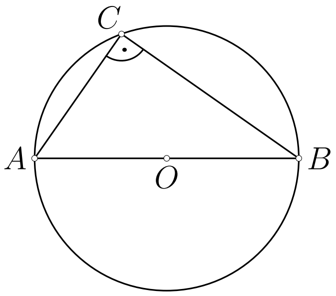
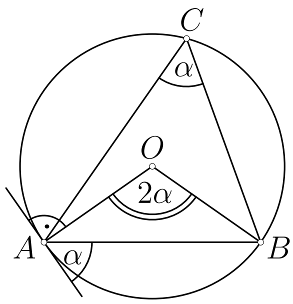
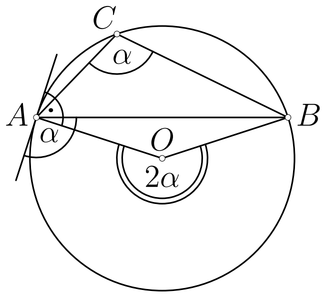
Kąty w okręgu

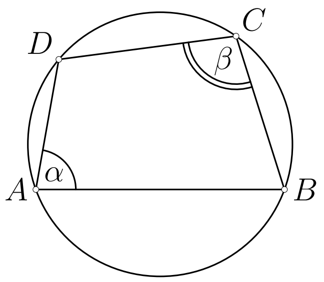
Zależności między kątami środkowymi, wpisanymi i dopisanymi



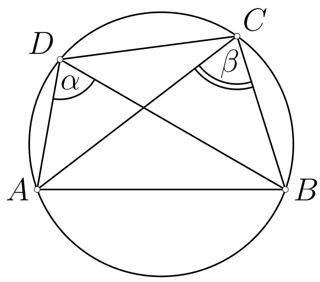




Kiedy czworokąt wypukły można wpisać w okrąg?



$\alpha + \beta = 180°$



$\alpha = \beta$

Zadanie 1. Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg o. Punkt D leży na krótszym łuku BC okręgu o. Punkt E jest symetryczny do punktu B względem prostej CD. Wykaż, że punkty A, D, E leżą na jednej prostej. *OMJ 10-1-2*

Zadanie 2. Dane są okręgi o_1 i o_2 styczne zewnętrznie w punkcie A. Prosta ℓ jest jedną ze wspólnych stycznych zewnętrznych do o_1 i o_2 i jest styczna do tych okręgów odpowiednio w punktach B i C. Udowodnij, że kąt BAC jest prosty.

Zadanie 3. Do dwóch okręgów przecinających się w punktach A i B poprowadzono wspólną styczną. Niech C i D będą punktami styczności. Udowodnij, że $\sphericalangle CAD + \sphericalangle CBD = 180°$.

Zadanie 4. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC wpisany w okrąg o. Proste styczne w punktach B i C przecinają się w punkcie D. Udowodnij, że $\sphericalangle CDB = 180° - 2\sphericalangle BAC$. Zbadaj analogiczną konfigurację, gdy trójkąt ABC nie jest ostrokątny.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Okrąg o_1 jest styczny do boków AB i BC odpowiednio w punktach D i E, okrąg o_2 jest styczny do boków AC i BC odpowiednio w punktach F i G, a ponadto okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie w punkcie H. Wykaż, że $\sphericalangle FHD = 150°$.

Zadanie 6. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Przez A poprowadzono prostą przecinającą okręgi w punktach C i D. Przez B poprowadzono prostą przecinającą okręgi w punktach E i F. Udowodnij, że kąty CBD i EAF są równe.

Zadanie 7. Punkty A, B, C, D leżą w tej kolejności na okręgu. Kąt wpisany oparty na łuku AB niezawierającym punktu C ma miarę α. Kąt wpisany oparty na łuku CD niezawierającym punktu A ma miarę β. Znajdź miarę kąta między cięciwami AC i BD oraz miarę kąta między prostymi AD i BC.

Zadanie 8. Ośmiokąt wypukły $AKBLCMDN$ jest wpisany w okrąg, przy czym $AK = KB$, $BL = LC$, $CM = MD$, $DN = NA$. Wykaż, że proste KM, LN są prostopadłe.

Zadanie 9. Dany jest okrąg o o środku O. Punkty C i K leżą na o, przy czym $\sphericalangle KOC = 90°$. Punkt B leży na krótszym łuku CK okręgu o. Punkt A leży na odcinku OK, przy czym $\sphericalangle CBA = 90°$. Punkt D wybrano tak, że $ABCD$ jest prostokątem. Odcinki OC i AD przecinają się w punkcie E. Oblicz miarę kąta DBA wiedząc, że $\sphericalangle DEO = 125°$.

Zadanie 10. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD prostokąta $ABCD$, przy czym trójkąt AEF jest równoboczny. Punkt M jest środkiem odcinka AF. Wykaż, że trójkąt BCM jest równoboczny. *OMJ 9-1-3*

Zadanie 11. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest środkiem odcinka CD. Wykaż, że jeżeli $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BCD$, to $AC = CD$. *OMJ 9-2-5*

Zadanie 12. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt E leży na przekątnej AC, przy czym $AE > EC$. Na boku AB wybrano punkt F, różny od B, dla którego $EF = DE$. Udowodnij, że kąt DEF jest prosty. *OMJ 16-2-2*

Zadanie 13. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt E leży na przekątnej AC. Zbudowano trójkąt równoboczny BEF, przy czym punkty A i F leżą po różnych stronach prostej BE. Znajdź miarę kąta CDF.

Zadanie 14. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC < BC$ oraz $\sphericalangle ACB = 60°$. Punkt D, różny od A, leży na odcinku AC, przy czym $AB = BD$, a punkt E, różny od B, leży na prostej BC, przy czym $AB = AE$. Wykaż, że $\sphericalangle DEC = 30°$. *OMJ 18-3-3*

Zadanie 15. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta równobocznego ABC i spełniają warunki $KM = LM$, $\sphericalangle KML = 90°$ oraz $AM = BK$. Udowodnij, że $\sphericalangle CKL = 90°$. *OMJ 17-1-5*

Zadanie 16. Bok AE jest średnicą okręgu opisanego na pięciokącie wypukłym $ABCDE$. Punkty F i G leżą na odcinku AE, przy czym $AF < AG$, $\sphericalangle BFA = \sphericalangle EFC$ i $\sphericalangle CGA = \sphericalangle EGD$. Wiedząc, że $\sphericalangle EAB = 70°$ i $\sphericalangle DEA = 65°$, oblicz miarę kąta FCG.

Zadanie 17. Dwusieczna kąta BAC przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie M różnym od A. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Udowodnij, że $MB = MC = MI$. *Twierdzenie o trójliściu*

Zadanie 18. Czworokąt wypukły $ABCD$ podzielono na pięć czworokątów wypukłych: $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$ i $A'B'C'D'$. Załóżmy, że każdy z czworokątów $ABCD$, $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DAA'D'$ można wpisać w okrąg. Udowodnij, że czworokąt $A'B'C'D'$ również można wpisać w okrąg.

Gdynia, 13.01.2024
opracował: Tomasz Cieśla