Zdalne seminarium OMJ
dla nauczycieli matematyki
Platforma Zoom — 15, 16 maja 2020 r.

Tomasz Szymczyk

Jedno znane twierdzenie

1. W trójkącie prostokątnym ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D. Znaleźć długość boku AC tego trójkąta, jeśli $CD = 3$ i $BD = 5$.

2. (XIV OMJ, I) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 45^\circ \quad \text{oraz} \quad DA = 3, \quad AB = 7\sqrt{2}, \quad BC = 4.$$

Oblicz długość boku CD.

3. (PD V LO, BB) Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB > BC > AC$. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na bok AB. Wykazać, że dla każdego punktu X leżącego na odcinku CD prawdziwa jest równość

$$AC^2 + BX^2 = AX^2 + BC^2.$$

4. Wykazać, że jeśli w czworokącie wypukłym przekątne są prostopadłe, to sumy kwadratów jego przeciwległych boków są równe.

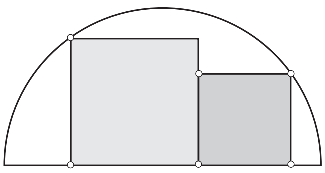
5. (I OMG, I) W czworokącie wypukłym przekątne są prostopadłe oraz sumy długości przeciwległych jego boków są równe. Wykazać, że jedna z jego przekątnych dzieli drugą na połowy.

6. (PD V LO, BB) W okręgu o promieniu R poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy AB i CD. Wykazać, że zachodzi równość

$$AC^2 + BD^2 = 4R^2.$$

7. Wewnątrz prostokąta $ABCD$ istnieje taki punkt P, że: $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$. Wyznaczyć PD.

8. (PD V LO, BB) W półkole koła o promieniu $r = 5$ wpisano dwa kwadraty, jak na rysunku poniżej. Obliczyć sumę pól tych kwadratów.



9. Dane są okręgi o promieniach r i R styczne zewnętrznie, które są styczne do prostej ℓ w dwóch różnych punktach A i B. Obliczyć długość odcinka AB.

10. Dane są okręgi o promieniach r i R styczne zewnętrznie, które są styczne do prostej ℓ w dwóch różnych punktach. Wyznaczyć promień okręgu stycznego zewnętrznie do danych okręgów i stycznego do prostej ℓ.

11. Punkt P jest punktem wewnętrznym trójkąta ostrokątnego ABC. Punkty P_1, P_2, P_3 leżą poza tym trójkątem tak, że spełnione są warunki:

$$PP_1 \perp AB, \quad PP_2 \perp BC, \quad PP_3 \perp AC \quad \text{i} \quad BP_1 = BP_2, \quad CP_2 = CP_3.$$

wykazać, że $AP_1 = AP_3$.

12. Dany jest tak czworokąt wypukły $ABCD$, że proste AD i BC są prostopadłe. Wykazać, że zachodzi równość

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2.$$

13. (PD V LO, BB) Punkt P leży wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC. Punkty D, E, F są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, AC, AB. Wykazać, że

$$AF^2 + BD^2 + CE^2 = BF^2 + CD^2 + AE^2.$$

14. Punkt P jest takim punktem wewnętrznym kwadratu $ABCD$, że $AP:BP:CP = 1:2:3$. Wyznaczyć miarę kąta APB.

15. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AB = AC = 5$. Na jego boku BC wybrano dowolnie punkty P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Przyjmijmy:

$$m_i = AP_i^2 + BP_i \cdot CP_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Wyznaczyć sumę $m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$.

16. (XV OMJ, I) Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $\sphericalangle EAF = 45^\circ$ oraz $BE = DF$. Wykaż, że pole trójkąta AEF jest równe sumie pól trójkątów ABE i ADF.

17. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano takie różne punkty P_1, P_2, P_3, P_4, że

$$AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4B.$$

Wykazać, że

$$CP_1^2 + CP_2^2 + CP_3^2 + CP_4^2 = AP_1^2 + AP_2^2 + AP_3^2 + AP_4^2.$$

Literatura

[1] Łukasz Drwięga, Tomasz Szymczyk, *444 konkursowe zadania z matematyki dla gimnazjalistów.* Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2013

[2] Xu Jiagu, *Lecture Notes on Mathematical Olympiad Courses. For Junior Section Vol. 1.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2010

[3] Ivan Kokan, Peter Bakić, *Mathematical Competitions in Croatia.* Croatian Mathematical Society, Zagreb 2018

https://www.omj.edu.pl/zadania

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej