydamy designerskie tabliczki $abcd$, $aefg$, $ahij$, $aklm$, $beim$, $bfjk$, $bghl$, $cejl$, $cfim$ i $cgik$.

Wykażemy teraz, że nie jest możliwe wydanie 10 tabliczek, jeśli dysponujemy mniej niż 13 smakami. Skoro mamy wyprodukować 10 tabliczek, to łączna liczba smaków (z powtórzeniami) wynosi 40. Gdyby różnych smaków było nie więcej niż 12, to któryś z nich powtórzyłby się przynajmniej $\frac{40}{12}$ razy. Uzyskalibyśmy więc co najmniej 4 tabliczki, w których występuje pewien ustalony smak. Każda z tych tabliczek zawierałaby ponadto 3 smaki, które nie występują na pozostałych 3 tabliczkach. Zatem minimalna liczba różnych smaków niezbędna do wyprodukowania tych czterech tabliczek wyniosłaby $1 + 4 \cdot 3 = 13$, wbrew założeniu że dostępnych było maksymalnie 12. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że potrzebne jest co najmniej 13 smaków.

Zadanie 6.

Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n określamy wyrażenie

$$a_n = \frac{2n + 1 + \sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Wyznacz wartość $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2022}$.

Rozwiązanie: Przekształćmy wyrażenie definiujące wartość n:

$$\frac{2n + 1 + \sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{(2n + 1 + \sqrt{n(n+1)}) \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{(n+1) - n} =$$
$$= (2n+1) \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + (n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1} = (n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}.$$

Zatem suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2022}$ jest równa

$$(2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}) + (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) + \ldots + (2023\sqrt{2023} - 2022\sqrt{2022}) = 2023\sqrt{2023} - 1.$$

Zadanie 7.

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite, które można przedstawić w postaci

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c},$$

dla parami względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych a, b, c.

Rozwiązanie: Do wyrażenia w treści zadania dodać możemy liczbę 3:

$$\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c}\right).$$

Wyciągając z powyższej sumy przed nawias czynnik $a + b + c$, uzyskujemy

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{abc}.$$

Rozwiązanie zadania sprowadza się do wyznaczenia wszystkich dodatnich liczb całkowitych n, takich że liczba $n + 3$ jest postaci uzyskanej wyżej.

Skoro liczba abc jest dzielnikiem liczby $(a+b+c)(ab+bc+ca)$, to w szczególności liczba a jest dzielnikiem tego iloczynu. Odejmując od niego wyrazy podzielne przez a dostajemy, że liczba a jest dzielnikiem iloczynu $(b+c)bc$. Skoro jednak mamy $\mathrm{NWD}(a,b) = \mathrm{NWD}(a,c) = 1$, to liczba a jest dzielnikiem liczby $b+c$. Analogicznie dowodzimy, że liczba b jest dzielnikiem liczby $a+c$, oraz że liczba c jest dzielnikiem liczby $a+b$.

Biorąc pod uwagę symetryczną rolę liczb a, b, c w tezie zadania, możemy bez straty ogólności przyjąć $a \geqslant b \geqslant c$. Wtedy $b+c \leqslant 2a$, więc z uzyskanych podzielności wnioskujemy, że liczba $b+c$ jest równa $2a$ lub a.

W przypadku, gdy $b+c=2a$, wobec szacowania $a \geqslant b \geqslant c$ stwierdzamy, że $b=c=a$. Zakładamy jednak, że $\mathrm{NWD}(a,b) = \mathrm{NWD}(a,c) = 1$, skąd $(a,b,c) = (1,1,1)$.

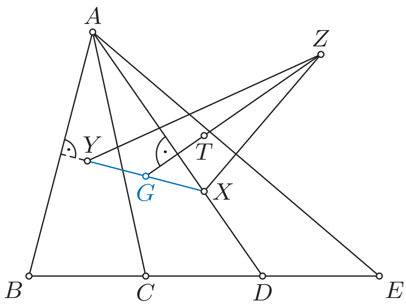
W przypadku, gdy $b+c=a$ stwierdzamy, że skoro liczba b jest dzielnikiem liczby $b+2c$, to jest także dzielnikiem liczby $2c$. Skoro $\mathrm{NWD}(b,c) = 1$, to liczba b jest dzielnikiem liczby 2. Podobnie uzasadniamy, że liczba c jest dzielnikiem liczby 2. Uzyskujemy zatem w tym przypadku trójki (a,b,c) postaci $(2,1,1)$ lub $(3,2,1)$.

Wyrażenie z treści zadania przyjmuje dla każdej z uzyskanych trójek liczb a, b, c wartość całkowitą równą (odpowiednio dla trójek $(1,1,1)$, $(2,1,1)$, $(3,2,1)$) liczbie 6, 7 lub 8. Są to więc jedyne możliwe całkowite wartości tego wyrażenia.

Zadanie 8.

W trójkącie ABE punkty C i D leżą w tej kolejności na odcinku BE tak, że zachodzi równość $BC = CD = DE$. Niech punkty X, Y, Z oraz T będą odpowiednio środkami okręgów opisanych na trójkątach ABE, ABC, ADE i ACD. Wykaż, że punkt T jest środkiem ciężkości trójkąta XYZ.

Rozwiązanie: Zauważmy, że prosta XY jest symetralną odcinka AB, a prosta ZT jest symetralną odcinka AD. Zatem punkt przecięcia prostych XY i ZT, który będziemy oznaczać przez G, jest również środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD.



rys. 1

Punkt G leży więc na symetralnej odcinka BD. Punkty X i Y leżą odpowiednio na symetralnych odcinków CD i BC. Skoro $BC = CD$, to punkty te są jednakowo odległe od symetralnej BD. Ta symetralna musi zatem przecinać odcinek XY w połowie, skąd dostajemy, że G jest środkiem XY. Analogicznie można wykazać, że prosta YT przecina odcinek ZX w jego środku. Stąd punkt T, będący przecięciem środkowych ZT oraz YT, jest środkiem ciężkości trójkąta XYZ.

Zadanie 9.

Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, takie że

$$a + b + c + \frac{1}{abc} = \frac{19}{2}.$$

Jaka jest największa możliwa wartość liczby a?

Rozwiązanie: Przekształćmy podaną równość do postaci

$$\frac{19}{2} = \frac{15}{16}a + \left(\frac{1}{16}a + b + c + \frac{1}{abc}\right).$$

Korzystając z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną, uzyskujemy

$$\frac{\frac{a}{16} + b + c + \frac{1}{abc}}{4} \geqslant \sqrt[4]{\frac{a}{16} \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{abc}} = \frac{1}{2}.$$

Stąd $\frac{19}{2} \geqslant \frac{15}{16}a + 2$, czyli $a \leqslant 8$. Równość uzyskujemy dla $a = 8$ oraz $b = c = \frac{1}{2}$. Podstawiając te liczby do warunku z treści zadania stwierdzamy, że jest on spełniony.

Uwaga. W rozwiązaniu korzystamy z faktu, zwanego *nierównością pomiędzy średnią arytmetyczną i geometryczną*. Mówi on, że jeżeli $a_1, \ldots, a_n$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, oraz jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

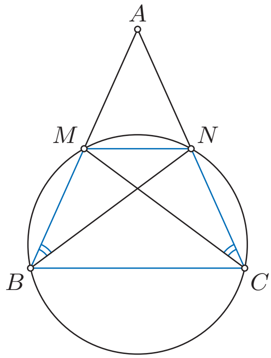
przy czym równość ma miejsce jedynie, gdy $a_1 = \ldots = a_n$.

Zadanie 10.

W trójkącie ABC przez M i N oznaczamy odpowiednio środki boków AB i AC. Niech $\sphericalangle ACM = \sphericalangle ABN$. Udowodnij, że ABC jest trójkątem równoramiennym.

Rozwiązanie: Założenie o równości kątów z treści zadania można zapisać w postaci $\sphericalangle NCM = \sphericalangle NBM$. Stąd na czworokącie $BCNM$ można opisać okrąg.

Linia środkowa MN w trójkącie ABC jest równoległa do podstawy BC, więc czworokąt $BCNM$ jest trapezem wpisanym w okrąg, czyli trapezem równoramiennym. Zatem $\sphericalangle BCN = \sphericalangle CBM$, skąd wnioskujemy, że trójkąt ABC jest równoramienny.



rys. 2

Zadanie 11.

Pająki schwytały w swoją sieć n much, przy czym n jest dodatnią, parzystą liczbą całkowitą. Pomiędzy każdymi dwiema muchami przebiega dokładnie jedna nić sieci. Każda z tych nici przebiega pomiędzy dwiema schwytanymi muchami. Pająki mogą chodzić jedynie po swoich niciach i każda nić należy do dokładnie jednego pająka. Okazało się, że każdy pająk jest w stanie przejść do każdej muchy jedynie po swoich niciach. Jaka jest największa możliwa liczba pająków znajdujących się na tej sieci?

Rozwiązanie: Zauważmy, że skoro jest n much, i skoro każdy pająk może przejść do każdej muchy po swoich niciach, to liczba nici w sieci należących do każdego pająka jest równa co najmniej $n-1$. Jednakże wszystkich nici w sieci jest $\frac{n(n-1)}{2}$ (jest to liczba par much), więc skoro do każdego pająka należy przynajmniej $n-1$ nici, to jest nie więcej niż $\frac{n}{2}$ pająków.

Sprawdzimy teraz, że pająków może być rzeczywiście $\frac{n}{2}$, gdy n jest liczbą parzystą. Ponumerujmy muchy od 0 do $n-1$. Pająkom przydzielmy natomiast liczby od 1 do $\frac{n}{2}$.

Nici pomiędzy muchami o numerach a oraz b przypiszmy wreszcie liczbę, będącą resztą z dzielenia liczby $a+b$ przez n. W ten sposób różne nici mogą mieć przypisaną tę samą liczbę. Pozostało przypisać pająkom ich nici. Do pająka o numerze 1 należeć będą nici o numerach 0 oraz 1, do pająka o numerze 2 należeć będą nici o numerach 2 oraz 3, i tak dalej, aż do pająka o numerze $\frac{n}{2}$, do którego należeć będą nici o numerach $n-2$ oraz $n-1$.

Sprawdźmy, że powyższa konstrukcja sieci i umieszczonego na niej układu pająków posiadających odpowiednie nici spełnia warunki zadania. Każda nić należy do jednego pająka, a pająk o numerze k posiada nici o numerach $2k-2$ oraz $2k-1 \pmod n$. Pająk ten może przejść między wszystkimi muchami w następujący sposób. Rozpoczyna od muchy o numerze $k-1$ i idzie ścieżką postaci:

$$k-1 \longleftrightarrow k \longleftrightarrow k-2 \longleftrightarrow k+1 \longleftrightarrow \ldots \longleftrightarrow k-1-\frac{n-2}{2} \longleftrightarrow k-1+\frac{n}{2}.$$

Oczywiście numery much rozważane są modulo n. Ścieżka łączy n much, przy czym i-ta mucha na tej ścieżce na numer równy $k-1-(-1)^i\lfloor\frac{i}{2}\rfloor \pmod n$.

Każde trzy kolejne muchy o numerach a, b, c na powyższej ścieżce mają tę własność, że albo $a+b \equiv 2k-1 \pmod n$ oraz $b+c \equiv 2k-2 \pmod n$, albo odwrotnie. Mając dane dwie pierwsze muchy, pozostały przebieg ścieżki pająk wyznacza jednoznacznie, idąc naprzemiennie po niciach o numerach $2k-1$ oraz $2k-2 \pmod n$. Ścieżka przebiega więc wszystkie muchy.

Uwaga. W rozwiązaniu korzystamy z faktu, że jeśli jakiś pająk może dojść do wszystkich n much, to potrzebuje do tego co najmniej $n-1$ nici. W terminologii teorii grafów obserwację tą można przetłumaczyć na znany fakt mówiący, że każdy spójny graf o n wierzchołkach ma co najmniej $n-1$ krawędzi, przy czym przez graf spójny rozumiemy taki, w którym pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami poprowadzić można ścieżkę złożoną z krawędzi. Przedstawimy uzasadnienie tego faktu poprzez indukcję po liczbie n.

Dla $n=1$ fakt jest oczywisty. Załóżmy zatem, że jest on prawdziwy dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych mniejszych od danego n. Gdyby z każdego wierzchołka grafu o n wierzchołkach wychodziły co najmniej dwie krawędzie, to graf ten miałby co najmniej n krawędzi. Zatem istnieje w tym grafie wierzchołek połączony z nie więcej niż jednym innym wierzchołkiem. Skoro rozważany graf jest spójny, to wskazany wierzchołek musi być połączony z dokładnie jednym innym wierzchołkiem grafu. Rozważając zatem graf powstały z rozważanego grafu po usunięciu początkowego wierzchołka i owej jednej krawędzi, otrzymujemy graf o $n-1$ wierzchołkach, który nadal jest spójny, więc na mocy założenia indukcyjnego ma co najmniej $n-2$ krawędzi. Stąd oryginalny graf miał co najmniej $n-1$ krawędzi.

Zadanie 12.

Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniające równość $a^2 + ab - 1 = c^2$. Udowodnij, że zachodzi nierówność $b \geqslant \sqrt{4c-3}$.

Rozwiązanie: Ponieważ obie strony nierówności są dodatnie, więc możemy rozważać równoważną nierówność $b^2 \geqslant 4c - 3$. Z założenia mamy równość $4a^2 + 4ab = 4c^2 + 4$. Stąd dowodzona nierówność jest równoważna nierówności:

$$(2a+b)^2 = (4a^2 + 4ab) + b^2 \geqslant 4c - 3 + (4c^2 + 4) = (2c+1)^2.$$

Ponieważ wyrażenia w nawiasach po obu stronach są dodatnie, więc wystarczy uzasadnić, że zachodzi nierówność:

$$2a + b \geqslant 2c + 1.$$

Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną dla dwóch nieujemnych liczb $a + b$ oraz a, jak również na mocy równości $a(a + b) = c^2 + 1$ (równoważnej równości z założenia), otrzymujemy:

$$2a + b = a + (a + b) \geqslant 2\sqrt{a(a+b)} = 2\sqrt{c^2+1} > 2c.$$

Uzyskaliśmy nierówność $2a + b > 2c$. Skoro jednak liczby a, b, c są całkowite, otrzymujemy żądaną nierówność $2a+b \geqslant 2c+1$, co kończy dowód. Równość w wyjściowej nierówności zachodzi dla $a = b = c = 1$.

Zadanie 13.

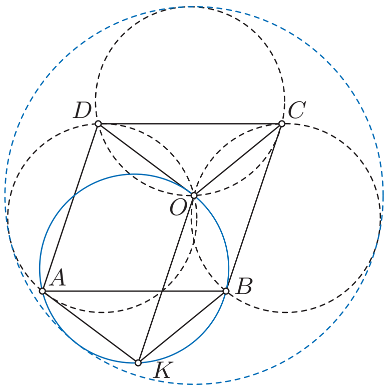
Punkt O leżący wewnątrz równoległoboku $ABCD$ spełnia warunek

$$\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = \sphericalangle BOC + \sphericalangle DOA.$$

Udowodnij, że istnieje okrąg styczny jednocześnie do okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach AOB, BOC, COD i DOA.

Rozwiązanie: Niech K będzie takim punktem leżącym po przeciwnej stronie prostej AB co punkt O, że czworokąt $AKOD$ jest równoległobokiem. Ponieważ proste OK, AD, BC są równoległe, oraz ponieważ $OK = AD = BC$, więc czworokąt $OKBC$ również jest równoległobokiem. Skoro zachodzą równości $AB = CD$, $AK = DO$ i $BK = CO$, to trójkąty BKA oraz COD są przystające (cecha bok–bok–bok). Zatem

$$\sphericalangle BKA + \sphericalangle AOB = \sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180^\circ.$$



rys. 3

Stąd na czworokącie $AKBO$ można opisać okrąg. Trójkąty BKA i COD są przystające, więc okrąg opisany na trójkącie COD ma taki sam promień, jak okrąg opisany na czworokącie na $AKBO$. Skoro czworokąt $KBCO$ jest równoległobokiem, to trójkąty BOC oraz OBK są przystające, a zatem okrąg opisany na trójkącie BOC ma taki sam promień, jak okrąg opisany na czworokącie $AKBO$. Analogicznie uzasadniamy, że również promień okręgu opisanego na trójkącie DOA jest równy promieniowi okręgu opisanego na czworokącie $AKBO$.

Uzasadniliśmy zatem, że cztery rozważane w treści zadania okręgi przechodzą przez punkt O i mają równy promień, który oznaczymy przez r. Stąd okrąg o środku w punkcie O i promieniu równym $2r$ jest styczny do każdego z tych czterech okręgów.

Zadanie 14.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, takie że istnieje n parami różnych liczb pierwszych, których średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie: Wykażemy, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n istnieje n liczb pierwszych, których średnia arytmetyczna jest liczbą całkowitą.

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, więc istnieje taka reszta b, którą daje przy dzieleniu przez n nieskończenie wiele liczb pierwszych. Weźmy n takich liczb pierwszych postaci

$$p_1 = a_1 n + b, \quad p_2 = a_2 n + b, \quad \ldots \quad p_n = a_n n + b,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są liczbami całkowitymi. Wtedy liczba $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ jest równa $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)n + bn$. Po podzieleniu tej liczby przez n uzyskamy oczywiście liczbę całkowitą, co kończy dowód.

Zadanie 15.

Parami różne liczby rzeczywiste a, b, c są niezerowe i spełniają równości

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Wyznacz wszystkie możliwe wartości iloczynu abc.

Rozwiązanie: Przekształćmy równoważnie trzy równości dane w zadaniu do postaci

$$a - b = \frac{b-c}{bc}, \quad b - c = \frac{c-a}{ac}, \quad c - a = \frac{a-b}{ab}.$$

Po pomnożeniu stronami powyższych równości, uzyskujemy

$$(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(abc)^2}.$$

Jednak $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$, gdyż liczby a, b, c są parami różne. Stąd $(abc)^2 = 1$.

Uzyskaliśmy dwie możliwe wartości iloczynu abc. Wystarczy zatem wskazać liczby rzeczywiste spełniające wyjściowe równości, których iloczyn byłby równy -1 lub 1. Są to odpowiednio trójki $(a, b, c) = (-1, \frac{1}{2}, 2)$ oraz $(a, b, c) = (1, -\frac{1}{2}, -2)$.

Zadanie 16.

Na płaszczyźnie wyróżniono $n \geqslant 2$ parami różnych punktów. Następnie każdy punkt płaszczyzny będący środkiem odcinka o obu wyróżnionych końcach pomalowano na zielono. Jaka jest największa możliwa liczba wyróżnionych punktów, które są jednocześnie zielone?

Rozwiązanie: Odpowiedzią jest liczba $n-2$. Zacznijmy od uzasadnienia, że szukana liczba nie jest mniejsza od $n-2$. W tym celu wystarczy zaznaczyć n punktów na prostej, na przykład o współrzędnych $(1, 0)$, $(2, 0)$, $\ldots$, $(n, 0)$. Wówczas dla każdej liczby całkowitej k spełniającej warunek $1 < k < n$, każdy z $n-2$ punktów postaci $(k, 0)$ jest środkiem odcinka o wybranych końcach $(k-1, 0)$ oraz $(k+1, 0)$.

Wykażmy, że zielonych wyróżnionych punktów jest nie więcej niż $n-2$. W zbiorze wszystkich wyróżnionych punktów o współrzędnych (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n) wybierzmy najpierw punkty o minimalnej możliwej pierwszej współrzędnej, a z tych punktów wyróżnijmy punkt o najmniejszej możliwej drugiej współrzędnej (jest to punkt leżący „najniżej spośród tych leżących na lewo"). Punkt ten nie jest żadnym środkiem, ponieważ każda współrzędna środka odcinka jest średnią arytmetyczną odpowiednich współrzędnych końców odcinka. Analogicznie wśród wyróżnionych punktów zielonym nie jest ten z punktów mających największą możliwą pierwszą współrzędną, który ma największą możliwą drugą współrzędną (najwyższy punkt spośród tych najbardziej na prawo). Skoro $n \geqslant 2$, to dwa wskazane punkty się nie pokrywają. Stąd liczba wyróżnionych punktów, które nie są zielone, jest nie większa od $n-2$.

Zadanie 17.

Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 1$, takie że na prostej można wybrać n punktów w ten sposób, że zachodzą jednocześnie dwa warunki:

- odległość między każdymi dwoma wybranymi punktami jest liczbą całkowitą,
- jeśli wszystkim wybranym punktom przypiszemy sumy odległości tych punktów od $n-1$ pozostałych punktów, to w rezultacie otrzymamy n kolejnych liczb całkowitych w pewnym porządku.

Rozwiązanie: Rozważmy na początku przypadki, gdy $n \leqslant 3$. Dla $n = 1$ warunki wypisane wyżej oczywiście są spełnione. Dla $n = 2$ widzimy łatwo, że wybierając dwa punkty odległe od siebie o liczbę całkowitą, przypiszemy im jednakowe sumy odległości, co przeczy warunkowi drugiemu. Dla $n = 3$ wystarczy wybrać na osi liczbowej trzy punkty o współrzędnych 0, 1, 3, aby odległości między nimi były liczbami całkowitymi, a sumy odległości przypisane kolejnym liczbom równe były odpowiednio 4, 3, 5.

Wykażemy, że dla $n \geqslant 4$ nie istnieje układ n punktów na prostej spełniający dwa warunki z treści zadania. Przypuśćmy nie wprost, że układ taki istnieje, dla pewnej liczby n. Możemy bez straty ogólności założyć, że wybrane punkty znajdują się na osi liczbowej i mają współrzędne całkowite. Oznaczmy te liczby całkowite jako

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_{n-1} < p_n.$$

Przyjmijmy też, że suma odległości punktu p_i od punktów p_j, dla $i \neq j$, równa jest S_i, dla każdej liczby całkowitej i spełniającej $1 \leqslant i \leqslant n$. Niech $k = p_n - p_{n-1}$. Wówczas $S_n - S_{n-1} = k(n-2)$, bowiem $p_{n-1} - p_i = p_n - k - p_i$, dla każdej liczby całkowitej i od 1 do $n-2$. Skoro liczby S_1, S_2, …, S_n są kolejnymi liczbami całkowitymi, to ich maksymalna możliwa różnica równa jest $n-1$. Gdy $n \geqslant 4$, to nierówność $k(n-2) \leqslant n-1$ jest prawdziwa jedynie dla $k = 1$. Stąd $p_n - p_{n-1} = 1$. Analogicznie wykazujemy, że $p_2 - p_1 = 1$.

Wnioskujemy stąd, że

$$S_n - S_{n-1} = S_2 - S_1 = n - 2.$$

Skoro jednak S_1, S_2, ..., S_n są kolejnymi liczbami całkowitymi, to różnice równe $n-2$ można uzyskać tylko w wyniku odejmowania największej liczby od drugiej najmniejszej lub drugiej największej liczby od najmniejszej. Obydwie sytuacje są symetryczne, więc możemy założyć, że jeśli a jest najmniejszą z liczb S_i, to $S_2 = a$ oraz:

$$S_1 = a + n - 2, \quad S_2 = a, \quad S_{n-1} = a + 1, \quad S_n = a + n - 1.$$

Dla $n = 4$ otrzymujemy sprzeczność, bowiem przy skrajnych odległościach równych 1, konfiguracja punktów jest symetryczna i $S_1 = S_4$, $S_2 = S_3$.

Dla $n \geqslant 5$ rozważamy punkt p_3. Przypuśćmy, że $p_3 - p_2 = \ell$. Wtedy dla $i > 3$ mamy

$$p_i - p_3 = p_i - p_2 - \ell \quad \text{oraz} \quad p_3 - p_1 = p_2 - p_1 + \ell,$$

czyli

$$S_3 = S_2 - (n-3)\ell + \ell = a - \ell(n-4) < a,$$

czyli uzyskujemy sprzeczność z wyborem a, jako minimalnej z liczb S_i. Ostatecznie więc tylko $n = 1$ i $n = 3$ spełniają warunki zadania.

Zadanie 18.

Trzy dodatnie liczby całkowite a, b, c są względnie pierwsze, czyli $\mathrm{NWD}(a, b, c) = 1$, oraz spełniają warunek

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + 2bc + 2ca.$$

Udowodnij, że liczby a, b, c są kwadratami liczb całkowitych.

Rozwiązanie: Zauważmy, że $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$, skąd

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac = 4ab = 2^2 \cdot ab.$$

Stąd wnioskujemy, że liczby ab, bc i ac są kwadratami liczb całkowitych. Niech p będzie liczbą pierwszą, która jest dzielnikiem liczby a. Skoro $\mathrm{NWD}(a, b, c) = 1$, to możemy założyć, że p nie jest dzielnikiem liczby b. Skoro liczba ab jest kwadratem, to wykładnik liczby p w rozkładzie liczby a na czynniki pierwsze (czyli taka liczba całkowita s, że p^s jest dzielnikiem liczby a, zaś p^{s+1} nie jest dzielnikiem liczby a) jest parzysty. Stąd liczba a jest kwadratem. Analogicznie rozumujemy dla liczb b i c.

Zadanie 19.

Dana jest liczba całkowita $k \geqslant 2$ oraz dodatnie liczby całkowite n_1, n_2, $\ldots$, n_k, przy czym dla każdej liczby całkowitej od 1 do k liczba n_{i+1} jest dzielnikiem liczby $2^{n_i} - 1$ (dla $i = k$ przyjmujemy, że $n_{i+1} = n_1$). Wykaż, że $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 1$.

Rozwiązanie: Skorzystamy z następującej obserwacji. Jeśli a oraz n są dodatnimi liczbami całkowitymi oraz $n > 1$, i jeśli s jest najmniejszą dodatnią liczbą całkowitą, taką że liczba $a^s - 1$ jest podzielna przez n, to dla każdej dodatniej liczby całkowitej m, takiej że liczba $a^m - 1$ jest podzielna przez n, liczba s jest dzielnikiem liczby n. Liczbę s nazywamy *rzędem liczby a modulo n*. Zauważmy też, że na mocy Małego Twierdzenia Fermata, dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p, rząd liczby 2 modulo p jest dodatnią liczbą całkowitą, będącą dzielnikiem liczby $p - 1$.

Przejdźmy do rozwiązania zadania. Jeżeli dowolna z liczb n_1, n_2, $\ldots$, n_k jest równa 1, to teza jest oczywista. Załóżmy, że wszystkie te liczby są większe od 1. Skoro są to dzielniki liczb postaci $2^{n_i} - 1$, gdzie $n_i > 1$, to są to liczby nieparzyste. Niech p będzie najmniejszą liczbą w zbiorze wszystkich dzielników pierwszych liczb ze zbioru $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Przyjmijmy, że p jest dzielnikiem pierwszym liczby n_s. Wówczas liczba pierwsza p jest dzielnikiem liczby $2^{n_{s-1}} - 1$ (dla $s = 1$, przyjmijmy $n_{s-1} = n_k$), czyli zgodnie z powyższą obserwacją, liczba n_{s-1} jest wielokrotnością dodatniego dzielnika liczby $p - 1$ (czyli rzędu liczby 2 modulo p). To jednak oznacza, że liczba n_{s-1} ma nieparzysty dzielnik pierwszy mniejszy od p, co przeczy wyborowi p jako najmniejszego spośród dzielników pierwszych liczb ze zbioru $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$.

Uwaga. Dowód obserwacji nie korzystający z języka kongruencji jest następujący. Zakładamy nie wprost, że reszta z dzielenia liczby m przez s jest niezerowa, to znaczy: $m = qs + r$, gdzie q, s są liczbami całkowitymi i $0 < r < s$. Skoro $a^s - 1$ jest liczbą podzielną przez n, to również liczba

$$a^{qs} - 1 = (a^q - 1)(a^{qs-q} + a^{qs-2q} + \ldots + 1)$$

jest podzielna przez n. Zatem

$$a^m - 1 = a^{qs+r} - 1 = a^{qs+r} - a^r + a^r - 1 = a^r(a^{qs} - 1) + a^r - 1,$$

czyli również liczba $a^r - 1$ jest podzielna przez n, co jest niemożliwe. Mamy bowiem $0 < r < s$, co przeczy temu, że s jest rzędem a modulo n. Uzyskana sprzeczność oznacza, że m dzieli się bez reszty przez s.

Warto dodać, że nie dla każdej pary dodatnich liczb całkowitych x, n (oraz $n > 1$) istnieje dodatnia liczba całkowita s, taka że liczba $x^s - 1$ jest podzielna przez n. Okazuje się, że taka liczba s istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{NWD}(x, n) = 1$.

Zadanie 20.

Niech S będzie zbiorem wszystkich trójek dodatnich liczb całkowitych (a, b, c) spełniających równość

$$2a^2 + 3b^3 = 4c^4.$$

Udowodnij, że:

a) Dla każdej trójki (a, b, c) należącej do zbioru S liczby a, b, c są podzielne przez 6.

b) Zbiór S ma nieskończenie wiele elementów.

Rozwiązanie: Przypomnijmy, że kwadraty liczb niepodzielnych przez 3 dają resztę 1 przy dzieleniu przez 3. Niech (a, b, c) będzie trójką liczb należących do zbioru S. Liczba $2a^2 + 3b^3$ daje przy dzieleniu przez 3 resztę 0 lub 2, w zależności od tego, czy liczba a jest podzielna przez 3, czy nie. Liczba $4c^4$ daje przy dzieleniu przez 3 resztę 0 lub 1, w zależności od tego, czy liczba c jest podzielna przez 3, czy nie. Stąd liczby a oraz c są podzielne przez 3. Zatem możemy przyjąć, że $a = 3a_1, c = 3c_1$, dla pewnych dodatnich liczb całkowitych a_1, c_1. Po podzieleniu stron równości $2a^2 + 3b^3 = 4c^4$ przez 3, otrzymujemy

$$6a_1^2 + b^3 = 108c_1^4.$$

Stąd b jest liczbą podzielną przez 3. Zatem liczby a, b, c są podzielne przez 3.

Wróćmy do równości $2a^2+3b^3 = 4c^4$. Wynika z niej od razu, że liczba b jest parzysta. Zatem $b = 2b_2$, dla pewnej dodatniej liczby całkowitej b_2. Po podzieleniu stron wyjściowej równości przez 2 otrzymamy

$$a^2 + 12b_2^3 = 2c^4.$$

Stąd a jest liczbą parzystą, postaci $a = 2a_2$, dla pewnej dodatniej liczby całkowitej a_2, co po ponownym podstawieniu oznacza, że również liczba c jest podzielna przez 2. Wykazaliśmy zatem, że liczby a, b, c są podzielne przez 6.

Wykażmy teraz, że zbiór S jest nieskończony. Wiedząc, że każda z liczb z trójki (a, b, c) jest podzielna przez 6 oraz, że c jest najmniejszą z tych liczb, bez trudu wskazujemy trójkę: $a = 144$, $b = 24$, $c = 12$, spełniającą równanie $2a^2 + 3b^3 = 4c^4$.

Znajdziemy teraz nieskończenie wiele elementów S postaci $(144x, 24y, 12z)$, dla dodatnich liczb całkowitych x, y, z. Aby taka trójka należała do zbioru S wystarczy żeby $x^2 = y^3 = z^4$, co można osiągnąć choćby kładąc

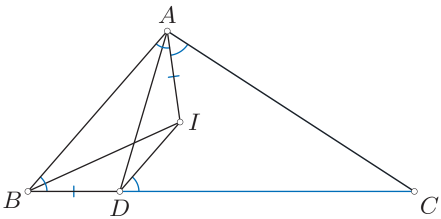
$$(x, y, z) = (k^6, k^4, k^3)$$

dla każdej dodatniej liczby całkowitej k. Zatem zbiór S zawiera każdą trójkę postaci $(144k^6, 24k^4, 12k^3)$, więc jest nieskończony.

Zadanie 21.

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Załóżmy, że zachodzi równość $AC + AI = BC$. Udowodnij, że $\sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle ABC$.

Rozwiązanie: Wybierzmy na boku BC punkt D, taki że $CD = AC$. Z symetrii względem prostej CI uzyskujemy równości $BD = AI = DI$ oraz $\sphericalangle IAC = \sphericalangle IDC$. Wobec równości $\sphericalangle BAI = \sphericalangle IAC$, uzyskujemy również $\sphericalangle IDB + \sphericalangle BAI = 180^\circ$. Zatem na czworokącie $ABDI$ można opisać okrąg.



rys. 4

Ponieważ $BD = AI = DI$, więc łuk BI okręgu opisanego na czworokącie $BDIA$ ma taką samą długość, co łuk AD. Stąd uzyskujemy postulowaną zależność kątów:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD = \sphericalangle BAI = \frac{1}{2} \cdot BAC.$$

Zadanie 22.

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geqslant a + b + c + d.$$

Rozwiązanie: Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną zachodzą nierówności:

$$\frac{a^2}{b} + b \geqslant 2a, \quad \frac{b^2}{c} + c \geqslant 2b, \quad \frac{c^2}{d} + d \geqslant 2c, \quad \frac{d^2}{a} + a \geqslant 2d.$$

Dodając (dodatnie) strony powyższych nierówności oraz redukując wyrazy po obydwu stronach uzyskanej nierówności, otrzymujemy tezę.

Zadanie 23.

Kosma zgubił się w Szczyrku! Dobrym modelem Szczyrku jest płaszczyzna z układem współrzędnych o osiach OX, OY. Kosma ostatni raz był widziany w punkcie $(0,0)$. Wiemy, że co godzinę Kosma wykonuje z jednakowym prawdopodobieństwem krok długości 1 w jednym z czterech kierunków równoległych do osi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po n godzinach Kosma znajdzie się znów na osi OX?

Rozwiązanie: Rozważmy następujące kodowanie ruchów Kosmy. Ruch w górę opiszmy jako 00, ruch w prawo jako 01, ruch w dół opiszmy jako 11 i ruch w lewo — jako 10. Dla przykładu, sekwencję 3 ruchów: dwóch w lewo i jednego w dół prowadzących do punktu $(-2,-1)$ kodujemy jako 101011. Aby Kosma wrócił po n ruchach na oś OX, konieczne jest aby wykonał tyle samo ruchów w górę, co w dół, czyli aby sekwencja cyfr kodująca jego ruch składała się z n zer i n jedynek.

Z drugiej strony każda sekwencja $2n$ cyfr złożona n zer i n jedynek koduje w jednoznaczny sposób pewną sekwencję ruchów Kosmy. Ponadto sekwencja ta prowadzi do osi OX, ponieważ ruchy w prawo i lewo zabierają po tyle samo zer i jedynek.

Wykazaliśmy, że zbiór ścieżek Kosmy prowadzących w n krokach od punktu $(0,0)$ na oś OX jest równoliczny ze zbiorem ciągów zero-jedynkowych długości $2n$, złożonych z n zer i n jedynek. Łącznie ścieżek tych jest więc $\binom{2n}{n}$. Jednocześnie każdy z 2^{2n} możliwych ciągów długości $2n$ ma równą szansę zostać kodem trasy Kosmy. Zatem prawdopodobieństwo, że trafi on po n godzinach na oś OX równe jest $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

Zadanie 24.

Rozwiąż w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z równanie $4^x + 3^y = z^2$.

Rozwiązanie: Zapiszmy wyjściowe równanie w postaci $3^y = (z - 2^x)(z + 2^x)$. Wynika stąd, że liczby $z - 2^x$ oraz $z + 2^x$ są potęgami trójki o wykładnikach będących nieujemnymi liczbami całkowitymi. Zauważmy jednak, że różnica pomiędzy tymi liczbami jest równa 2^{x+1}. Nie jest to liczba podzielna przez 3, więc któryś z wykładników musi wynieść 0, zatem $z - 2^x = 1$ jako mniejszy z dwóch czynników. Mamy stąd $z = 2^x + 1$ oraz $3^y = 2^{x+1} + 1$. Rozważając reszty, jakie potęgi trójki dają przy dzieleniu przez 4 stwierdzamy, że y jest liczbą parzystą. Niech $y = 2k$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą. Wtedy

$$2^{x+1} = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1),$$

czyli jesteśmy w stanie zapisać 2^{x+1} jako iloczyn dwóch potęg dwójki o różnicy 2. Są to więc liczby 2 oraz 4. Stąd $x = 2$ i $k = 1$, czyli $y = 2$ i $z = 5$. Oznacza to, że jedynym rozwiązaniem wyjściowego równania jest trójka $(2,2,5)$.

Zadanie 25.

Znajdź wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, których wszystkie dodatnie dzielniki można wpisać w pola prostokątnej tablicy tak, aby w każdym polu znajdowała się inna liczba, aby sumy liczb w każdym wierszu były równe, i aby sumy liczb w każdej kolumnie były równe.

Rozwiązanie: Jest jasne, że liczba $n = 1$ spełnia warunki zadania. Wykażemy, że jest to jedyne rozwiązanie. Rozważmy liczbę $n > 1$, która ma ab dzielników. Załóżmy nie wprost, że liczba ta spełnia warunki zadania i przypiszmy jej prostokątną tablicę rozmiaru $a \times b$ złożoną z a wierszy i b kolumn, przy czym zakładamy, że $a \geqslant b$ są dodatnimi liczbami całkowitymi. Możemy przyjąć, że $b > 1$, gdyż dla $b = 1$ warunki drugi i trzeci implikują $a = 1$.

Zauważmy, że istnieje co najwyżej $b - 1$ dzielników liczby n większych od $\frac{n}{b}$. Skoro jednak $a > b - 1$, to istnieje kolumna z elementami nie większymi od $\frac{n}{b}$. Suma liczb wpisanych w tej kolumnie jest równa co najwyżej $b \cdot \frac{n}{b} = n$. Z drugiej strony pewna kolumna w tablicy ma jednak sumę wyrazów większą od n, gdyż $b > 1$. Stąd uzyskaliśmy sprzeczność z warunkiem równości sum w kolumnach.

Zadanie 26.

Dana jest liczba $n = 7k + 2$, gdzie k jest pewną dodatnią liczbą całkowitą. Niech

$$x = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1.$$

Udowodnij, że liczba $x^2 + x + 1$ nie ma dzielnika pierwszego większego od x.

Rozwiązanie: Zaczniemy od wykazania, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ jest kwadratem liczby całkowitej. Korzystając umiejętnie ze wzorów skróconego mnożenia, zapisujemy liczbę tą w postaci:

$$\begin{aligned} x &= n(n + 3)(n + 1)(n + 2) + 1 \\ &= n(n + 3)(n^2 + 3n + 2) + 1 \\ &= (n(n + 3)(n(n + 3) + 2) + 1 \\ &= (n(n + 3))^2 + 2n(n + 3) + 1 \\ &= (n(n + 3) + 1)^2. \end{aligned}$$

Liczba x jest zatem kwadratem liczby całkowitej. Podstawiając $t = n(n + 3) + 1$, uzyskujemy $x = t^2$, czyli

$$x^2 + x + 1 = t^4 + t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2 - t^2 = (t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1).$$

Załóżmy nie wprost, że liczba $p > x$ jest dzielnikiem pierwszym liczby $x^2 + x + 1$. Skoro $p > t^2 - t + 1$, to liczba p jest dzielnikiem liczby $t^2 + t + 1$. Z drugiej strony, skoro $t > 1$, to $2p > t^2 + t + 1$. Stąd $p = t^2 + t + 1$. Skoro $n = 7n + 2$, to $t = 49n(n + 1) + 11$ daje resztę 4 z dzielenia przez 7. Zatem liczba p jest podzielna przez 7, co jest niemożliwe, gdyż $p > 7$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 27.

Dany jest trapez $ABCD$, w którym proste AD i BC są równoległe oraz zachodzi równość $AB = BC$. Punkty E i F są środkami odpowiednio odcinków BC i AD. Przypuśćmy, że dwusieczna kąta ABC przechodzi przez punkt F. Wyznacz stosunek długości odcinków BD oraz EF.

Rozwiązanie:

Skoro punkt F leży na dwusiecznej kąta ABC, to $AF = FC$. Z równoległości prostych BC oraz AD wynika zatem, że czworokąt $AFCB$ jest rombem.

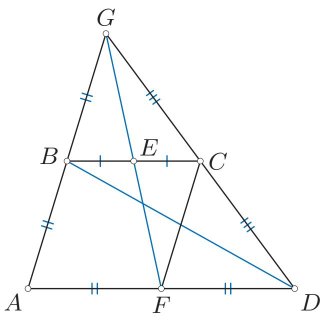
Niech G będzie punktem przecięcia prostych AB i CD. Skoro

$$BE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AF,$$

to z twierdzenia Talesa uzyskujemy

$$BG = AB = AF = FD \quad \text{oraz} \quad CG = CD.$$

Trójkąt GAD jest zatem równoramienny, a GF oraz BD są środkowymi poprowadzonymi z jego podstawy, mającymi zatem tę samą długość. Wiemy też, że $GE = EF$, gdyż BC jest linią środkową w trójkącie GAD. Stąd stosunek długości odcinków BD oraz EF równy jest $2 : 1$.



rys. 5

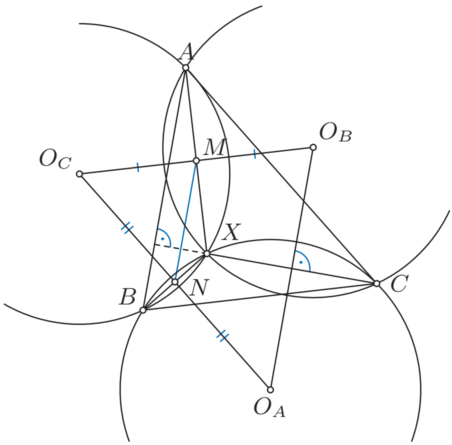
Zadanie 28.

Trzy okręgi o równych promieniach przecinają się w punkcie X oraz przecinają się parami w punktach A, B i C. Udowodnij, że punkt X jest ortocentrum (czyli punktem przecięcia się wysokości) trójkąta ABC.

Rozwiązanie: Niech O_A będzie środkiem okręgu przechodzącego przez punkty B i C. Zdefiniujmy analogicznie środki dwóch pozostałych okręgów: O_B i O_C. Niech punkty M oraz N będą środkami odcinków XA i XB. Zauważmy, że prosta MN jest linią środkową w trójkącie XAB, więc MN jest prostą równoległą do prostej AB.

Trzy rozważane okręgi mają równe promienie, więc czworokąty AO_CXO_B oraz BO_CXO_A są rombami, których przekątne przecinają się odpowiednio w punktach M oraz N. W rezultacie prosta MN jest również linią środkową w trójkącie $O_AO_BO_C$. Stąd prosta MN jest równoległa do prostej O_AO_B.

Proste CX i O_AO_B są prostopadłe, jako przekątne rombu CO_AXO_B zatem prosta CX jest prostopadła do prostej AB. W rezultacie, prosta CX jest wysokością w trójkącie ABC. Analogicznie wykazujemy, że proste AX i BX są wysokościami trójkąta ABC.



rys. 6

Uwaga. Zachęcamy Czytelnika do wykazania, że okręgi opisane odpowiednio na trójkątach $O_AO_BO_C$ oraz ABC mają promienie równe promieniom trzech okręgów, od których bierze początek cała konfiguracja, nazywanych w literaturze *okręgami Johnsona.* Warto również powiązać to zadanie z faktem mówiącym, że odbicia ortocentrum względem boków trójkąta trafiają na okrąg opisany na tym trójkącie.

Zadanie 29.

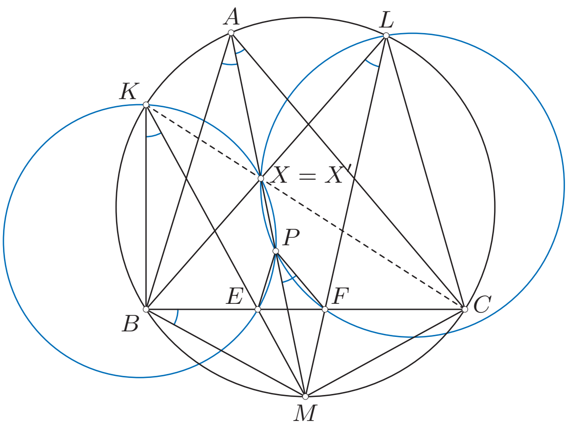
Dany jest trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg ω. Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg ω w punkcie M, różnym od A. Punkt P znajduje się na odcinku AM oraz leży wewnątrz trójkąta ABC. Proste przechodzące przez punkt P i równoległe do prostych AB oraz AC przecinają prostą BC odpowiednio w punktach E i F. Proste ME i MF przecinają okrąg ω odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że proste AM, BL i CK przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostej AM z prostą BL. Z twierdzenia o kącie wpisanym oraz z faktu, że AM jest dwusieczną kąta BAC, otrzymujemy:

$$\sphericalangle XLF = \sphericalangle BLM = \sphericalangle BAM = \sphericalangle MAC = \sphericalangle MPF.$$

Jeśli punkt X leży na odcinku PM, to $\sphericalangle MPF = \sphericalangle XPF$, a jeśli punkt X leży na odcinku AP, to $\sphericalangle XPF + \sphericalangle MPF = 180^\circ$. W obu przypadkach uzyskujemy, że punkty P, X, F i L leżą na jednym okręgu. Jeśli następnie zdefiniujmy punkt X' jako przecięcie prostej AM z prostą CK, to analogiczny rachunek dowodzi, że czwórka punktów P, X', E i K również leży na jednym okręgu. Wykażemy, że $X = X'$.



rys. 7

Potęga punktu M względem okręgu opisanego na czworokącie $PFLX$ równa jest

$$MX \cdot MP = MF \cdot ML.$$

Potęga punktu M względem okręgu opisanego na czworokącie $PEKX'$ jest natomiast równa

$$MX' \cdot MP = ME \cdot MK.$$

Zauważmy dalej, że zachodzą równości:

$$\sphericalangle MBE = \sphericalangle MBC = \sphericalangle MAC = \sphericalangle MAB = \sphericalangle MKB,$$

więc trójkąty MBE i MKB są podobne (cecha kąt–kąt–kąt). Stąd mamy

$$ME \cdot MK = MB^2 = MC^2.$$

Analogicznie uzasadniamy, że trójkąty MCF i MCL są podobne, skąd

$$MF \cdot ML = MC^2.$$

Stąd uzyskujemy ostatecznie

$$ME \cdot MK = MF \cdot ML.$$

Łącząc wszystkie uzyskane równości mamy

$$MX \cdot MP = MF \cdot ML = MC^2 = MB^2 = ME \cdot MK = MX' \cdot MP,$$

więc $MX = MX'$ i w konsekwencji $X = X'$, co kończy dowód.

Zadanie 30.

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c spełniające układ równań

$$\begin{cases} ab = c - a - b, \\ cb = a - b - c, \\ ac = b - a - c. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Rozważmy najpierw przypadek gdy jedna z liczb a, b, c jest zerem. Gdy $a = 0$, wtedy z dwóch pierwszych równań wynika, że $c = b$ oraz $b^2 = 2b$, czyli albo $b = 0$, albo $b = 2$. Bezpośrednio sprawdzamy, że trójki $(0, 0, 0)$ i $(0, 2, 2)$ spełniają rozważany układ równań. Rozpatrując przypadki $b = 0$ oraz $c = 0$, otrzymujemy kolejne rozwiązania $(2, 0, 2)$ oraz $(2, 2, 0)$.

Jeżeli żadna z liczb a, b, c nie jest zerem, to dodając do pierwszego równania drugie, otrzymujemy $ab + cb = -2b$, czyli $a + c = -2$. Analogicznie uzyskujemy $a + b = -2$ oraz $b + c = -2$. Wynika stąd, że $a - c = 0$, więc $2a = -2$. Stąd otrzymujemy rozwiązanie $(-1, -1, -1)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że również ta trójka spełnia wyjściowy układ równań.

Rozwiązaniami układu równań są więc trójki $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 2)$, $(2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$ oraz $(-1, -1, -1)$.

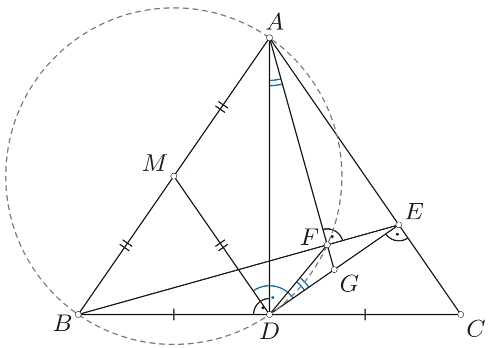
Zadanie 31.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB = AC$. Punkt D jest środkiem boku BC, a punkt E jest rzutem prostokątnym punktu D na prostą AC. Prosta BE przecina okrąg opisany na trójkącie ABD w punkcie F. Proste DE i AF przecinają się w punkcie G. Wykaż, że $DG = GE$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $\sphericalangle BDA = \sphericalangle BFA = 90^\circ = \sphericalangle EFA = \sphericalangle GEA$, więc trójkąty GEA i GFE są podobne (cecha kąt–kąt–kąt). Zatem $GE^2 = GF \cdot GA$.

Niech punkt M będzie środkiem odcinka AB. Zauważmy, że prosta MD jest linią środkową w trójkącie ABC. Z tego, że prosta DE jest prostopadła do prostej AC wnioskujemy, że $\sphericalangle MDE = 90^\circ$. Stąd prosta DE jest styczną do okręgu o środku M i promieniu $MA = MB = MD$, gdyż AB jest średnicą tego okręgu. Z twierdzenia o stycznej i siecznej wnioskujemy, że $\sphericalangle GDF = \sphericalangle DAG$, więc trójkąty DGA oraz FGD są podobne (cecha kąt–kąt–kąt). Zatem $GD^2 = GF \cdot GA$. Łącząc otrzymaną równość z równością $GE^2 = GF \cdot GA$, otrzymujemy $DG = GE$.



rys. 8

Zadanie 32.

Pewne miasto ma n skrzyżowań. Z każdego z nich wychodzą 4 (niekoniecznie proste) ulice, przy czym możliwe jest, że więcej niż jedna ulica łączy te same dwa skrzyżowania. Zakładamy jednak, że wszystko dzieje się na płaszczyźnie, więc żadna ulica nie może przejść pod lub nad inną. Dwóch turystów rozpoczyna swoje wędrówki na pewnych dwóch skrzyżowaniach. Na początku każdy wybiera ulicę, w którą wchodzi i przechodzi przez nią. Od tego momentu każdy z turystów, gdy dojdzie do skrzyżowania, ignoruje drogi najbliżej na swoje lewo i prawo, i kontynuuje pozostałą drogą.

Każdy z turystów zatrzymuje się, gdy napotka skrzyżowanie, z którego rozpoczął podróż, dochodząc do niego z tej przeciwnej strony niż ta, z której zaczął (innymi słowy — od razu zanim wejdzie ponownie w pierwszą ulicę, którą przechodził). Okazuje się, że każde skrzyżowanie zostało odwiedzone dokładnie raz, przez dokładnie jednego turystę. Udowodnij, że n jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie: Załóżmy nie wprost, że n jest liczbą nieparzystą. Skoro każde skrzyżowanie zostało odwiedzone dokładnie raz, to któryś z turystów musiał odwiedzić nieparzystą liczbę skrzyżowań. Trasa, którą przeszedł, dzieli miasto na dwa obszary – ten ograniczony przez trasę, i ten na jej zewnątrz. Trasa drugiego turysty nie może przeciąć trasy pierwszego, skoro nie odwiedzili wspólnie żadnego skrzyżowania. Zatem drugi turysta poruszał się w pełni wewnątrz jednego z dwóch obszarów.

Załóżmy, że drugi turysta poruszał się na zewnątrz trasy pierwszego turysty. Drugi przypadek można rozpatrzeć analogicznie. W rozważanym przypadku w obszarze wewnątrz trasy pierwszego turysty nie mogą znajdować się żadne skrzyżowania, bo żaden z turystów nie miałby jak do nich trafić. Zatem wszystkie ulice w tym obszarze łączą pewne dwa skrzyżowania z trasy pierwszego turysty. Z jego sposobu podróżowania wiemy natomiast, że z każdego skrzyżowania na tej trasie wychodzi dokładnie jedna ulica do wewnątrz. Zatem ulice wewnątrz tego obszaru łączą dokładnie skrzyżowania pierwszego turysty w pary, więc musi ich być parzyście wiele. Zakładaliśmy jednak, że długość jego trasy jest nieparzysta. Uzyskana sprzeczność pokazuje, że n musi być liczbą parzystą.

Zadanie 33.

Marek gra w *Biegacza Labiryntów*. Gracz musi przejść robotem z lewego dolnego rogu kwadratowej planszy rozmiaru $n \times n$ do prawego górnego rogu. Plansza jest podzielona na jednostkowe pola, których pewne krawędzie są ścianami, przez które robot nie może przejść (należy do nich cały obwód szachownicy). Gracz kontroluje robota pilotem z czterema przyciskami, którymi może sprawić żeby przeszedł na górne, dolne, lewe lub prawe pole sąsiadujące z polem, na którym stoi. Gdy gracz każe robotowi przejść na pole, od którego jest oddzielony ścianą, robot stoi w miejscu. Marek ma dwa zestawy gry (z różnymi labiryntami, o różnych wymiarach), ale tylko jednego pilota, którym kontroluje oba roboty. Wykaż, że może on doprowadzić jednocześnie oba roboty do prawych górnych pól odpowiadających im plansz.

Rozwiązanie:

Niech *odległość* robota oznacza najmniejszą możliwą liczbę ruchów, która ustawi go na jego mecie. Oznaczmy roboty literami A i B. Będziemy rozważać sumę odległości obu robotów, którą nazwijmy *wynikiem* pozycji – oczywiście Marek wygra dokładnie wtedy, gdy uda mu się uzyskać wynik 0. Niech Marek dowolną sekwencją ruchów doprowadzi robota A do jego mety. Wykażemy, że jeśli robot B nie stoi jeszcze na swojej mecie, to Marek może nim do niej dojść, zmniejszając wynik pozycji.

Załóżmy więc, że aktualny wynik (równy odległości robota B) wynosi w, i niech Marek doprowadzi robota B do swojej mety w w ruchach. W ten sposób robot A przesunął się maksymalnie w razy. Gdyby jednak w każdym ruchu A się przesuwał (zamiast bycia blokowanym przez ścianę labiryntu), to pokonałby dokładnie taką samą trasę jak B, więc pod koniec sekwencji znalazłby się wyżej lub bardziej na prawo od pola, z którego zaczynał. Tym polem było jednak prawe górne pole jego planszy, więc taka sytuacja jest niemożliwa. Zatem A musiał poruszyć się maksymalnie $w - 1$ razy, więc wynik pozycji po ruchach Marka wynosi maksymalnie $w - 1$.

Powtarzając to rozumowanie, na przemian doprowadzając roboty do ich met, Marek może zmniejszać wynik dopóki jest on liczbą dodatnią. W końcu zatem musi uzyskać wynik 0, i zarazem wygrać grę.

Zadanie 34.

Dwuosobowa gra rozgrywa się na $2n \geqslant 4$ punktach, przy czym żadne trzy z nich nie są współliniowe. Każdy ruch polega na wybraniu dwóch z tych punktów i narysowaniu łączącego je odcinka. Przegrywa pierwszy gracz, który narysuje krawędź tworzącą łamaną zamkniętą złożoną z nieparzystej liczby odcinków. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n, takie że pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

Rozwiązanie: Wykażemy, że pierwszy gracz ma strategię wygrywającą dokładnie wtedy, gdy n jest nieparzyste. Załóżmy najpierw, że n jest parzyste. Wskażemy strategię, która pozwala drugiemu graczowi na wygraną. Najpierw jednak zauważmy, że zezwolenie temu graczowi na przesuwanie punktów po płaszczyźnie w dowolnym momencie gry nie wpływa w żaden istotny sposób na jej wynik. Od teraz zatem, stawiając się w perspektywie drugiego gracza, będziemy zakładać, że możemy przesuwać punkty, oczywiście wraz ze wszystkimi wychodzącymi z nimi odcinkami.

Niech od razu przesunie on punkty w pozycje $A_i = (1, i)$ i $B_i = (-1, i)$ dla $i = 1, \ldots, n$. W ten sposób początkowa pozycja gry będzie symetryczna względem osi OY. Od teraz, przy naszej strategii, pozycja po naszym ruchu będzie spełniała następujące warunki:

1. Pozycja jest symetryczna względem osi OY,

2. Każda narysowana krawędź biegnie od jednego z A_i do jednego z B_j,

3. Dla dowolnego i jeśli z punktów A_i i B_i wychodzą jakieś krawędzie, to można te punkty połączyć łamaną złożoną z narysowanych krawędzi.

Zauważmy od razu, że warunek 2. zapewnia, że po naszym ruchu nie będzie żadnych cykli nieparzystej długości, więc jeśli będziemy w stanie spełniać te warunki po każdym swoim ruchu, wygramy.

Załóżmy zatem, że pewna pozycja spełnia te własności, i nasz przeciwnik wykonuje ruch. W nawiasie wpisujemy ruch przeciwnika, a dalej opisujemy naszą odpowiedź.

1. (A_iB_j dla $i \neq j$, gdzie z tych punktów nie wychodziły wcześniej krawędzie.) Z warunku 1. z punktów A_j i B_i nie wychodzą żadne krawędzie. Dorysujmy zatem krawędź A_iB_j, a następnie zamieńmy miejscami punkty B_i i B_j, aby warunek 3. był zachowany.

2. (A_iB_j dla $i \neq j$, gdzie z punktów wychodziły już jakieś krawędzie.) Dorysujmy po prostu krawędź A_jB_i.

3. (A_iB_i dla pewnego i) Połączmy dowolną inną parę punktów o równej drugiej współrzędnej, które nie są jeszcze połączone.

4. (A_iA_j dla pewnych i, j, gdzie z punktów nie wychodziły jeszcze krawędzie.) Z warunku 1. z punktów B_i, B_j również nie wychodzą krawędzie. Zamieńmy miejscami A_i z B_j, i dorysujmy krawędź A_iB_i.

5. (A_iA_j dla pewnych i, j, gdzie z A_j wychodziły już jakieś krawędzie.) Zamieniając miejscami pary punktów A_x, B_x z A_y, B_y, możemy założyć, że dorysowana została krawędź A_1A_n. Można do tego zapewnić, że z punktu A_1 przed wprowadzeniem tej krawędzi można było dojść krawędziami dokładnie do punktów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ spośród punktów postaci A_x. Jasne, że jednym z tych punktów nie może być A_n, bo ścieżka z punktu A_1 do A_n byłaby parzystej długości, i przeciwnik stworzyłby nieparzysty cykl. Z warunku 3. wiemy natomiast, że ignorując A_1A_n z punktu A_1 można dojść dokładnie do $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k$, lub wychodzi z niego tylko odcinek A_1A_n. W obu przypadkach możemy zamienić miejscami punkty $A_1, A_2, \ldots, A_k$ z $B_1, B_2, \ldots, B_k$, i następnie dorysować krawędź A_1B_n.

Nietrudno jest sprawdzić, że grając tą strategią zachowujemy wszystkie trzy warunki, i że zawsze odcinek, który każe nam ona narysować, nie jest jeszcze narysowany. Należy tylko wyjaśnić, dlaczego w przypadku 3. znajdziemy inną, jeszcze nienarysowaną krawędź takiej postaci. W tym celu rozważmy liczbę narysowanych odcinków postaci A_iB_i. Jeśli porównamy ją po naszym pewnym ruchu i po naszym następnym ruchu, to zawsze albo zostaje taka sama, albo wzrasta o 2. Zatem po naszym ruchu zawsze jest ona parzysta. Skoro n jest parzyste, to damy radę zawsze odpowiedzieć na ruch przeciwnika w przypadku 3. To kończy prezentację strategii, i dowodzi, że dla parzystych n drugi gracz może zagwarantować sobie wygraną.

Rozważmy teraz przypadek, gdy n jest nieparzyste. Wtedy pierwszy gracz może również ustawić punkty w pozycjach A_i i B_i i w pierwszym swoim ruchu zaznaczyć krawędź A_1B_1, a następnie stosować się do strategii przedstawionej powyżej. W ten sposób to po jego ruchach spełnione będą trzy rozważane warunki, więc to on zawsze będzie miał dobrą odpowiedź na ruch przeciwnika. Przypadek 3 nadal nie stanowi problemu, ponieważ odcinków postaci A_iB_i będzie zawsze nieparzyście wiele po ruchu pierwszego gracza, a n jest nieparzyste.

Uwaga. Użycie terminologii i pewnych faktów pochodzących z teorii grafów pozwala nam znacznie lepiej umotywować przedstawione rozwiązanie. Znany jest fakt mówiący, że graf nie zawiera cykli nieparzystej długości dokładnie wtedy, gdy jest dwudzielny. Zatem jedyną pozycją, w której któryś z graczy jest zmuszony przegrać, jest pełny graf dwudzielny, to znaczy — graf złożony ze wszystkich krawędzi między pewnymi a wierzchołkami, a pozostałymi $2n-a$ wierzchołkami. W pewnym momencie gry gracze dojdą zatem do takiego grafu, a następny ruch zakończy grę. Opisana wyżej strategia stara się zapewnić, że tym grafem dwudzielnym będzie graf między n wierzchołkami, a n innymi wierzchołkami. Robi to zapewniając, że w każdym momencie wszystkie spójne składowe grafu są albo pojedynczymi wierzchołkami, albo grafami dwudzielnymi o takiej samej liczbie wierzchołków z obu stron.