Na kółku OMJ. Dzielniki duże i małe

Seminarium OMJ dla nauczycieli matematyki
Arkadiusz Męcel (`a.mecel@mimuw.edu.pl`)
Zoom, 20-21.03.2022 r.

DZIELNIK WŁAŚCIWY liczby całkowitej dodatniej n to taki dodatni dzielnik liczby n, który jest mniejszy od n.

Zadanie 1. Wyznacz sumę wszystkich dodatnich liczb całkowitych, których największy dodatni dzielnik właściwy równy jest 55.

Zadanie 2. Znajdź dodatnią liczbę całkowitą n spełniającą jednocześnie następujące dwa warunki.

- Suma dwóch najmniejszych dzielników dodatnich liczby n równa jest 6.
- Suma dwóch największych dzielników dodatnich liczby n równa jest 2022.

Zadanie 3. Wypisano wszystkie dzielniki dodatnie liczby całkowitej $n \geqslant 1$, za wyjątkiem liczb 1 oraz n. Wśród wypisanych liczb największa jest 45 razy większa niż najmniejsza. Wyznacz możliwe wartości n.

Zadanie 4. Znajdź sumę trzech najmniejszych dzielników dodatnich liczby $2^{2016} - 1$.

Zadanie 5. Dodatnia liczba całkowita n jest sumą swoich trzech największych dzielników właściwych. Wykaż, że n jest liczbą podzielną przez 6.

Zadanie 6. Dodatnia liczba całkowita n spełnia warunek $n = a^2 + b^2$, przy czym $a > 0$ jest najmniejszym dzielnikiem n różnym od 1, zaś $b > 0$ jest dzielnikiem n. Pokaż, że n nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 7. Niech d będzie dodatnim dzielnikiem liczby całkowitej $n \geqslant 1$. Wykaż, że

$$2\sqrt{n} \leqslant d + \frac{n}{d} \leqslant n + 1.$$

Pokaż, że jeśli s_n jest średnią arytmetyczną wszystkich dodatnich dzielników liczby n, to zachodzą nierówności:

$$\sqrt{n} \leqslant s_n \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Zadanie 8. Znajdź liczby całkowite $n \geqslant 1$, których cztery najmniejsze dzielniki dodatnie $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ spełniają

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$$

Zadanie 9. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą o dzielnikach $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Wykaż nierówność

$$d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ \ldots \ + d_{k-1} d_k < n^2.$$

Kiedy liczba $d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ \ldots \ + d_{k-1} d_k$ jest dzielnikiem liczby n^2?

Dodatnią liczbę całkowitą n nazywamy ANTYPIERWSZĄ, gdy n posiada więcej dodatnich dzielników niż każda dodatnia liczba całkowita mniejsza od n. Przykładowymi liczbami antypierwszymi są: $1, 2, 4, 6, 12$ i 24.

Zadanie 10. Pokaż, że żadna z liczb

$$2^3 \cdot 5^2, \quad 2^3 \cdot 3^4, \quad 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

nie jest antypierwsza.

Zadanie 11. Pokaż, że jeśli $n > 1$ jest liczbą antypierwszą, to n jest liczbą parzystą.

Zadanie 12. Pokaż, że dla każdej liczby całkowitej $k > 1$ istnieje liczba antypierwsza n spełniająca warunek:

$$k \leqslant n < 2k.$$

Zadanie 13. Pokaż, że liczba $16! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 15 \cdot 16$ nie jest antypierwsza.