Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów — poziom OM

Matematyczna
Olimpiada
Juniorów
www.omj.edu.pl

9–16 czerwca 2024 r.

Skład komputerowy: Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Witold Sikora

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów (poziom OM) przeprowadzono w dniach 9-16 czerwca 2024 r. w Domu Rekolekcyjno-Konferencyjnym „Wieczernik” w Świętej Katarzynie (woj. świętokrzyskie). Do udziału w Obozie zakwalifikowano uczniów z klas 7-8 szkół podstawowych z najlepszymi wynikami w XIX OMJ.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej, pracując zarówno indywidualnie, jak i w grupach. Popołudnia poświęcone były na wykłady tematyczne i zajęcia warsztatowe. W piątek odbył się spacer do Świętokrzyskiego Parku Narodowego, a w sobotę przeprowadzony został mecz matematyczny.

W niniejszym opracowaniu zebrane są zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów zwłaszcza w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej dla szkół ponadpodstawowych.

Trudność niektórych zadań, z którymi mierzyli się uczestnicy Obozu, przewyższa zdecydowanie poziom zawodów finałowych OMJ. Wychodząc (niekiedy wyraźnie) poza program merytoryczny Olimpiady, staraliśmy się wskazać niektóre podstawowe narzędzia przydatne na poziomie międzynarodowych zawodów matematycznych rozgrywanych na poziomie juniorskim (obejmujących także uczniów szkół średnich) oraz na zawodach pierwszego i drugiego stopnia Olimpiady Matematycznej.

Miłej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OM)

Uczniowie: Baniel Bereza, Aleksander Dembny, Piotr Dybich, Marek Konieczny, Jan Kropidłowski, Krzysztof Kowalik, Maksymilian Kuś, Mateusz Łukaszewicz, Artur Smoleński, Szymon Michalik, Aleksander Rotkiewicz, Maria Reluga, Mikołaj Rosowski, Jan Sałkowski, Krzysztof Suligowski, Witold Swacha, Lili Teodorowicz, Piotr Wesołowski, Piotr Zalewski, Igor Żuk.

Kadra: Paweł Dziuba (kierownik), Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Antoni Łuczak, Arkadiusz Męcel, Miłosz Płatek, Witold Sikora.

Rozkład ocen za rozwiązania zadań indywidualnych

Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

	6 p.	5 p.	2 p.	0 p.
1.	4	9	1	6
2.	3	0	2	15
3.	1	5	1	13
4.	8	0	2	10
5.	0	2	1	17
6.	0	0	0	20
7.	13	0	1	6
8.	2	4	2	12
9.	2	1	0	17
10.	0	3	1	16
11.	1	0	1	18
12.	14	3	0	3
13.	10	2	3	5
14.	3	2	3	12
15.	7	2	0	11
16.	1	1	1	17
17.	11	2	1	6
18.	9	0	3	8
19.	8	2	1	9
20.	0	0	0	20

Zadania 21-38 rozwiązywane były w ramach pracy grupowej.

Treści zadań

Zadanie 1.

Dana jest taka liczba rzeczywista x, że liczby x^3 oraz $x^2 + x$ są wymierne. Wykaż, że x jest liczbą wymierną.

Zadanie 2.

Czworokąt $ABCD$ niebędący trapezem jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O. Jego przekątne są prostopadłe i przecinają się w punkcie P. Punkty M i N to środki odpowiednio boków AB i CD. Wykaż, że $MO = NP$.

Zadanie 3.

Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *fajną*, jeśli dla dowolnych jej dzielników a, b spełniających $1 < a < b < n$ różnica $b - a$ jest również dzielnikiem n. Znajdź wszystkie liczby fajne.

Zadanie 4.

Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Liczby $1, 2, \ldots, 2n$ zostały podzielone na dwa ciągi spełniające warunki

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n \quad \text{oraz} \quad b_1 > b_2 > \ldots > b_n.$$

Udowodnij, że liczba

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 5.

Na tablicy napisane są liczby 20 i 24. Co minutę każda z liczb jest zwiększana o 1 albo podnoszona do kwadratu. Na przykład, po minucie na tablicy mogą być liczby 400 i 25. Czy jest możliwe, że w pewnym momencie liczby na tablicy będą sobie równe?

Zadanie 6.

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach F, D, E. Oznaczmy środki okręgów wpisanych w trójkąty DEF, AEF, BDF odpowiednio przez I, S, T. Wykaż, że punkty I i F są symetryczne względem prostej ST.

Zadanie 7.

Asia i Basia grają w grę używając pudełka, w którym na początku jest n cukierków. Ruch polega na wyciągnięciu z pudełka dowolnej liczby cukierków i spełniającej warunki

$$\mathrm{NWD}(k,i)=1 \qquad \text{i} \qquad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

gdzie k oznacza liczbę cukierków znajdującą się w pudełku bezpośrednio przed ruchem. Zaczynając od Asi, dziewczynki wykonują ruchy na przemian dopóki któraś nie wyciągnie ostatniego cukierka — tym samym wygrywając grę. W zależności od n rozstrzygnij, która dziewczynka może zapewnić sobie zwycięstwo.

Zadanie 8.

Rozważmy ciąg liczb rzeczywistych (x_n) spełniający warunki $x_1 = 20, x_2 = 24$ oraz

$$x_{n+2} = \begin{cases} x_n - \frac{1}{x_{n+1}}, & \text{gdy } x_{n+1} \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x_{n+1} = 0. \end{cases}$$

dla $n \geqslant 1$. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą k, dla której $x_k = 0$, lub udowodnij, że taka liczba k nie istnieje.

Zadanie 9.

Punkt D leżący wewnątrz trójkąta ABC spełnia warunek $AD = DB$. Proste CD i AB przecinają się w punkcie E spełniającym

$$\frac{CD}{CE} = \frac{EB}{AE}.$$

Wykaż, że trójkąt AEC jest równoramienny.

Zadanie 10.

Dany jest nieskończony ciąg (a_n) dodatnich liczb całkowitych spełniający dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zależność

$$a_{n+1} = 2a_n + 1.$$

Udowodnij, że pewien wyraz tego ciągu jest liczbą złożoną.

Zadanie 11.

W pewnym kraju jest n miast, z których niektóre są połączone drogami dwukierunkowymi. Z każdego miasta można dostać się do każdego innego używając pewnej liczby dróg. Co więcej, wiemy, że z każdego miasta wychodzą drogi do co najmniej d innych miast. Wykaż, że z dowolnego miasta można przejść do dowolnego innego przechodząc przez maksymalnie $3n/d$ innych miast.

Zadanie 12.

Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x = (y+1)^2 \\ y = (x+1)^2 \end{cases}$$

Zadanie 13.

W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ o boku 1 na przekątnej BD zaznaczamy punkt P, a na przekątnej DF zaznaczamy punkt Q tak, że

$$BP = QD = 1.$$

Wykaż, że punkty C, P, Q są współliniowe.

Zadanie 14.

Pola szachownicy o wymiarach $n \times n$ pomalowano w standardowy sposób na biało i czarno. *Ruchem* nazywamy wybranie kwadratu 2×2 na szachownicy i zmienienie kolorów jego pól na kolory przeciwne. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych $n \geqslant 2$ pewną liczbą ruchów możemy sprawić, by cała szachownica była w jednym kolorze?

Zadanie 15.

Trzy cięciwy pewnego okręgu o środku w punkcie O przecinają się w jednym punkcie, różnym od O, przy czym każde dwie z tych cięciw przecinają się pod kątem 60°. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach w środkach tych trzech cięciw jest równoboczny.

Zadanie 16.

Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) spełniających podzielności

$$a^2 + b^2 \mid a^3 + b \qquad \text{i} \qquad a^2 + b^2 \mid a + b^3.$$

Zadanie 17.

Dodatnią liczbę całkowitą nazwiemy *fikuśną*, jeżeli ma 70 cyfr i każda z cyfr od 1 do 7 pojawia się w jej zapisie dziesiętnym dokładnie 10 razy. Udowodnij, że żadna liczba fikuśna nie dzieli innej liczby fikuśnej.

Zadanie 18.

Dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, e spełniają równość $abcde = a + b + c + d + e$. Znajdź największą możliwą wartość $\max\{a, b, c, d, e\}$.

Zadanie 19.

Na okręgu zaznaczono 101 parami różnych punktów. Następnie każdą z cięciw o końcach w tych punktach pokolorowano na jeden z 11 kolorów, przy czym użyto co najmniej dwóch różnych kolorów. Udowodnij, że pewien trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach ma dwa boki jednego koloru, a trzeci — innego.

Zadanie 20.

Niech M będzie środkiem boku BC trójkąta ABC. Okrąg opisany na trójkącie ABM przecina odcinek AC po raz drugi w punkcie D. Okrąg opisany na trójkącie AMC przecina natomiast odcinek AB po raz drugi w punkcie E. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie ADE leży na symetralnej odcinka BC.

Zawody drużynowe

Zadanie 21.

Dwusieczna kąta ACB trójkąta ABC przecina okrąg na nim opisany w punkcie W. Okrąg o środku w punkcie W przechodzący przez punkt C przecina prostą AC po raz drugi w punkcie D. Wykaż, że $AD = BC$.

Zadanie 22.

Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na jeden z trzech kolorów. Wykaż, że w rezultacie pewien trójkąt prostokątny ma jednokolorowe wierzchołki.

Zadanie 23.

Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c} \geqslant 2.$$

Zadanie 24.

Parę dodatnich liczb całkowitych (a, b) nazywamy *mraśną*, jeżeli w rozkładzie na czynniki pierwsze liczb a i b występują dokładnie te same liczby pierwsze. Udowodnij, że jest nieskończenie wiele par różnych liczb całkowitych (m, n), dla których pary (m, n) oraz $(m+1, n+1)$ są mraśne.

Zadanie 25.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Oznaczmy przez D spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Punkty E i F różne od D leżą na pewnej prostej przechodzącej przez punkt D, przy czym spełnione są równości $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AFC = 90^\circ$. Oznaczmy przez M i N odpowiednio środki odcinków BC i EF. Udowodnij, że prosta AN jest prostopadła do prostej NM.

Zadanie 26.

Dla dodatniej liczby nieparzystej n pola szachownicy o wymiarach $n \times n$ pokolorowano na pewną liczbę kolorów. Okazało się, że w każdym kwadracie 2×2 pewne dwa pola są tego samego koloru. Wykaż, że największa możliwa liczba kolorów, jaka mogła zostać użyta, to

$$\frac{n^2 + 2n - 1}{2}.$$

Mecz matematyczny

Zadanie 27.

Rozważmy trójkąt ABC, dla którego spełniony jest warunek $2AB = BC + AC$. Wybierzmy punkt L na boku AB, dla którego prosta CL to dwusieczna kąta ACB. Okrąg styczny do prostej CL w punkcie L przechodzący przez punkt A przecina odcinek odcinka AC w punkcie X, a okrąg styczny do prostej CL w punkcie L przechodzący przez punkt B przecina odcinek BC w punkcie Y. Wykaż, że środek odcinka CL jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CXY.

Zadanie 28.

Okręgi Ω i Γ są styczne zewnętrznie, a prosta l jest jedną z ich dwóch wspólnych stycznych zewnętrznych. Oznaczmy punkt styczności prostej l z okręgiem Ω przez X. Niech AX będzie średnicą okręgu Ω. Prosta przechodząca przez punkt A jest styczna do okręgu Γ w punkcie B. Udowodnij, że $AB = AX$.

Zadanie 29.

Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Prosta równoległa do prostej CH przecina proste AB, AC odpowiednio w punktach D, E. Załóżmy, że środek M odcinka DE leży na okręgu opisanym na trójkącie BDH. Wykaż, że $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$.

Zadanie 30.

Wykaż, że każdą dodatnią liczbę całkowitą można zapisać jako sumę pewnej liczby składników postaci $2^a 3^b$, gdzie a, b są nieujemnymi liczbami całkowitymi, w taki sposób, by żaden ze składników nie był wielokrotnością innego.

Zadanie 31.

Dla każdej liczby całkowitej od 1 do 1000 obliczono iloczyn jej niezerowych cyfr. Następnie dodano wszystkie uzyskane wyniki. Wykaż, że uzyskana suma jest sześcianem liczby całkowitej.

Zadanie 32.

Załóżmy, że dodatnie liczby całkowite x i y spełniają równanie

$$x^2 + x + 1 = 3y^2.$$

Wykaż, że liczba $2y - 1$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 33.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x+y)^3 = -z \\ (y+z)^3 = -x \\ (z+x)^3 = -y \end{cases}$$

dla parami różnych liczb rzeczywistych x, y, z.

Zadanie 34.

Wykaż, że dla dowolnych parami różnych nieujemnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi

$$\frac{x^2}{(y-z)^2} + \frac{y^2}{(z-x)^2} + \frac{z^2}{(x-y)^2} \geqslant 2.$$

Zadanie 35.

W tablicę o wymiarach $n \times n$ wpisano parami różne liczby rzeczywiste. Asia i Basia dostały po jednej kopii tej tablicy. Asia co minutę zapisuje na kartce największą liczbę widoczną w jej tablicy, a następnie zmazuje ją wraz z wszystkimi liczbami w jej kolumnie i w jej wierszu. Basia postępuje podobnie ze swoją tablicą, w każdej minucie rozważając najmniejszą widoczną liczbę. Po n minutach, gdy tablice są puste, każda z dziewczynek dodaje zapisane przez siebie liczby. Wykaż, że wynik Asi nie będzie mniejszy od wyniku Basi.

Zadanie 36.

Na polach nieskończonej szachownicy położono pewną (skończoną) liczbę kamieni. Jeśli na jakimś polu leżą co najmniej 4 kamienie, możemy zabrać z niego 4 kamienie i rozłożyć po jednym na pola sąsiednie. Wykaż, że niezależnie od naszych wyborów po pewnej liczbie takich operacji na każdym polu będą maksymalnie 3 kamienie.

Zadanie 37.

Na okrągłym stole leży 2024 działających zegarów wskazówkowych. Oznaczmy przez d sumę odległości od środka stołu do środków tarczy tych zegarów. Udowodnij, że w pewnym momencie suma odległości między środkiem stołu, a końcami wskazówek minutowych, będzie nie mniejsza niż d.

Zadanie 38.

Na okręgu leży 1000 pudełek, każde zawierające pewną liczbę żetonów. W jednym ruchu możemy wyjąć wszystkie żetony z dowolnego pudełka i rozmieścić je, umieszczając po jednym żetonie w kolejnych pudełkach — zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Wykaż, że dowolny początkowy rozkład 2024 żetonów w pudełkach można przekształcić w dowolny inny rozkład za pomocą ciągu ruchów opisanych wyżej.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Dana jest taka liczba rzeczywista x, że liczby x^3 oraz x^2+x są wymierne. Wykaż, że x jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie: Dla dowolnych liczb wymiernych a, b suma $a+b$ jest liczbą wymierną, a jeśli $b \neq 0$ to również iloraz $\frac{a}{b}$ ma tę własność. Ponieważ

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

więc liczbę x można wyrazić jako iloraz liczby wymiernej oraz niezerowej liczby wymiernej postaci

$$\frac{x^3+x^2+x}{x^2+x+1}=x,$$

co oznacza, że x jest liczbą wymierną.

Zadanie 2.

Czworokąt $ABCD$ niebędący trapezem jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O. Jego przekątne są prostopadłe i przecinają się w punkcie P. Punkty M i N to środki odpowiednio boków AB i CD. Wykaż, że $MO=NP$.

Rozwiązanie: Sposób I

Udowodnimy, że proste PM oraz ON są równoległe. Niech prosta MP przecina odcinek CD w punkcie X. Skoro $\sphericalangle APB=90^\circ$, to $AM=PM=BM$, więc

$$\begin{aligned}
\sphericalangle PXC &= 180^\circ-\sphericalangle PCX-\sphericalangle XPC\\
&= \sphericalangle MPC-\sphericalangle ACD\\
&= 90^\circ+\sphericalangle MPB-\sphericalangle ABD\\
&= 90^\circ+\sphericalangle MPB-\sphericalangle MBP\\
&= 90^\circ.
\end{aligned}$$

Skoro proste NO oraz CD są prostopadłe, to w istocie dostajemy równoległość NO oraz MP. Analogicznie uzasadniamy, że proste NP oraz MO są równoległe, a skoro czworokąt $ABCD$ nie jest trapezem, to punkty P, N, O, M nie leżą na jednej prostej. Zatem czworokąt $NPOM$ jest równoległobokiem, skąd wynika równość $MO=NP$.

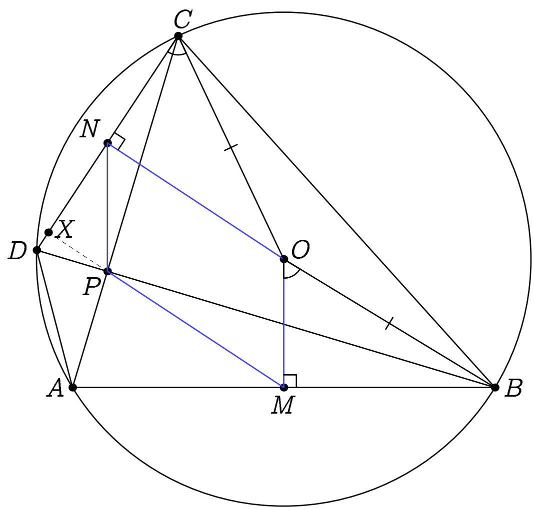
Sposób II

Skoro $\sphericalangle CPD = 90^\circ$ oraz punkt N jest środkiem przyprostokątnej CD, to wiadomo, że $PN = CN$. Wykażemy, że trójkąty MBO i NOC są przystające, korzystając z cechy kąt–bok–kąt. Istotnie, mamy $\sphericalangle OMB = \sphericalangle CNO = 90^\circ$ oraz $CO = BO$, więc pozostaje sprawdzić że

$$\sphericalangle MOB = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB = 90^\circ - \sphericalangle DBC = 90^\circ - \sphericalangle NOC = \sphericalangle NCO.$$

Zatem istotnie trójkąty MBO oraz NOC są przystające, a stąd $MO = NC = NP$.

Uwaga: Tym sposobem udowodniliśmy tezę również w przypadku, gdy czworokąt $ABCD$ jest trapezem.



Zadanie 3.

Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *fajną*, jeśli dla dowolnych jej dzielników a, b spełniających $1 < a < b < n$ różnica $b - a$ jest również dzielnikiem n. Znajdź wszystkie liczby fajne.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że zarówno liczba 1, jak i wszystkie liczby pierwsze oraz kwadraty liczb pierwszych są fajne, ponieważ nie mają dzielników spełniających nierówności z treści zadania. Łatwo sprawdzić, że liczby 8, 6 i 12 również są fajne. Wykażemy, że powyższa lista obejmuje wszystkie liczby fajne.

Sposób I

Przypuśćmy nie wprost, że pewna liczba x różna od wymienionych powyżej jest fajna. Rozważmy osobno przypadek, gdy x ma dokładnie jeden dzielnik pierwszy.

Niech więc $x = p^m$, dla pewnej liczby pierwszej p. Jeśli $p = 2$, to wykluczając liczby wskazane wcześniej, mamy $m \geqslant 4$. Wtedy jednak liczba $2^3 - 2 = 6$ dzieli potęgę dwójki, co nie jest możliwe.

Jeśli natomiast $p > 2$, to ponownie wykluczając liczby pierwsze oraz ich kwadraty, mamy $m \geqslant 3$, a zatem $p^2 - p = p(p-1)$ jest dzielnikiem liczby x. Wynika stąd, że $p - 1 > 1$ jest dzielnikiem potęgi p, względnie pierwszym z p, co daje sprzeczność.

Pozostał do rozważenia przypadek, w którym x ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze. Oznaczmy pewne dwa z nich przez p i q tak, aby $p > q$. Zauważmy, że

$$x > \frac{x}{q} > \frac{x}{p} > 1$$

to dzielniki x. Zatem

$$\frac{x(p-q)}{qp} = \frac{x}{q} - \frac{x}{p}$$

również dzieli x. Oznacza to, że liczba $pq/(p-q)$ jest całkowita, czyli

$$p - q \,|\, pq.$$

Liczba $p - q$ nie dzieli się przez p ani q, więc jest względnie pierwsza z pq. Zatem powyższa podzielność może mieć miejsce tylko w przypadku $p - q = 1$. Jest to możliwe wyłącznie wtedy, gdy $p = 3$ i $q = 2$, więc liczba x jest postaci $2^a 3^b$, gdzie $a, b \geqslant 1$. Nie każda liczba tej postaci jest jednak fajna, co uzasadnimy niżej.

Gdyby $a \geqslant 3$, to liczba $5 = 8 - 3$ dzieliłaby $2^a 3^b$, co nie jest możliwe. Gdyby zaś zachodził warunek $b \geqslant 2$, to liczba $7 = 9 - 2$ dzieliłaby $2^a 3^b$, co nie jest prawdą. Wynika stąd, że $a \leqslant 2$ i $b = 1$, a zatem $x = 6$ lub $x = 12$. To kończy dowód.

Sposób II

Podobnie jak w pierwszym sposobie sprawdzamy, że spośród potęg dwójki tylko $1, 2, 4$ i 8 są fajne, a także że liczby pierwsze i ich kwadraty są fajne. Niech n będzie inną liczbą fajną. Gdyby n była nieparzysta, to różnica dowolnych jej dwóch dzielników byłaby parzysta, więc nie dzieliłaby n. Zatem liczba n jest parzysta, więc skoro jest fajna, to liczba $n/2 - 2$ dzieli n, czyli jest postaci n/d dla pewnego $d \geqslant 3$. Zatem

$$\frac{n}{2} - 2 = \frac{n}{d} \leqslant \frac{n}{3}, \qquad \text{czyli} \qquad n \leqslant 12.$$

Pozostaje bezpośrednio sprawdzić, które z liczb od 1 do 12 są fajne.

Zadanie 4.

Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Liczby $1, 2, \ldots, 2n$ zostały podzielone na dwa ciągi spełniające warunki

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n \quad \text{oraz} \quad b_1 > b_2 > \ldots > b_n.$$

Udowodnij, że liczba

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Sposób I

Rozpatrzmy następującą operację na rozważanych ciągach: wybieramy pewne wyrazy a_i i b_j dla których $|a_i - b_j| = 1$ i zamieniamy elementy a_i i b_j w obydwu ciągach. Innymi słowy, w ciągu (a_i) w miejsce i-tego wyrazu wstawiamy b_j, i podobnie w ciągu (b_i) wstawiamy w miejsce j-tego wyrazu liczbę a_i. Okazuje się, że po takiej zmianie ciągi nadal będą spełniać założenia zadania. Istotnie, jeśli $a_i + 1 = b_j$, to $a_{i-1} < b_j < a_{i+1}$ i podobnie dla zmodyfikowanego ciągu (b_i) mamy $b_{j+1} < a_i < b_{j-1}$. Podobnie argumentujemy dla $a_i - 1 = b_j$. Uzasadnimy, że ta operacja nie wpływa na rozważaną w zadaniu sumę wartości bezwzględnych.

Jeśli $i = j$, to wartość każdego składnika pozostaje niezmieniona, gdyż zamieniliśmy jedynie składnik $|a_i - b_i|$ na $|b_i - a_i|$. Jeśli $i < j$, to rozważamy dwie możliwości.

- Dla $a_i < b_j$, skoro $a_i < a_j$ oraz $b_j < b_i$, to $a_i < b_i$ oraz $a_j > b_j$. Stąd w wyniku naszej operacji liczba $|a_i - b_i| = b_i - a_i$ zamieniona zostanie w liczbę $|b_j - b_i| = b_i - b_j = b_i - (a_i + 1) = b_i - a_i - 1$, czyli zmniejszy się o 1. Analogicznie, wartość $|a_j - b_j|$ zwiększy się o 1. Cała suma się więc nie zmieni.
- Jeśli $a_i > b_j$, to $a_i > b_i$ oraz $a_j < b_j$. Stąd w wyniku naszej operacji liczba $|a_i - b_i| = a_i - b_i$ zamieniona zostanie w $|b_j - b_i| = b_j - b_i = a_i + 1 - b_i = a_i - b_i + 1$, czyli zwiększy się o 1, i podobnie uzasadniamy, że wartość $|a_j - b_j|$ zmniejszy się o 1. Zatem cała rozważana suma również w tym przypadku się nie zmieni.

Podobnie uzasadniamy, że gdy $i > j$, to suma z treści zadania się nie zmienia.

Rozważanym ciągiem operacji możemy "doprowadzić" a_1 do wartości 1, następnie a_2 do wartości 2, i tak dalej, aż dojdziemy do sytuacji gdzie $a_i = i$ i $b_j = 2n + 1 - j$ dla wszystkich i, j od 1 do n. W tym przypadku rozważana suma wynosi

$$|1 - 2n| + |2 - (2n - 1)| + \ldots + |n - (n + 1)| = (2n - 1) + (2n - 3) + \ldots + 1 = n^2.$$

Sposób II

Niech k będzie liczbą elementów ciągu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ większych od n. Skoro ciąg jest malejący, to tymi elementami są $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Z drugiej strony oznacza to, że w ciągu $a_1, \ldots, a_n$ jest $n-k$ liczb większych od n, a skoro ciąg (a_i) jest rosnący, to są to $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{k+1}$. W takim razie dla $i = 1, 2, \ldots, n$ wśród a_i, b_i dokładnie jedna jest większa od n. Zatem rozważana suma wynosi

$$(b_1 - a_1) + \ldots + (b_k - a_k) + (a_{k+1} - b_{k+1}) + \ldots + (a_n - b_n) =$$
$$= ((n+1) + (n+2) + \ldots + 2n) - (1 + 2 + \ldots + n) = n^2.$$

Zadanie 5.

Na tablicy napisane są liczby 20 i 24. Co minutę każda z liczb jest zwiększana o 1 albo podnoszona do kwadratu. Na przykład, po minucie na tablicy mogą być liczby 400 i 25. Czy jest możliwe, że w pewnym momencie liczby na tablicy będą sobie równe?

Rozwiązanie: Rozważmy pierwszy moment, w którym liczby na tablicy są równe. Załóżmy, że w momencie tym upłynęło t minut. Jasne jest, że nie mogliśmy wykonać w poprzednim ruchu tej samej operacji na obu liczbach, ponieważ w tym wypadku już wtedy byłyby sobie równe. W takim razie w poprzednim kroku na tablicy zapisana była para liczb $(n, n^2 - 1)$, dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n. Liczba $n^2 - 1$ nie jest kwadratem, więc musiała być otrzymana poprzez zwiększenie pewnej liczby o 1. Powtarzając to rozumowanie nietrudno zauważyć, że w ostatnich

$$n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$$

minutach liczba na drugiej pozycji nie mogła być podnoszona do kwadratu — musiano dodawać do niej 1 albo przez ostatnie $2n - 1$ minut, albo od samego początku (jeśli $t < 2n - 1$).

Pierwszy przypadek nie może mieć miejsca, gdyż w $t-1$-wszej minucie jedna z liczb wynosiła n, a skoro w każdej minucie każda z liczb rośnie, to od początku do minuty t mogło minąć nie więcej niż $n - 20 < 2n - 2$ minut.

Zatem musi zachodzić drugi przypadek. Wtedy jednak jedna z liczb 20, 24 musi być między $(n-1)^2$ a n^2, skąd dostajemy $n = 5$. Na tablicy nie mogła się jednak pojawić się w żadnym momencie liczba 5. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że na tablicy nigdy nie pojawią się dwie równe liczby.

Zadanie 6.

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach F, D, E. Oznaczmy środki okręgów wpisanych w trójkąty DEF, AEF, BDF odpowiednio przez I, S, T. Wykaż, że punkty I i F są symetryczne względem prostej ST.

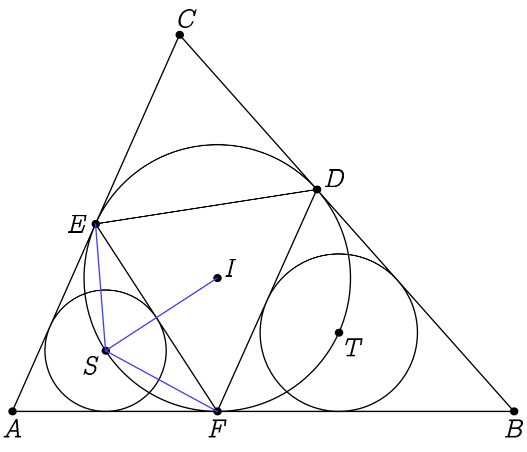
Rozwiązanie: Z twierdzenia o kącie wpisanym i dopisanym mamy

$$\sphericalangle SFE = \frac{1}{2}\sphericalangle AFE = \frac{1}{2}\sphericalangle FDE,$$

a skoro trójkąt AFE jest równoramienny, to $\sphericalangle SFE = \sphericalangle SEF$. Zatem

$$\sphericalangle FSE + \sphericalangle FDE = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle FDE - \frac{1}{2}\sphericalangle FDE + \sphericalangle FDE = 180^\circ,$$

więc punkty S, D, E, F leżą na jednym okręgu, a ponadto S jest środkiem łuku EF. Zatem, z twierdzenia o trójliściu zastosowanego do trójkąta DEF, mamy $SI = SF$. Analogicznie $TI = TF$, skąd otrzymujemy tezę.



Uwaga. W dowodzie korzystamy z tzw. twierdzenia o *trójliściu* (lub *trójzębie*) mówiącego, że jeśli I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt XYZ, zaś P jest środkiem łuku XZ okręgu opisanego na trójkącie XYZ niezawierającego punktu Y, to $IP = XP = ZP$.

Zadanie 7.

Asia i Basia grają w grę używając pudełka, w którym na początku jest n cukierków. Ruch polega na wyciągnięciu z pudełka dowolnej liczby cukierków i spełniającej warunki

$$\mathrm{NWD}(k, i) = 1 \qquad \text{i} \qquad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

gdzie k oznacza liczbę cukierków znajdującą się w pudełku bezpośrednio przed ruchem. Zaczynając od Asi, dziewczynki wykonują ruchy na przemian dopóki któraś nie wyciągnie ostatniego cukierka — tym samym wygrywając grę. W zależności od n rozstrzygnij, która dziewczynka może zapewnić sobie zwycięstwo.

Rozwiązanie: Wykażemy, że Basia może zapewnić sobie zwycięstwo dokładnie wtedy, gdy n jest liczbą parzystą. Załóżmy wpierw, że n jest liczbą nieparzystą. Wtedy Asia może wyciągnąć w jednym ruchu $n-2$ cukierków, zostawiając Basię z dwoma i zmuszając ją do wyciągnięcia w swoim ruchu dokładnie jednego cukierka. Następnie Asia w swoim ruchu będzie mogła wyciągnąć ostatniego cukierka, wygrywając.

Jeżeli natomiast n jest liczbą parzystą, to Asia w pierwszym ruchu musi zabrać nieparzystą liczbę cukierków, zostawiając ich nieparzyście wiele w pudełku. Basia będzie wtedy mogła użyć opisanej powyżej strategii, gwarantując swoje zwycięstwo.

Zadanie 8.

Rozważmy ciąg liczb rzeczywistych (x_n) spełniający warunki $x_1 = 20, x_2 = 24$ oraz

$$x_{n+2} = \begin{cases} x_n - \frac{1}{x_{n+1}}, & \text{gdy } x_{n+1} \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x_{n+1} = 0. \end{cases}$$

dla $n \geqslant 1$. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą k, dla której $x_k = 0$, lub udowodnij, że taka liczba k nie istnieje.

Rozwiązanie: Z definicji naszego ciągu wynika, że jeśli $x_{n+1} \neq 0$, to

$$x_{n+2}x_{n+1} = x_{n+1}x_n - 1.$$

W szczególności jeśli powyższa wartość jest niezerowa, to $x_{n+2} \neq 0$. Nietrudno stąd wywnioskować, na przykład metodą indukcji, że

$$x_n x_{n+1} = 481 - n$$

i $x_n \neq 0$ dla $n = 1, 2, \ldots, 481$. Mamy zatem $x_{481}x_{482} = 0$. Stąd $x_{482} = 0$ i szukaną liczbą k jest 482.

Zadanie 9.

Punkt D leżący wewnątrz trójkąta ABC spełnia warunek $AD = DB$. Proste CD i AB przecinają się w punkcie E spełniającym

$$\frac{CD}{CE} = \frac{EB}{AE}.$$

Wykaż, że trójkąt AEC jest równoramienny.

Rozwiązanie: Sposób I. Niech punkt F powstaje przez odbicie punktu E względem środka prostej AB. Z warunków zadania mamy

$$\frac{AF}{AE} = \frac{CD}{CE}.$$

Zatem, z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, odcinek FD jest równoległy do AC. Skoro punkt D leży na symetralnej prostej AB, uzyskujemy równość kątów

$$\sphericalangle DFE = \sphericalangle DEF.$$

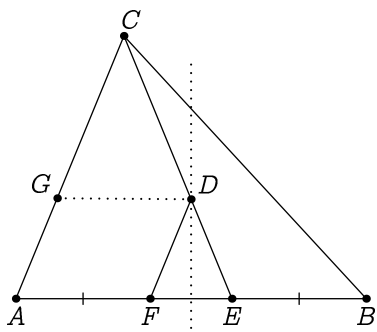
Łącząc powyższe obserwacje otrzymujemy $\sphericalangle CAE = \sphericalangle DFE = \sphericalangle DEF = \sphericalangle CEA$, skąd bezpośrednio wynika teza.

Sposób II

Niech G będzie punktem leżącym na boku AC, takim że odcinek DG jest równoległy do prostej AB. Z twierdzenia Talesa oraz z warunków zadania mamy

$$\frac{GD}{AE} = \frac{CD}{CE} = \frac{EB}{AE}.$$

Uzyskujemy stąd $GD = EB$. Dodatkowo, skoro $\sphericalangle GDE = \sphericalangle BED$, to trójkąty GDE oraz BED są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd $DB = GE = AD$, zgodnie z warunkami zadania. Trapez $AEDG$ ma zatem równe przekątne, czyli jest równoramienny. Kąty przy podstawie AE są więc równe, co kończy dowód.



Zadanie 10.

Dany jest nieskończony ciąg (a_n) dodatnich liczb całkowitych spełniający dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zależność

$$a_{n+1} = 2a_n + 1.$$

Udowodnij, że pewien wyraz tego ciągu jest liczbą złożoną.

Rozwiązanie: Na początku wyznaczmy wzór na wyraz ogólny ciągu (a_n). Oznaczając dla każdego n przez x_n liczbę $a_n + 1$ oraz dodając do obu stron równości z tezy zadania liczbę 1, otrzymujemy

$$x_{n+1} = 2x_n$$

Wynika stąd, że $x_{n+1} = 2^n \cdot x_1$, czyli

$$a_{n+1} = x_{n+1} - 1 = 2^n \cdot (a_1 + 1) - 1.$$

Przypuśćmy nie wprost, że dla każdego $n \geqslant 1$ liczba a_n jest pierwsza. W szczególności, $p = a_1$ jest liczbą pierwszą. Ewentualnie ignorując pierwszy wyraz ciągu (a_n) możemy założyć bez straty ogólności, że $p > 2$, czyli p jest liczbą jest nieparzystą. Korzystając z małego twierdzenia Fermata, uzyskujemy kongruencje

$$a_p = 2^{p-1}(p+1) - 1 \equiv 1 \cdot (p+1) - 1 = p \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ciąg (a_n) jest ściśle rosnący, więc $a_p > a_1 = p$. Wynika stąd, że wyraz a_p, jako podzielny przez liczbę $p > 1$ i od niej większy, jest liczbą złożoną. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 11.

W pewnym kraju jest n miast, z których niektóre są połączone drogami dwukierunkowymi. Z każdego miasta można dostać się do każdego innego używając pewnej liczby dróg. Co więcej, wiemy, że z każdego miasta wychodzą drogi do co najmniej d innych miast. Wykaż, że z dowolnego miasta można przejść do dowolnego innego przechodząc przez maksymalnie $3n/d$ innych miast.

Rozwiązanie: Rozważmy dowolne dwa spośród naszych miast, powiedzmy A i B. Niech możliwie najkrótsza trasa między nimi przechodzi przez k innych miast, i nazwijmy je wraz z A i B *wygodnymi*. Zauważmy, że jedyne drogi między wygodnymi miastami to te należące do rozważanej trasy – inaczej można by było ją skrócić. Zatem każde z wygodnych miast jest połączone z co najwyżej dwoma wygodnymi miastami, więc z co najmniej $d-2$ niewygodnymi miastami. Łączna liczba dróg między miastami wygodnymi a niewygodnymi wynosi zatem co najmniej $(d-2)(k+2)$.

Gdyby jakieś niewygodne miasto było połączone z więcej niż trzema wygodnymi miastami, to przechodząc przez to miasto otrzymalibyśmy krótszą ścieżkę, co daje sprzeczność. Zatem jest co najwyżej $3(n-k-2)$ dróg między miastami wygodnymi a niewygodnymi.

Łącząc uzyskane nierówności mamy

$$(k+2)(d-2) \leqslant 3(n-k-2),$$

skąd

$$3n \geqslant 3 \cdot (k+2) + (d-2)(k+2) = (k+2)(d+1) > kd.$$

Dzieląc strony uzyskanej nierówności przez d, otrzymujemy tezę.

Zadanie 12.

Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x = (y+1)^2 \\ y = (x+1)^2 \end{cases}$$

Rozwiązanie: Sposób I. Przypuśćmy, że rozważany układ ma rozwiązanie. Z symetrii układu możemy bez straty ogólności przyjąć, że $x \geqslant y$. Zauważmy, że $x+1 \geqslant 1$, ponieważ liczba $x = (y+1)^2$ jest nieujemna, jako kwadrat liczby rzeczywistej. Wynika stąd ciąg nierówności

$$x \geqslant y = (x+1)^2 \geqslant x+1 > x.$$

Dochodzimy do sprzeczności, a zatem rozważany układ nie ma rozwiązań.

Sposób II

Jeśli $x = y$, to równanie $x = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ jest równoważne z równaniem $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$, które nie ma rozwiązań.

Jeśli $x \neq y$, to odejmując strony równań wyjściowego układu, uzyskujemy

$$x - y = (y+1)^2 - (x+1)^2 = (y+1-x-1)(y+1+x+1) = (y-x)(x+y+2).$$

Skoro $x - y \neq 0$, to równanie wyżej jest równoważne warunkowi $x = -y-3$. Stąd $-y-3 = (y+1)^2$, czyli $y^2 + 3y + 4 = \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = 0$, które to równanie również nie ma rozwiązań. Wyjściowy układ równań nie ma więc rozwiązań.

Zadanie 13.

W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ o boku 1 na przekątnej BD zaznaczamy punkt P, a na przekątnej DF zaznaczamy punkt Q tak, że

$$BP = QD = 1.$$

Wykaż, że punkty C, P, Q są współliniowe.

Rozwiązanie: Sposób I. Każdy kąt wewnętrzny sześciokąta foremnego ma miarę 120°. Skoro $BC = CD$, to $\sphericalangle BDC = \sphericalangle DBC = 30^\circ$. Zatem z warunku $BP = BC$ uzyskujemy

$$\sphericalangle PCB = \frac{180^\circ - \sphericalangle PBC}{2} = 75^\circ.$$

Z drugiej strony

$$\sphericalangle FDC = \sphericalangle EDC - \sphericalangle EDF = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$

Stąd trójkąt CDQ jest prostokątny i równoramienny, a $\sphericalangle QCD = 45^\circ$. Zatem

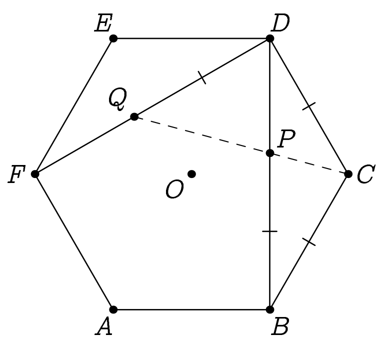
$$\sphericalangle QCB = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ = \sphericalangle PCB,$$

skąd dostajemy współliniowość punktów C, P, Q.

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie wykazujemy, że $\sphericalangle PBC = \sphericalangle QDE = 30^\circ$. Niech O będzie środkiem (symetrii) sześciokąta $ABCDEF$. Czworokąty $OBCD$ oraz $ODEF$ są rombami, skąd $\sphericalangle OBP = \sphericalangle ODQ = 30^\circ$.

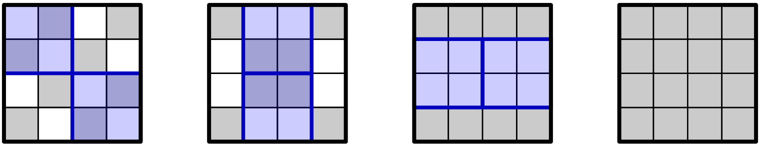
Rozważmy okrąg o środku w punkcie B i promieniu 1, przechodzący przez punkty O, P oraz C. Na mocy twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym mamy zatem $\sphericalangle OCP = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle OBP = 15^\circ$. Podobnie rozważając okrąg o środku w punkcie D i promieniu 1, przechodzący przez punkty O, Q oraz C, stwierdzamy równość $\sphericalangle OCQ = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle ODQ = 15^\circ = \sphericalangle OCP$. Stąd punkty C, P, Q są współliniowe.



Zadanie 14.

Pola szachownicy o wymiarach $n \times n$ pomalowano w standardowy sposób na biało i czarno. *Ruchem* nazywamy wybranie kwadratu 2×2 na szachownicy i zmienienie kolorów jego pól na kolory przeciwne. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych $n \geqslant 2$ pewną liczbą ruchów możemy sprawić, by cała szachownica była w jednym kolorze?

Rozwiązanie: Dla liczb n podzielnych przez 4, szachownicę rozmiaru $n \times n$ możemy podzielić na identyczne kwadraty 4×4 i na każdym kwadracie wykonać poniższe operacje, doprowadzając do jednokolorowej tablicy.



Zatem liczby n podzielne przez 4 spełniają warunek zadania. Udowodnimy że są to jedyne takie liczby.

Rozpatrzmy dowolną kolumnę szachownicy. W jednym ruchu możemy zmienić liczbę białych pól w tej kolumnie o liczbę parzystą. Zatem dowolny ciąg ruchów zachowuje parzystość tej liczby.

Jeśli $n \equiv 2 \pmod 4$, to w dowolnej kolumnie jest na początku nieparzyście wiele białych pól, więc nie możemy doprowadzić do sytuacji gdzie jest ich 0 lub n.

Jeśli natomiast liczba n jest nieparzysta, możemy rozważyć dwie kolejne kolumny. W jednej z nich jest parzyście wiele białych pól, a w drugiej — nieparzyście wiele. Zatem łączna liczba białych pól w tych kolumnach jest nieparzysta. Nie możemy więc doprowadzić do jednokolorowej tablicy, w której ta liczba wyniosłaby 0 lub $2n$.

Zatem jedynymi rozwiązaniami są liczby n podzielne przez 4.

Zadanie 15.

Trzy cięciwy pewnego okręgu o środku w punkcie O przecinają się w jednym punkcie, różnym od O, przy czym każde dwie z tych cięciw przecinają się pod kątem 60°. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach w środkach tych trzech cięciw jest równoboczny.

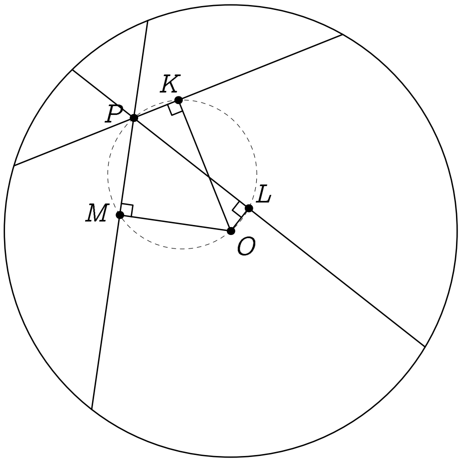
Rozwiązanie: Oznaczmy punkt przecięcia cięciw przez P, a ich środki przez K, L, M.

Jeśli których z trzech środków — powiedzmy, że punkt K — pokrywa się z punktem P, to cięciwy o środkach w punktach L i M są symetryczne względem prostej PO, więc $LK = KM$, co w połączeniu z warunkiem $\sphericalangle LKM = 60^\circ$ daje tezę.

Załóżmy więc, że punkty K, L, M są różne od punktu P. Wtedy w szczególności żadne z punktów K, L, M nie pokrywają się.

Jeśli punkt K nie pokrywa się z punktem O, to $\sphericalangle PKO = 90^\circ$, więc punkt K leży na okręgu o średnicy PO. Jeśli punkt K pokrywa się z punktem O, to również leży na tym okręgu. Analogicznie dowodzimy, że punkty L i M leżą na tym okręgu.

Kąt KLM jest oparty na łuku KM, a kąt KPM oparty na tym samym łuku ma miarę 60° lub 120°, więc $\sphericalangle KLM$ przyjmuje jedną z tych wartości. Analogicznie uzyskujemy, że wszystkie kąty trójkąta KLM mają miary 60° lub 120°. Musi on zatem być równoboczny.



Zadanie 16.

Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) spełniających podzielności

$$a^2 + b^2 \mid a^3 + b \qquad \text{i} \qquad a^2 + b^2 \mid a + b^3.$$

Rozwiązanie: Z warunków zadania wynika, że liczba $a^2 + b^2$ jest dzielnikiem liczby

$$b(b^2 + a^2) - (a + b^3) = a(ab - 1). \tag{*}$$

Wykażemy, że liczby a i b są względnie pierwsze.

Niech $d = \mathrm{NWD}(a, b)$. Oznaczmy

$$x = \frac{a}{d} \qquad \text{i} \qquad y = \frac{b}{d}.$$

Oczywiście liczby x i y są względnie pierwsze. Zapisując podzielność $a^2+b^2 \mid a(ab-1)$ za pomocą nowych oznaczeń otrzymujemy

$$d^2(x^2+y^2) \mid dx(d^2xy-1), \qquad \text{czyli} \qquad d \mid d^2x^2y - x.$$

Zatem liczba d dzieli liczbę x. Analogicznie uzasadniamy, że liczba d dzieli liczbę y. Ale $\mathrm{NWD}(x,y)=1$, zatem $d=1$.

Ze względnej pierwszości liczb a i b wynika, że $\mathrm{NWD}(a^2+b^2,a)=1$. Istotnie, jeśli p jest liczbą pierwszą dzielącą a^2+b^2 oraz a, to p dzieli b^2, czyli dzieli a oraz dzieli b.

Łącząc uzyskany fakt z podzielnością (*), otrzymujemy

$$a^2+b^2 \mid ab-1.$$

Zachodzi przy tym nierówność

$$0 \leqslant ab-1 < 2ab \leqslant a^2+b^2.$$

Wynika stąd, że $ab-1=0$, co implikuje $a=1$ oraz $b=1$. Bezpośrednio sprawdzamy, że ta para posiada żądane własności.

Zadanie 17.

Dodatnią liczbę całkowitą nazwiemy *fikuśną*, jeżeli ma 70 cyfr i każda z cyfr od 1 do 7 pojawia się w jej zapisie dziesiętnym dokładnie 10 razy. Udowodnij, że żadna liczba fikuśna nie dzieli innej liczby fikuśnej.

Rozwiązanie: Suma cyfr dowolnej liczby fikuśnej wynosi

$$(\underbrace{1+\ldots+1}_{\text{10 razy}})+\ldots+(\underbrace{7+\ldots+7}_{\text{10 razy}}) = 10(1+2+\ldots+7) = 280,$$

więc każda taka liczba daje przy dzieleniu przez 9 resztę 1.

Rozważmy teraz takie dwie liczby fikuśne n, m, że $n \mid m$. Możemy wtedy zapisać $m = nk$, dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k. Skoro liczby n i m mają taką samą liczbę cyfr, to $k \leqslant 9$. Skoro jednak zarówno liczby m, jak i n dają przy dzieleniu przez 9 resztę 1, to

$$1 \equiv m \equiv n \cdot k \equiv k \pmod 9,$$

co po połączeniu z wcześniejszym szacowaniem implikuje, że $k=1$. W takim razie $n=m$, więc żadna liczba fikuśna nie może dzielić innej liczby fikuśnej.

Zadanie 18.

Dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, e spełniają równość $abcde = a + b + c + d + e$. Znajdź największą możliwą wartość $\max\{a, b, c, d, e\}$.

Rozwiązanie:

Załóżmy bez straty ogólności, że $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Chcemy więc znaleźć największą możliwą wartość e. Skoro $e < a + b + c + d + e \leqslant 5e$, to $e < abcde \leqslant 5e$, czyli $1 < abcd \leqslant 5$. W takim razie (a, b, c, d) jest jedną z czwórek

$$(1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 3), (1, 1, 1, 4), (1, 1, 1, 5), (1, 1, 2, 2).$$

Dla każdego z tych przypadków łatwo znaleźć jedyną wartość e spełniającą równość z treści zadania. Największa okazuje się ona w pierwszym przypadku, gdzie $e = 5$. Zatem odpowiedzią jest właśnie liczba 5.

Zadanie 19.

Na okręgu zaznaczono 101 parami różnych punktów. Następnie każdą z cięciw o końcach w tych punktach pokolorowano na jeden z 11 kolorów, przy czym użyto co najmniej dwóch różnych kolorów. Udowodnij, że pewien trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach ma dwa boki jednego koloru, a trzeci — innego.

Rozwiązanie: Przypuśćmy nie wprost, że trójkąt o postulowanych własnościach nie istnieje. Rozważmy dowolny z zaznaczonych punktów i oznaczmy go przez A_1. Skoro z punktu A_1 wychodzi 100 cięciw, a kolorów jest 11, więc co najmniej 10 z tych 100 cięciw jest tego samego koloru, powiedzmy niebieskiego. Niech $A_2, \ldots, A_{11}$ będą dziesięcioma punktami połączonymi z punktem A_1 niebieskimi cięciwami. Gdyby pewne dwa z tych punktów nie były połączone cięciwą niebieskiego koloru, to razem z punktem A_1 tworzyłyby szukany trójkąt.

Weźmy dowolny punkt X różny od $A_1, \ldots, A_{11}$. Ponownie stwierdzamy, że pewne dwie cięciwy łączące X z tymi jedenastoma punktami są tego samego koloru. Aby nie tworzyły one szukanego trójkąta, tym kolorem musi być niebieski. Skoro jednak pewna cięciwa XA_i jest niebieska, to cięciwa również musi być niebieska, inaczej trójkąt XA_1A_i miałby dwa boki niebieskie, a trzeci — innego koloru.

Zatem dla dowolnych dwóch punktów X, Y, różnych od A_1, odcinki XA_1 i YA_1 są niebieskie, więc cięciwa XY również musi być niebieska. Doszliśmy do wniosku, że wszystkie cięciwy są niebieskie, co przeczy założeniu o użyciu co najmniej dwóch kolorów. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 20.

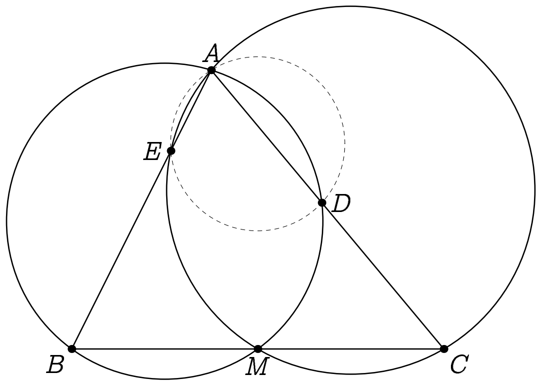
Niech M będzie środkiem boku BC trójkąta ABC. Okrąg opisany na trójkącie ABM przecina odcinek AC po raz drugi w punkcie D. Okrąg opisany na trójkącie AMC przecina natomiast odcinek AB po raz drugi w punkcie E. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie ADE leży na symetralnej odcinka BC.

Rozwiązanie: Chcemy udowodnić, że punkty B i C są w równej odległości od środka okręgu opisanego na trójkącie ADE. Wystarczy wykazać, że punkty te mają równą potęgę względem tego okręgu.

Dla punktu B, wartość potęgi względem rozważanego okręgu jest równa $BA \cdot BE$, co jest również potęgą punktu B względem okręgu przechodzącego przez punkty A, E, C, M. Liczba ta jest zatem równa iloczynowi $BC \cdot BM$. Analogicznie uzasadniamy, że potęga punktu C względem okręgu opisanego na trójkącie ADE równa jest

$$CA \cdot CD = CB \cdot CM = CB \cdot BM = BA \cdot BE,$$

więc potęgi punktów B i C względem okręgu opisanego na trójkącie ADE są równe.



Zadanie 21.

Dwusieczna kąta ACB trójkąta ABC przecina okrąg na nim opisany w punkcie W. Okrąg o środku w punkcie W przechodzący przez punkt C przecina prostą AC po raz drugi w punkcie D. Wykaż, że $AD = BC$.

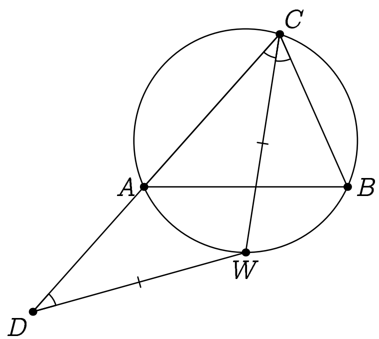
Rozwiązanie: Mamy $WC = WD$, więc również

$$\sphericalangle WDA = \sphericalangle WCA = \sphericalangle WCB.$$

Co więcej, mamy

$$\sphericalangle WAD = 180^\circ - \sphericalangle WAC = \sphericalangle WBC.$$

Wnioskujemy stąd, że trójkąty WAD i WBC są podobne, a skoro $WC = WD$, to trójkąty te są również przystające. Zatem $AD = BC$.



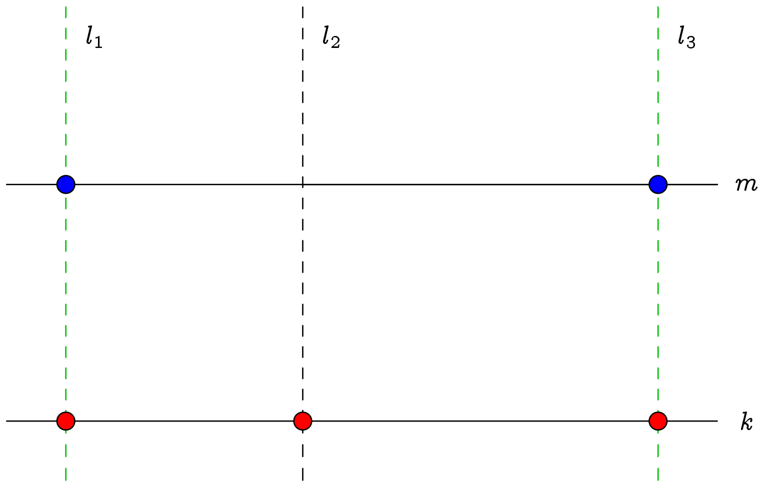
Zadanie 22.

Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na jeden z trzech kolorów. Wykaż, że w rezultacie pewien trójkąt prostokątny ma jednokolorowe wierzchołki.

Rozwiązanie: Przypuśćmy nie wprost, że nie ma takiego trójkąta, i ustalmy dowolną prostą k. Pewien kolor powtarza się na niej co najmniej 3 razy, niech będzie to czerwony. Poprowadźmy proste l_1, l_2, l_3 prostopadłe do k przecinające tą prostą w czerwonych punktach. Na tych trzech prostych nie mogą się pojawić żadne inne punkty czerwone, inaczej bowiem powstałby trójkąt prostokątny.

Przetnijmy proste l_1, l_2, l_3 z prostą m równoległą do prostej k. Trzy uzyskane w ten sposób punkty przecięcia są pokolorowane na pozostałe dwa kolory, więc pewien kolor powtórzy się dwa razy. Przyjmijmy, że jest to kolor niebieski, oraz że pojawia się na przecięciach prostej m z prostymi l_1 i l_3.

Gdyby na prostej l_1 lub l_3 pojawił się jakiś inny punkt niebieski, otrzymalibyśmy tezę. W takim razie wszystkie punkty na tych prostych, poza już zaznaczonymi czterema, są zielone. Można zatem znaleźć na tych prostych zielone punkty będące wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Uzyskaliśmy sprzeczność.



Zadanie 23.

Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c} \geqslant 2.$$

Rozwiązanie: Z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną dostajemy

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{c} \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b+c} \cdot \frac{b+c}{c}} = 3 \cdot \sqrt[3]{1} = 3.$$

Skoro

$$\frac{b+c}{c} = \frac{b}{c} + 1,$$

to odejmując stronami 1 od uzyskanej nierówności, otrzymamy tezę.

Zadanie 24.

Parę dodatnich liczb całkowitych (a, b) nazywamy *mraśną*, jeżeli w rozkładzie na czynniki pierwsze liczb a i b występują dokładnie te same liczby pierwsze. Udowodnij, że jest nieskończenie wiele par różnych liczb całkowitych (m, n), dla których pary (m, n) oraz $(m+1, n+1)$ są mraśne.

Rozwiązanie: Każda para postaci (x, x^2) jest oczywiście mraśna. Wiemy również, że $x-1 \mid x^2-1$, więc aby para $(x-1, x^2-1)$ była mraśna, wystarczy zagwarantować, że wszystkie dzielniki pierwsze liczby $x+1$ dzielą również liczbę $x-1$. Skoro mamy $\mathrm{NWD}(x-1, x+1) = 2$, to należy wybrać $x+1 = 2^k$ dla dowolnej liczby całkowitej $k \geqslant 2$. Prowadzi to do określenia par postaci

$$(2^k - 2, (2^k - 1)^2 - 1).$$

Par tej postaci jest nieskończenie wiele. Z powyższego rozumowania wynika, że spełniają one warunki zadania, co kończy dowód.

Zadanie 25.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Oznaczmy przez D spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Punkty E i F różne od D leżą na pewnej prostej przechodzącej przez punkt D, przy czym spełnione są równości $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AFC = 90^\circ$. Oznaczmy przez M i N odpowiednio środki odcinków BC i EF. Udowodnij, że prosta AN jest prostopadła do prostej NM.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = 90^\circ,$$

więc czworokąt $ABDE$ jest opisany na okręgu o średnicy AB. Analogicznie czworokąt $AFCD$ jest opisany na okręgu.

Prosta EF nie może być żadną z prostych BC, AD. W przeciwnym wypadku punkty D, E, F pokryłyby się. Załóżmy bez straty ogólności, że prosta EF przecina bok AC trójkąta ABC. Wtedy punkty F, C leżą po tej samej stronie prostej AD, więc

$$\sphericalangle AFE = \sphericalangle AFD = \sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB$$

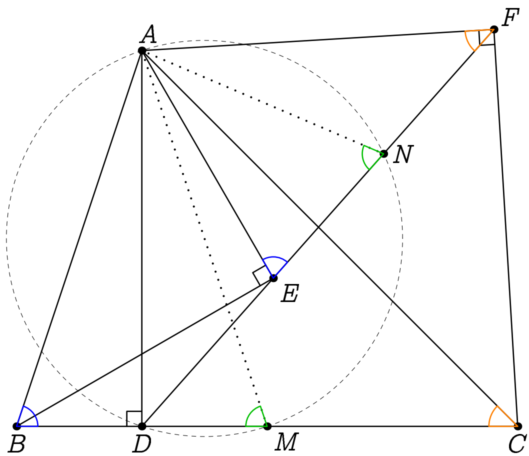
z twierdzenia o kącie wpisanym. Podobnie możemy uzasadnić że

$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle ABC.$$

Wnioskujemy stąd, że trójkąty AEF i ABC są podobne, na mocy cechy kąt–kąt–kąt. Skoro punkty M i N to środki boków BC i EF, to trójkąty ABM i AEN są również podobne, a stąd $\sphericalangle ANE = \sphericalangle AMB$. Zatem

$$\sphericalangle AND = \sphericalangle ANE = \sphericalangle AMB = \sphericalangle AMD.$$

W rezultacie, na czworokącie $ANMD$ można opisać okrąg, co w połączeniu z równością $\sphericalangle ADM = 90^\circ$ daje żądaną równość $\sphericalangle ANM = 90^\circ$. To kończy dowód.



Zadanie 26.

Dla dodatniej liczby nieparzystej n pola szachownicy o wymiarach $n \times n$ pokolorowano na pewną liczbę kolorów. Okazało się, że w każdym kwadracie 2×2 pewne dwa pola są tego samego koloru. Wykaż, że największa możliwa liczba kolorów, jaka mogła zostać użyta, to

$$\frac{n^2 + 2n - 1}{2}.$$

Rozwiązanie: Zacznijmy od pokazania konstrukcji. Ponumerujmy kolumny od 1 do n. Pokolorujmy kolumny $2, 4, \ldots, n-1$ — każdą na unikalny kolor. Następnie na wszystkie z pozostałych pól przeznaczmy po jednym nowym kolorze. Taki układ spełnia warunki zadania, a liczba kolorów, których używa wynosi

$$\frac{n-1}{2} + n \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2 + 2n - 1}{2}.$$

Ustalmy teraz dowolne kolorowanie spełniające warunki zadania. Nazwijmy użyte kolory $c_1, \ldots, c_k$, a niech x_i będzie liczbą pól zamalowanych kolorem c_i.

Powiemy, że pewien kolor *pokrywa* kwadrat 2×2, jeśli zawiera on co najmniej dwa pola tego koloru. Skorzystamy z następującej obserwacji.

Liczba kwadratów 2×2 pokrytych przez kolor c_i nie przekracza $2x_i - 2$.

Dowód. Oszacujemy na dwa sposoby liczbę S par postaci

(pole w kolorze c_i, kwadrat zawierający to pole pokryty przez c_i)

Skoro każde pole może należeć do co najwyżej 4 kwadratów, a x_i jest liczbą pól zamalowanych kolorem c_i, to S nie przekracza $4x_i$.

Możemy poprawić to szacowanie: rozważmy najwyższe pole koloru c_i, a jeśli jest ich kilka — rozważmy spośród nich pole położone najbardziej z lewej. Wtedy kwadrat 2×2 zawierający wybrane pole jako prawy dolny róg (jeśli jest zawarty w szachownicy) nie może posiadać więcej niż jednego pola koloru c_i. Zatem tych z rozważanych par, w których wyróżnione pole jest prawym dolnym rogiem wyróżnionego kwadratu, jest nie więcej niż $x_i - 1$.

Rozumując analogicznie dla pozostałych trzech możliwych pozycji pola w kwadracie dostajemy nierówność

$$S \leqslant 4 \cdot (x_i - 1).$$

Z drugiej strony każdy kwadrat pokryty przez c_i należy do co najmniej dwóch rozważanych par (skoro zawiera co najmniej dwa pola koloru c_i), więc liczba kwadratów pokrytych przez c_i to co najwyżej

$$\frac{S}{2} \leqslant 2x_i - 2.$$

□

W naszej szachownicy kwadratów 2×2 jest $(n-1)^2$, a każdy z nich musi zostać pokryty przez jakiś kolor, więc zachodzą równoważne nierówności

$$\begin{aligned}
(2x_1 - 2) + \ldots + (2x_k - 2) &\geqslant (n-1)^2, \\
2(x_1 + \ldots + x_k) - 2k &\geqslant n^2 - 2n + 1, \\
2n^2 - 2k &\geqslant n^2 - 2n + 1, \\
\frac{n^2 + 2n - 1}{2} &\geqslant k,
\end{aligned}$$

co daje żądane ograniczenie na liczbę użytych kolorów.

Zadanie 27.

Rozważmy trójkąt ABC, dla którego spełniony jest warunek $2AB = BC + AC$. Wybierzmy punkt L na boku AB, dla którego prosta CL to dwusieczna kąta ACB. Okrąg styczny do prostej CL w punkcie L przechodzący przez punkt A przecina odcinek odcinka AC w punkcie X, a okrąg styczny do prostej CL w punkcie L przechodzący przez punkt B przecina odcinek BC w punkcie Y. Wykaż, że środek odcinka CL jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CXY.

Rozwiązanie: Z twierdzenia o dwusiecznej mamy $\frac{AC}{AL} = \frac{BC}{BL}$. Łącząc tę równość z zależnością

$$\frac{AC + BC}{AB} = \frac{AC + BC}{AL + BL} = 2$$

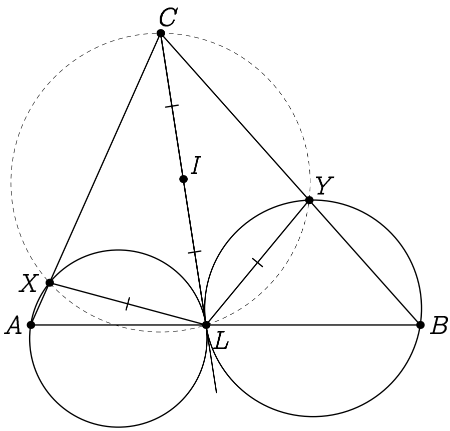
wnioskujemy, że $AC = 2AL$ oraz $BC = 2BL$.

Z twierdzenia o kącie wpisanym i dopisanym wnioskujemy, że $\sphericalangle CLX = \sphericalangle CAL$. Zatem trójkąty CLX i CAL są podobne (cecha bok–kąt–bok). Wynika stąd równość $CL = 2XL$. Analogicznie dostajemy równość $CL = 2YL$.

Z podobieństw trójkątów CLX i CAL oraz trójkątów CLY i CBL mamy też

$$\sphericalangle CXL = \sphericalangle CLA = 180^\circ - \sphericalangle CLB = 180^\circ - \sphericalangle CYL,$$

więc punkty C, X, Y, L leżą na jednym okręgu. Skoro CL jest dwusieczną kąta XCY, to punkt L jest środkiem łuku XY tego okręgu. Ale skoro $CL = 2XL$, to środek I odcinka CL spełnia $IL = XL = YL$ i leży na dwusiecznej kąta CXY. Z twierdzenia o trójliściu wiemy, że taki punkt jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CXY.



Zadanie 28.

Okręgi Ω i Γ są styczne zewnętrznie, a prosta l jest jedną z ich dwóch wspólnych stycznych zewnętrznych. Oznaczmy punkt styczności prostej l z okręgiem Ω przez X. Niech AX będzie średnicą okręgu Ω. Prosta przechodząca przez punkt A jest styczna do okręgu Γ w punkcie B. Udowodnij, że $AB = AX$.

Rozwiązanie: Niech Y będzie punktem styczności okręgu Γ z prostą l, a Z punktem wspólnym okręgów Ω i Γ. Jeśli wspólna styczna okręgów przechodząca przez Z przecina prostą l w punkcie M, to

$$MX = MZ = MY,$$

skąd wynika $\sphericalangle XZY = 90^\circ$.

Skoro AX jest średnicą okręgu Ω, to $\sphericalangle AZX = 90^\circ$, więc punkty A, Z, Y są współliniowe. Z twierdzenia o potędze punktu użytego do punktu A i okręgu Γ mamy zatem

$$AB^2 = AZ \cdot AY.$$

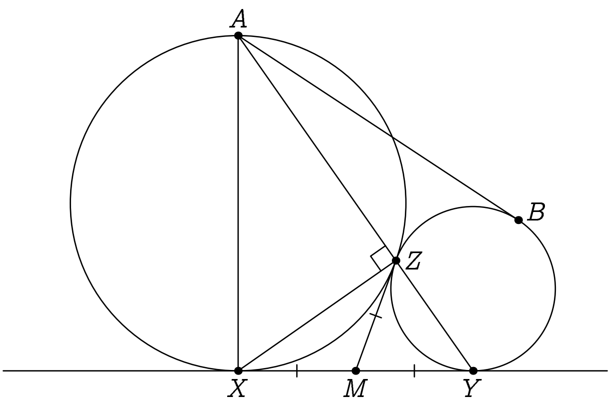
Trójkąty AXY i AZX są prostokątne i mają wspólny kąt XAY, więc są podobne. Zatem

$$\frac{AX}{AZ} = \frac{AY}{AX},$$

czyli

$$AX^2 = AZ \cdot AY.$$

Łącząc uzyskane równości otrzymujemy $AB = AX$.



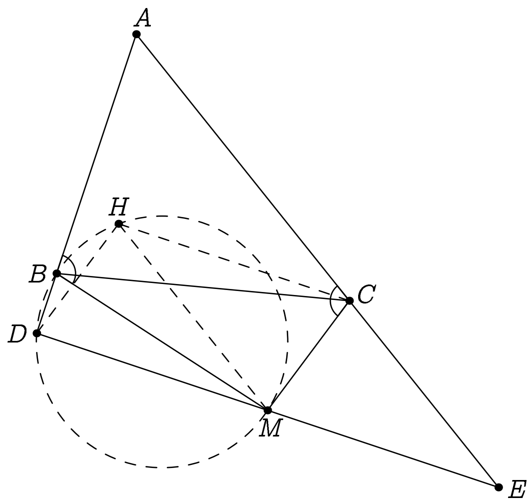
Zadanie 29.

Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Prosta równoległa do prostej CH przecina proste AB, AC odpowiednio w punktach D, E. Załóżmy, że środek M odcinka DE leży na okręgu opisanym na trójkącie BDH. Wykaż, że $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$.

Rozwiązanie: Proste CH oraz DE są równoległe, zaś proste CH i AB są prostopadłe, więc $\sphericalangle BDM = 90°$. Skoro punkty B, D, M, H leżą na jednym okręgu, to również $\sphericalangle BHM = 90°$. Zatem proste BH oraz HM są prostopadłe, a stąd proste AC i HM są równoległe. Łącząc ten fakt z równoległością prostych CH oraz DE wnioskujemy, że czworokąt $MECH$ jest równoległobokiem. Skoro jednak punkt M jest środkiem odcinka DE, to uzyskujemy $DM = HC$, więc czworokąt $DMCH$ również jest równoległobokiem. W takim razie

$$\sphericalangle DBM = \sphericalangle DHM = \sphericalangle CMH = \sphericalangle MCE,$$

więc także $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$.



Zadanie 30.

Wykaż, że każdą dodatnią liczbę całkowitą można zapisać jako sumę pewnej liczby składników postaci $2^a 3^b$, gdzie a, b są nieujemnymi liczbami całkowitymi, w taki sposób, by żaden ze składników nie był wielokrotnością innego.

Rozwiązanie: Nazwijmy liczbę n oraz odpowiadający jej rozkład *dobrymi*, jeżeli spełniają warunki zadania. Udowodnimy tezę poprzez indukcję względem n.

Oczywiście teza jest prawdziwa dla $n = 1$. Załóżmy zatem, że wszystkie liczby mniejsze od n są dobre. Jeśli liczba n jest parzysta, to mnożąc przez 2 każdy składnik dobrego rozkładu liczby $n/2$, otrzymujemy dobry rozkład n.

Załóżmy w takim razie, że n jest liczbą nieparzystą. Niech k będzie nieujemną liczbą całkowitą, dla której $3^k \leqslant n < 3^{k+1}$. Jeśli $n = 3^k$, to jest oczywiście liczbą dobrą. Załóżmy zatem, że $n > 3^k$. Wtedy z założenia indukcyjnego możemy zapisać dobry rozkład

$$\frac{n - 3^k}{2} = s_1 + s_2 + \ldots + s_t.$$

Przekształcamy powyższą równość do postaci

$$n = 2s_1 + \ldots + 2s_t + 3^k.$$

By zweryfikować, że jest to dobry rozkład wystarczy sprawdzić, że w żadnej z par $(2s_i, 3^k)$ żadna liczba nie jest wielokrotnością drugiej.

Skoro jednak $2 \nmid 3^k$, to musielibyśmy mieć $3^k \mid 2s_i$ dla pewnego i. Oznaczałoby to, że $n \geqslant 2s_i + 3^k \geqslant 2 \cdot 3^k + 3^k = 3^{k+1}$, co jest sprzeczne z definicją k. Wnioskujemy stąd, że zaprezentowany rozkład musiał być dobry, co kończy dowód indukcyjny.

Zadanie 31.

Dla każdej liczby całkowitej od 1 do 1000 obliczono iloczyn jej niezerowych cyfr. Następnie dodano wszystkie uzyskane wyniki. Wykaż, że uzyskana suma jest sześcianem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Przyjmijmy, że iloczyn niezerowych cyfr liczby 0 wynosi 1, i rozważmy sumę iloczynów niezerowych cyfr liczb od 0 do 999. Jest ona oczywiście równa wartości z zadania.

Do każdej z liczb od 0 do 99 możemy dopisać na początku jedną lub dwie jedynki tak, by otrzymać liczbę trzycyfrową, i nie zmienić iloczynu jej niezerowych cyfr. Następnie w każdej z tysiąca rozważanych liczb możemy zastąpić wszystkie wystąpienia cyfry 0 przez 1, również zachowując ten iloczyn. W takim razie sumę iloczynów niezerowych cyfr liczb od 0 do 999 można zapisać jako

$$(1 + 1 + 2 + \ldots + 9)(1 + 1 + 2 + \ldots + 9)(1 + 1 + 2 + \ldots + 9),$$

gdzie nawiasy odpowiadają wybraniu odpowiednio cyfry setek, jedności i dziesiątek. Ten iloczyn jest rzeczywiście sześcianem.

Zadanie 32.

Załóżmy, że dodatnie liczby całkowite x i y spełniają równanie

$$x^2 + x + 1 = 3y^2.$$

Wykaż, że liczba $2y - 1$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Zacznijmy od pomnożenia obu stron równania przez 4, otrzymując

$$4x^2 + 4x + 4 = 12y^2,$$

co możemy zapisać jako

$$(2x + 1)^2 + 3 = 12y^2.$$

Odejmując obustronnie 3, uzyskujemy

$$(2x + 1)^2 = 3(4y^2 - 1) = 3(2y - 1)(2y + 1).$$

Wiemy, że $\mathrm{NWD}(2y - 1, 2y + 1) = \mathrm{NWD}(2y - 1, 2) = 1$. W takim razie jedna z liczb $2y - 1$ i $2y + 1$ musi być kwadratem, a druga — trzykrotnością kwadratu.

Rozpatrując wyjściowe równanie widzimy jednak, że liczba

$$3y^2 = x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$$

jest nieparzysta, a stąd liczba y jest nieparzysta, czyli liczba $2y + 1$ daje resztę 3 z dzielenia przez 4. Zatem liczba $2y + 1$ jest kwadratem, co oznacza, że liczba $2y - 1$ jest kwadratem, co należało udowodnić.

Zadanie 33.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x + y)^3 = -z \\ (y + z)^3 = -x \\ (z + x)^3 = -y \end{cases}$$

dla parami różnych liczb rzeczywistych x, y, z.

Rozwiązanie: Zacznijmy od odjęcia pierwszych dwóch równań stronami

$$(x + y)^3 - (y + z)^3 = x - z.$$

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia możemy rozłożyć lewą stronę otrzymując

$$(x-z)\left((x+y)^2+(x+y)(y+z)+(y+z)^2\right)=x-z.$$

Skoro dane liczby są parami różne, to możemy podzielić stronami równanie przez $x-z$, co sprowadzi je do warunku

$$\left((x+y)^2+(x+y)(y+z)+(y+z)^2\right)=1.$$

Wykonajmy podstawienie $a=x+y, b=y+z, c=x+z$. Stosując tą samą procedurę dla pozostałych par równań, dostaniemy nowy układ postaci

$$\begin{cases} a^2+ab+b^2=1 \\ b^2+bc+c^2=1 \\ c^2+ca+a^2=1 \end{cases}$$

Ponownie odejmując pierwsze dwa równania, uzyskamy

$$(a^2-c^2)+(ab-bc)=0,$$

które to wyrażenie można przedstawić w postaci

$$0=(a-c)(a+c)+b(a-c)=(a-c)(a+b+c).$$

Jeżeli $a=b$, to $x=z$, co nie jest możliwe. Zatem

$$0=a+b+c=(x+y)+(y+z)+(z+x)=2(x+y+z).$$

Stąd dostajemy $x+y=-z$, co w połączeniu z oryginalnym układem prowadzi do warunku

$$(-z)^3=-z,$$

a po przeniesieniu wyrazów na prawą stronę i rozłożeniu, uzyskamy

$$0=z^3-z=z(z^2-1)=z(z-1)(z+1).$$

Zatem liczba z jest jedną z liczb $1,0,-1$. Analogicznie liczby x i y mogą przyjąć tylko te wartości.

Skoro liczby x,y,z są parami różne, to jedynymi możliwymi trójkami (x,y,z) są

$$(1,0,-1),(1,-1,0),(0,1,-1),(0,-1,1),(-1,1,0),(-1,0,1).$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że każda z powyższych trójek spełnia rozważany układ równań, więc są to wszystkie jego rozwiązania.

Zadanie 34.

Wykaż, że dla dowolnych parami różnych nieujemnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi

$$\frac{x^2}{(y-z)^2} + \frac{y^2}{(z-x)^2} + \frac{z^2}{(x-y)^2} \geqslant 2.$$

Rozwiązanie: Bez straty ogólności przyjmijmy $x = \min(x, y, z)$. Możemy zatem zapisać $y = x + a$ i $z = x + b$, dla pewnych $a, b > 0$. W rezultacie otrzymujemy

$$\frac{x^2}{(y-z)^2} + \frac{y^2}{(z-x)^2} + \frac{z^2}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(a-b)^2} + \frac{(x+a)^2}{b^2} + \frac{(x+b)^2}{a^2} \geqslant \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}.$$

Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną, uzyskujemy

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geqslant 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}} = 2.$$

Zadanie 35.

W tablicę o wymiarach $n \times n$ wpisano parami różne liczby rzeczywiste. Asia i Basia dostały po jednej kopii tej tablicy. Asia co minutę zapisuje na kartce największą liczbę widoczną w jej tablicy, a następnie zmazuje ją wraz z wszystkimi liczbami w jej kolumnie i w jej wierszu. Basia postępuje podobnie ze swoją tablicą, w każdej minucie rozważając najmniejszą widoczną liczbę. Po n minutach, gdy tablice są puste, każda z dziewczynek dodaje zapisane przez siebie liczby. Wykaż, że wynik Asi nie będzie mniejszy od wyniku Basi.

Rozwiązanie: Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą kolejnymi liczbami zapisanymi przez Asię, natomiast $b_1, \ldots, b_n$ — liczbami zapisanymi przez Basię. Wykażemy, że dla dowolnego i spełniona jest nierówność

$$a_i \geqslant b_{n+1-i}.$$

Dodając stronami powyższe nierówności dla $i = 1, 2, \ldots, n$, otrzymamy tezę.

Gdy Asia pisała i-tą liczbę, pewne $i-1$ kolumn i wierszy było już zmazane. Gdy natomiast Basia pisała swoją $n+1-i$-tą liczbę, pewne $n-i$ kolumn i wierszy było zmazane. Skoro

$$(i-1) + (n-1) = n-1 < n,$$

to pewien wiersz i pewna kolumna nie były zmazane ani na tablicy Asi po $i-1$ minutach, ani na tablicy Basi po $n-i$ minutach. Zatem liczba x znajdująca się na ich przecięciu była widoczna dla Asi w jej i-tym ruchu i dla Basi w jej $n+1-i$-tym ruchu. Stąd uzyskujemy

$$a_i \geqslant x \geqslant b_{n+1-i},$$

czyli żądaną nierówność.

Zadanie 36.

Na polach nieskończonej szachownicy położono pewną (skończoną) liczbę kamieni. Jeśli na jakimś polu leżą co najmniej 4 kamienie, możemy zabrać z niego 4 kamienie i rozłożyć po jednym na pola sąsiednie. Wykaż, że niezależnie od naszych wyborów po pewnej liczbie takich operacji na każdym polu będą maksymalnie 3 kamienie.

Rozwiązanie: Wprowadźmy układ współrzędnych kartezjańskich w taki sposób, że punkty o współrzędnych całkowitych to dokładnie środki pól szachownicy. Będziemy nazywać *współrzędnymi* kamienia współrzędne środka pola, na którym leży.

Skoro kamieni jest tylko skończenie wiele, powiedzmy k, to na początku wszystkie są zawarte w pewnym kwadracie ograniczonym prostymi $x = \pm N$, $y = \pm N$, dla pewnej dodatniej liczby całkowitej N. Oznacza to, że obie współrzędne wszystkich kamieni są mniejsze od N i większe od $-N$.

Wykażemy, że jeśli k jest liczbą kamieni, to współrzędne wszystkich kamieni będą zawsze mniejsze od $N+k$ i większe od $-N-k$. Załóżmy przeciwnie, bez straty ogólności, że pewien kamień pojawi się na prostej $y = M$ dla $M \geqslant N+k$. Na początku jest poniżej prostej $y = N$, a w każdym ruchu jest przesuwany nie więcej niż o jedno pole do góry, więc po drodze będzie musiał pojawić się na każdej z prostych

$$y = M, \quad y = M-1, \quad \ldots, \quad y = N.$$

Zauważmy jednak, że jeśli na prostej postaci $y = n$ pojawia się kamień, to już zawsze będzie na niej co najmniej jeden kamień. Zatem w momencie, w którym kamień pojawiłby się na prostej $y = M$, na każdej z powyższych $M - N + 1 > k$ prostych musiałby być co najmniej jeden kamień. To jest oczywiście niemożliwe, skoro kamieni jest k.

Rozważmy teraz sumę kwadratów obu współrzędnych wszystkich kamieni. Z powyższego rozumowania wynika, że suma ta jest równa co najwyżej

$$k \cdot 2(N+k)^2.$$

Z drugiej strony, wykonanie ruchu na polu (x, y) zwiększa powyższą liczbę o

$$(x^2 + (y-1)^2 + x^2 + (y+1)^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2) - 4(x^2 + y^2) = 4.$$

Na początku suma kwadratów współrzędnych jest nieujemna, więc łącznie możemy wykonać nie więcej niż

$$\frac{1}{2} \cdot k(N+k)^2$$

ruchów zanim dojdziemy do sytuacji, w której na każdym polu są maksymalnie 3 kamienie.

Zadanie 37.

Na okrągłym stole leży 2024 działających zegarów wskazówkowych. Oznaczmy przez d sumę odległości od środka stołu do środków tarczy tych zegarów. Udowodnij, że w pewnym momencie suma odległości między środkiem stołu, a końcami wskazówek minutowych, będzie nie mniejsza niż d.

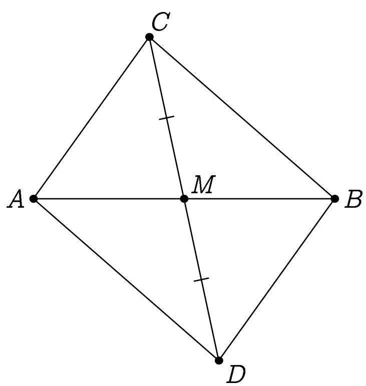
Rozwiązanie: Oznaczmy środek stołu przez O, a środek i-tego zegara przez O_i, dla $i = 1, 2, \ldots, 2024$. Ustalmy dowolną godzinę i oznaczmy pozycję wskazówki i-tego zegara przez A_i. Pół godziny później i-ta wskazówka pojawi się w punkcie B_i, który jest odbiciem A_i przez O_i.

Skorzystamy teraz z faktu mówiącego, że jeśli A, B, C są dowolnymi punktami na płaszczyźnie, a M jest środkiem odcinka AB, to

$$AC + BC \geqslant 2AM.$$

Istotnie, jeśli punkty A, B, C są współliniowe — jest to proste przeliczenie, a jeśli punkty te nie są współliniowe, możemy oznaczyć przez D odbicie punktu C względem punktu M. Wtedy czworokąt $ACBD$ jest równoległobokiem, ponieważ jego przekątne przecinają się w swoich środkach. Zatem z nierówności trójkąta uzyskujemy

$$AC + BC = AC + AD \geqslant 2AM.$$



Korzystając z udowodnionej nierówności dla punktów A_i, B_i, O otrzymamy

$$(A_1O + B_1O) + \ldots + (A_{2024}O + B_{2024}O) \geqslant 2(O_1O + \ldots + O_{2024}O) = 2d.$$

Zatem co najmniej jedna z liczb $A_1O+\ldots+A_{2024}O$ lub $B_1O+\ldots+B_{2024}O$ równa jest co najmniej d. Pierwsza z liczb odpowiada sumie odległości końców wskazówek od środka stołu w ustalonej na początku godzinie, a druga liczba odpowiada tej samej sumie odległości pół godziny później. Zatem w jednym z tych dwóch momentów warunek zadania będzie spełniony.

Zadanie 38.

Na okręgu leży 1000 pudełek, każde zawierające pewną liczbę żetonów. W jednym ruchu możemy wyjąć wszystkie żetony z dowolnego pudełka i rozmieścić je, umieszczając po jednym żetonie w kolejnych pudełkach — zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Wykaż, że dowolny początkowy rozkład 2024 żetonów w pudełkach można przekształcić w dowolny inny rozkład za pomocą ciągu ruchów opisanych wyżej.

Rozwiązanie: Dla uproszczenia przyjmijmy, że ruchy można wykonywać tylko na pudełkach zawierających niezerową liczbę żetonów. Oznaczmy kolejne pudełka idąc zgodnie z ruchem wskazówek zegara przez $A_1, \ldots, A_{1000}$. Udowodnimy najpierw, że z dowolnego rozmieszczenia żetonów można dojść do takiego, gdzie wszystkie 2024 żetony są w pudełku A_{1000}.

Nie będziemy wykonywać żadnych ruchów na pudełku A_{1000}, więc każdy żeton który do niego trafi już w nim zostanie. Jeśli w pewnym pudełku A_i jest co najmniej jeden żeton, to po wykonaniu na nim ruchu w pudełku A_{i+1} jest co najmniej jeden żeton. Jeśli zatem, dla $i < 1000$, w pewnym pudełku A_i jest żeton, to wykonując kolejno ruchy na pudełkach $A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{999}$, zwiększymy liczbę żetonów w pudełku A_{1000}. Wykonując taki ciąg ruchów nie więcej niż 2024 razy doprowadzimy wszystkie żetony do tego pudełka.

Rozpatrzmy teraz graf skierowany, w którym wierzchołkami są wszystkie możliwe rozkłady 2024 żetonów w pudełkach. Z każdego rozkładu prowadzimy krawędzie do wszystkich rozkładów, które można z niego uzyskać jednym ruchem. Właśnie udowodniliśmy, że z każdego wierzchołka można dojść do pewnego konkretnego, więc graf ten jest spójny. Wykażemy, że z każdego wierzchołka wychodzi tyle samo krawędzi, co do niego wchodzi. Wtedy z twierdzenia Eulera o cyklach nasz graf będzie miał cykl Eulera, czyli cykl przechodzący przez każdą krawędź dokładnie raz. Wtedy zapewnimy sobie, że z każdego wierzchołka możemy przejść do każdego innego, więc dostaniemy tezę.

Rozpatrzmy zatem dowolny rozkład, traktowany jako wierzchołek grafu. Wychodzi z niego tyle krawędzi, ile ma on niepustych pudełek. Rozważmy pewne niepuste pudełko, powiedzmy A_i. Zauważmy, że jest dokładnie jeden ruch, w wyniku którego uzyskamy ten rozkład wkładając ostatni żeton do pudełka A_i.

Istotnie, skoro ruch polega na wyjęciu wszystkich żetonów z danego pudełka i umieszczaniu ich w kolejnych, to jedyny sposób na "cofnięcie" ruchu kończącego w pudełku A_i to wyciąganie po jednym żetonie z pudełek $A_i, A_{i-1}, \ldots$, aż trafimy na puste pudełko, a następnie umieszczenie w tym pudełku wszystkich zebranych żetonów.

Zatem ruchów prowadzących do wybranego rozkładu jest dokładnie tyle, ile jest w nim niepustych pudełek, czyli dokładnie tyle, ile wychodzących z niego krawędzi. To kończy dowód.