II Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Zawody indywidualne

(14 maja 2013 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych, dla których spełniona jest równość

$$\sqrt{x-\sqrt{y}}+\sqrt{x+\sqrt{y}}=\sqrt{xy}.$$

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że $y \geqslant 0$. Jeśli $y=0$, to $\sqrt{x-0}+\sqrt{x+0}=0$, czyli $x=0$.

Przyjmijmy, że $y>0$. Wówczas również $x>0$, gdyż w przeciwnym wypadku liczba $x-\sqrt{y}$ byłaby ujemna. Podnosząc daną równość obustronnie do kwadratu i przekształcając równoważnie, uzyskujemy kolejno

$$2x+2\sqrt{x^2-y}=xy$$
$$2\sqrt{x^2-y}=x(y-2)\,.$$

Podnosząc ostatni związek ponownie do kwadratu, otrzymujemy

$$4x^2-4y=x^2y^2-4x^2y+4x^2$$
$$y(x^2y-4x^2+4)=0\,.$$

Stąd wynika, że $x^2y-4x^2+4=0$. Ponadto $x\neq 0$, a zatem $y=4-\frac{4}{x^2}$. Ponieważ y jest dodatnią liczbą całkowitą, więc $x=2$, co oznacza, że $y=3$.

Pozostaje sprawdzić, że obie pary $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ oraz $(\mathbf{2},\mathbf{3})$ spełniają daną równość.

---

2. Każdą liczbę całkowitą dodatnią należy pokolorować na czerwono lub zielono w taki sposób, że spełnione są następujące dwa warunki:

- Niech n będzie dowolną czerwoną liczbą. Suma dowolnych n (niekoniecznie różnych) czerwonych liczb jest czerwona.
- Niech m będzie dowolną zieloną liczbą. Suma dowolnych m (niekoniecznie różnych) zielonych liczb jest zielona.

Wyznacz wszystkie takie pokolorowania.

Szkic rozwiązania

Bez straty ogólności przyjmijmy, że liczba 1 jest czerwona. Jeśli liczba 2 też jest czerwona, to wszystkie liczby: $3=2+1$, $4=3+1$, $5=4+1,\ldots$ również muszą być czerwone. Otrzymujemy zatem pokolorowanie, w którym wszystkie dodatnie liczby naturalne są czerwone. Pokolorowanie to spełnia warunki zadania.

Załóżmy teraz, że liczba 2 jest zielona. Rozpatrzymy dwa przypadki:

(a) Liczba 3 jest zielona. Wówczas każda z liczb $4=2+2$, $5=3+2$, $6=4+2,\ldots$ jest zielona. Otrzymujemy tym samym kolorowanie, w którym liczba 1 jest czerwona, a wszystkie pozostałe dodatnie liczby naturalne — zielone. Pokolorowanie to spełnia warunki zadania.

(b) Liczba 3 jest czerwona. Wówczas liczby $5=3+1+1$, $7=5+1+1$, $9=7+1+1,\ldots$ są czerwone, a liczby $4=2+2$, $6=4+2$, $8=6+2,\ldots$ są zielone. Otrzymujemy zatem pokolorowanie, w którym wszystkie liczby nieparzyste są czerwone, a wszystkie liczby parzyste — zielone. Pokolorowanie to spełnia warunki zadania, gdyż suma parzystej liczby liczby parzystych jest parzysta, a suma nieparzystej liczby liczb nieparzystych — nieparzysta.

W przypadku, gdy liczba 1 jest zielona uzyskujemy trzy symetryczne pokolorowania, spełniające warunki zadania. Łącznie istnieje więc sześć pokolorowań o danych własnościach.

---

3. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg oraz $AB=BC=CD$. Odcinki AC i BE przecinają się w punkcie K, a odcinki AD i CE przecinają się w punkcie L. Udowodnij, że $AK=KL$.

Szkic rozwiązania

Ponieważ łuki AB, BC i CD są tej samej długości, więc

$$\sphericalangle AEB=\sphericalangle BEC=\sphericalangle CAD\,.$$

Oznaczmy miarę tych kątów przez α.

Wobec tego $\sphericalangle KAL=\sphericalangle KEL=\alpha$, czyli na czworokącie $KLEA$ można opisać okrąg. Stąd wynika, że $\sphericalangle ALK=\sphericalangle AEK=\alpha$, gdyż są to kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Ostatecznie $\sphericalangle KAL=\sphericalangle ALK=\alpha$, a zatem trójkąt AKL jest równoramienny i $AK=KL$.

---

4. Wyznacz największą dwucyfrową liczbę d o następującej własności: dla dowolnej sześciocyfrowej liczby $\overline{aabbcc}$ liczba d jest dzielnikiem liczby $\overline{aabbcc}$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba d jest dzielnikiem odpowiadającej jej trzycyfrowej liczby $\overline{abc}$.

Uwaga. Cyfry $a\neq 0$, b i c nie muszą być różne.

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że największą liczbą dwucyfrową o danej własności jest $d=90$.

Załóżmy, że liczba $\overline{aabbcc}$ jest podzielna przez 90. Wówczas jej dzielnikami są liczby 10 i 9. Stąd wynika, że $c=0$ oraz $9\,|\,a+a+b+b+c+c$, czyli również $9\,|\,a+b+c$. Wobec tego liczba $\overline{abc}$ jest podzielna przez 10 i 9, a zatem jest podzielna przez 90. Analogicznie wykazujemy, że jeśli $90\,|\,\overline{abc}$, to $90\,|\,\overline{aabbcc}$.

Zauważmy, że liczba $d=99$ nie ma zadanej własności, gdyż $99\,|\,333333$, ale $99\nmid 333$.

Ostatecznie rozważmy $d=\overline{9x}$, gdzie x jest jedną z cyfr od 1 do 8. Zauważmy, że $\overline{9x}\,|\,\overline{9x0}$, ale $\overline{9x}\nmid\overline{99xx00}$, gdyż

$$\overline{99xx00}=1100\cdot\overline{9x}+9^2\cdot 10^3\cdot 11\,,$$

a żadna z liczb 91, 92,…, 98 nie jest dzielnikiem liczby $9^2\cdot 10^3\cdot 11$.

---

5. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt P leży na odcinku AB, a punkty S_1 i S_2 są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach APC i BPC. Wykaż, że środek odcinka S_1S_2 leży na symetralnej odcinka CM.

Szkic rozwiązania

W przypadku gdy $P=M$ wystarczy zauważyć, że prosta S_1S_2 jest symetralną odcinka CM. Przeprowadzimy rozumowanie w przypadku, gdy $P\neq M$.

Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt P leży na odcinku AM. Niech punkt S będzie środkiem odcinka S_1S_2, punkt K – środkiem odcinka AP, a punkt L – środkiem odcinka BP. Zauważmy, że proste S_1S_2, S_1K oraz S_2L są symetralnymi odpowiednio odcinków CP, AP i BP.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Oznaczmy przez X rzut prostokątny punktu S na prostą AB. Punkt X jest wówczas środkiem odcinka KL, a zatem

$$AX = AK + KX = \tfrac{1}{2}AP + \tfrac{1}{2}KL = \tfrac{1}{2}AP + \tfrac{1}{4}AB\,.$$

Oznaczmy przez Y środek odcinka PM. Wówczas

$$AY = AP + PY = AP + \tfrac{1}{2}PM = AP + \tfrac{1}{2}(AM - AP) = \tfrac{1}{2}AP + \tfrac{1}{2}AM = \tfrac{1}{2}AP + \tfrac{1}{4}AB\,.$$

Wobec tego $AX = AY$, czyli $X = Y$. Stąd wynika, że prosta SY jest symetralną odcinka PM. Ponieważ punkt S leży również na symetralnej odcinka CP, więc punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CPM, a zatem leży także na symetralnej odcinka CM.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego