

IV Czech-Polish-Slovak Junior Mathematical Match

Team Competition
(Tuesday, 19 May 2015)

1. Nech I je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC a M je stred jeho strany BC . Ak platí $|AI| = |MI|$, tak medzi stranami trojuholníka ABC existujú dve, z ktorých jedna má dvojnásobnú dĺžku ako druhá. Dokážte.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

2. Zo šachovnice s rozmermi 8×8 sme odstránili prostredný štvorec s rozmermi 2×2 .

- a) Koľko *najviac* dám možno umiestniť na zvyšných 60 políčkoch tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?
b) Koľko *najmenej* dám sa dá umiestniť na šachovnicu tak, aby nimi bolo ohrozených všetkých 60 políčkoch?

(Dáma ohrozuje políčko, na ktorom stojí a tiež každé políčko, na ktoré sa vie dostať jedným ťahom bez toho, aby prešla ponad niektoré zo štyroch odstránených políčkoch.)

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte v polštině.

3. Różne punkty A i D leżą po tej samej stronie prostej BC , przy czym $|AB| = |BC| = |CD|$ oraz proste AD i BC są prostopadłe. Niech E będzie punktem przecięcia prostych AD i BC . Udowodnij, że

$$\left| |BE| - |CE| \right| < |AD|\sqrt{3}.$$

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenštině.

4. Wyznacz wszystkie takie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich, że

$$a + b + (D(a, b))^2 = n(a, b) = 2 \cdot n(a - 1, b),$$

gdzie $n(a, b)$ oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność, a $D(a, b)$ – największy wspólny dzielnik liczb a, b .

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v češtine.

5. Určete nejmenší reálnou konstantu p , pro kterou platí nerovnost

$$\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} \leq p \left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \right)$$

s libovolnými kladnými reálnými čísly a, b .

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v polštině.

6. Vrcholům krychle připišeme po jednom čísla $1, 2, 3, \dots, 8$ a každé její hraně pak přiřadíme součin čísel připsaných jejím dvěma krajním bodům. Určete největší možnou hodnotu součtu čísel přiřazených všem dvanácti hranám krychle.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

(version: mixed)