I Czesko-Polsko-Słowackie
Zawody Matematyczne Juniorów

Zawody indywidualne
(poniedziałek, 21 maja 2012 r.)

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

1. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Punkty K, L, M są symetryczne do punktu P odpowiednio względem środków boków BC, CA, AB. Wykaż, że proste AK, BL, CM przecinają się w jednym punkcie.

2. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb pierwszych, dla których spełniona jest równość

$$a^2+ab+b^2=c^2+3\,.$$

3. Różne punkty A, B, C, D leżą na okręgu o środku w punkcie O w taki sposób, że

$$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=60^\circ\,.$$

Punkt P leży na krótszym łuku BC tego okręgu. Punkty K, L, M są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste AO, BO, CO. Wykaż, że

(a) trójkąt KLM jest równoboczny,

(b) pole trójkąta KLM nie zależy od wyboru położenia punktu P na krótszym łuku BC.

4. Udowodnij, że wśród dowolnych 51 wierzchołków 101-kąta foremnego istnieją takie trzy, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, spełniające równość $a^2+b^2=c^2$. Wykaż, że liczba $\frac{1}{2}(c-a)(c-b)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

(*version: Polish*)

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego