Korzyści z okręgów – seminarium OMJ, 13.01.2024, Warszawa

Dominika Regiec-Cieszyńska

Twierdzenie (o kącie wpisanym i środkowym)**.** Kąt wpisany w ustalony okrąg jest dwukrotnie mniejszy od kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

Wniosek. Kąt oparty na średnicy jest prosty.

Twierdzenie (o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku + twierdzenie odwrotne)**.** Czworokąt wypukły $ABCD$ da się wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

Uwaga. a) Kąty wpisane oparte na *takich samych* łukach są równe.

b) Cięciwy, na których są oparte kąty wpisane o równej mierze, są równe.

Twierdzenie (o czworokącie wpisanym w okrąg)**.** Czworokąt da się wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy suma jego przeciwległych kątów jest równa $180°$.

Wniosek. Czworokąt da się wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy pewien jego kąt wewnętrzny jest równy przeciwległemu kątowi zewnętrznemu.

Spodki wysokości

Zadanie 1. W trójkącie ABC punkty D i E są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B. Wykaż, że punkty A, B, D, E leżą na jednym okręgu. Gdzie znajduje się środek tego okręgu?

Zadanie 2. W trójkącie ABC punkty D i E są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B, a punkt H jest ortocentrum tego trójkąta. Wykaż, że punkty C, D, E, H leżą na jednym okręgu. Gdzie znajduje się środek tego okręgu?

Zadanie 3. W trójkącie ABC punkty D i E są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B. Wykaż, że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ADE$.

Zadanie 4. W trójkącie ABC punkty D, E i F są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A, B i C. Udowodnij, że proste AD, BE i CF zawierają dwusieczne *trójkąta spodkowego* DEF.

Zadanie 5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym $\sphericalangle ACB = 60°$. Punkty D i E są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykaż, że trójkąt DEM jest równoboczny.

Zadanie 6 (OMJ 9-1-3)**.** Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD prostokąta $ABCD$, przy czym trójkąt AEF jest równoboczny. Punkt M jest środkiem odcinka AF. Wykaż, że trójkąt BCM jest równoboczny.

Kąty

Zadanie 7. Punkty H jest ortocentrum trójkąta ABC, a punkt O – środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Udowodnij, że $\sphericalangle HCA = \sphericalangle OCB$.

Zadanie 8. Udowodnij, że jeśli trapez da się wpisać w okrąg, to jest on równoramienny.

Zadanie 9. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E. Udowodnij, że $\sphericalangle CEB = \sphericalangle CSB$.

Zadanie 10. W okrąg wpisano dwa trapezy, których wszystkie boki są parami równoległe. Udowodnij, że przekątne tych trapezów są tej samej długości.

Zadanie 11. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Przez punkt A poprowadzono prostą przecinającą okręgi w punktach C i D. Przez punkt B poprowadzono prostą przecinającą okręgi w punktach E i F. Udowodnij, że kąty CBD i EAF są równe.

Zadanie 12. Na boku BC czworokąta $ABCD$ leżą punkty E i F ($BE < BF$). Wiadomo, że

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle CDF \text{ oraz } \sphericalangle EAF = \sphericalangle FDE.$$

Wykaż, że $\sphericalangle FAC = \sphericalangle EDB$.

Zadanie 13 (OMJ 16-2-2)**.** Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt E leży na przekątnej AC, przy czym $AE > EC$. Na boku AB wybrano punkt F, różny od B, dla którego $EF = DE$. Udowodnij, że kąt DEF jest prosty.

Zadanie 14. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt E leży na przekątnej AC. Zbudowano trójkąt równoboczny BEF, przy czym punkty A i F leżą po różnych stronach prostej BE. Znajdź miarę kąta CDF.

Zadanie 15. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ADP$. Udowodnij, że $\sphericalangle DAP = \sphericalangle DCP$.

Odcinki

Zadanie 16. *(odbicia ortocentrum)* Niech H będzie ortocentrum trójkąta ABC, a punkt F – spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Przedłużmy wysokość CF do powtórnego przecięcia się z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$ w punkcie H'. Wykaż, że $HF = H'F$.

Zadanie 17. W trójkącie ABC zachodzi $AB \neq BC$. Udowodnij, że punkt przecięcia dwusiecznej kąta ABC i symetralnej boku AC należy do okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zadanie 18. *(trójliść)* Niech punkt I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkt M – środkiem tego łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC, na którym nie leży punkt C. Udowodnij, że $MA = MI = MB$.

Zadanie 19. Na przeciwprostokątnej BC trójkąta prostokątnego $ABCD$ zbudowano po zewnętrznej stronie kwadrat $BCDE$. Niech O będzie środkiem tego kwadratu. Wykazać, że $\sphericalangle BAO = \sphericalangle CAO$.

Zadanie 20. W trójkącie ABC kąt B ma miarę $60°$. Punkty D i F leżą odpowiednio na bokach BC i AB tego trójkąta, przy czym półproste AD i CF są dwusiecznymi kątów tego trójkąta, przecinającymi się w punkcie I. Udowodnij, że $ID = IF$.

Zadanie 21. Dane są dwa okręgi: odcinek AB jest średnicą pierwszego, a punkt B jest środkiem drugiego. Prosta przechodząca przez punkt A przecina pierwszy okrąg w punkcie K różnym od A i drugi okrąg w punktach M i N. Udowodnij, że punkt K jest środkiem odcinka MN.

Zadanie 22. Punkt D leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC. Udowodnij, że $CD = AD + BD$.

Zadanie 23 (OMJ 9-2-5)**.** W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest środkiem odcinka CD. Wykaż, że jeżeli $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BCD$, to $AC = CD$.

Wspólny punkt, jedna prosta

Zadanie 24. Udowodnij, że dla dowolnego trójkąta ABC okręgi o średnicach AB, AC przecinają się na prostej BC.

Zadanie 25. Punkty, A, B, C leżą na jednej prostej k w tej kolejności. Punkty D, E leżą po tej samej stronie prostej k, przy czym trójkąty ABD i BCE są równoboczne. Okręgi opisane na trójkątach ABD i BCE przecinają się w punktach B i F. Udowodnij, że punkty C, F, D są współliniowe.

Zadanie 26 (OMJ 10-1-2)**.** Trójkąt równoboczny ABC jest wpisany w okrąg o. Punkt D leży na krótszym łuku BC okręgu o. Punkt E jest symetryczny do punktu B względem prostej CD. Wykaż, że punkty A, D, E leżą na jednej prostej.

Zadanie 27 (twierdzenie Miquela)**.** Na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty D, E, F. Okręgi opisane na trójkątach AFE i BFD przecinają się ponownie w punkcie P. Udowodnij, że punkty C, D, E, P leżą na jednym okręgu.

Zadanie 28. Wykaż, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2\ldots A_{12}$ przekątne A_1A_5, A_3A_8 i A_4A_{11} przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 29. Punkt E leży na boku BC kwadratu $ABCD$. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów E i B odpowiednio na proste BD i DE. Dowieść, że punkty A, P, Q leżą na jednej prostej.

Zadanie 30 (twierdzenie o prostej Simsona)**.** Udowodnij, że punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy rzuty prostokątne punktu P na proste zawierające boki trójkąta są współliniowe.

Wskazówki

1. Okrąg o średnicy AB.
2. Okrąg o średnicy CH.
3. Skorzystaj z zadania 1.
4. Skorzystaj z zadania 2 i dwóch analogicznych okręgów.
5. Zauważ, że punkt M jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABDE$. Skorzystaj z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym.
6. Uzasadnij, że czworokąty $ABEM$ i $FCEM$ da się wpisać w okrąg. Skorzystaj z twierdzenia o kątach wpisanych.
7. Zauważ, że $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC$.
8. Kąty zarówno przy przeciwległych wierzchołkach, jak i przy ramionach, sumują się do $180°$.
9. Korzystając z poprzedniego zadania uzasadnij, że oba kąty z tezy są dwukrotnością kąta BDC.
10. Uzasadnij, że kąty wpisane oparte na tych przekątnych są równe.
11. Spójrz na pozostałe kąty w trójkątach CBD i EAF.
12. Korzystając z okręgu opisanego na czworokącie $AEFD$ uzasadnij, że kąty przy wierzchołkach B i D czworokąta $ABCD$ sumują się do $180°$.
13. Zauważ, że punkty D, B, F leżą na okręgu o środku E. Skorzystaj z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym.

14. Zauważ, że punkty D, B, F leżą na okręgu o środku E. Korzystając z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym wyznacz miarę kąta BDF.

15. Dorysuj równoległobok $APXD$. Uzasadnij, że punkty D, P, C, X leżą na jednym okręgu.

16. Uzasadnij, że $\sphericalangle ABH' = \sphericalangle ACH' = \sphericalangle ABH$. Skorzystaj z przystawania trójkątów FBH i FBH'.

17. Uzasadnij, że zarówno dwusieczna, jak i symetralna przechodzą przez środek łuku AC.

18. Równość $MA = MB$ wynika z poprzedniego zadania. Dla uzasadnienia równości $MA = MI$ udowodnij z rachunku na kątach, że trójkąt MAI jest równoramienny.

19. Zauważ, że punkty A, B, C, O leżą na jednym okręgu.

20. Uzasadnij, że punkty B, D, I, F leżą na jednym okręgu.

21. Zauważ, że kąt AKB jest prosty.

22. Niech X będzie takim punktem na odcinku CD, że $XD = AD$. Udowodnij, że trójkąty AXC i ADB są przystające.

23. Niech F będzie środkiem odcinka AC. Zauważ, że $DF \parallel BC$ i $EF \parallel AD$. Uzasadnij, że na trapezie $ADEF$ można opisać okrąg.

24. Niech P będzie punktem przecięcia rozważanych okręgów. Uzasadnij, że kąty APB i APC dają w sumie $180°$.

25. Policz kąty BFD i BFC.

26. Policz kąty BDE i ADB.

27. Zauważ, że $\sphericalangle CEP = \sphericalangle AFP = \sphericalangle BDP$.

28. Sposób I: uzasadnij, że proste te są dwusiecznymi pewnego trójkąta. Sposób II: uzasadnij, że proste te są wysokościami pewnego trójkąta.

29. Zauważ, że punkty A, B, Q, C, D oraz B, P, E, Q leżą na jednym okręgu. Uzasadnij, że $\sphericalangle AQB = \sphericalangle PQB$.

30. Rozważ okręgi o średnicach BP i CP.