Zestaw 1

1. W wierszu zapisano kolejno 2010 liczb. Pierwsza zapisana liczba jest równa 7 oraz suma każdych kolejnych siedmiu liczb jest równa 77. Ile może być równa ostatnia z zapisanych liczb?

Wskazówka
Ponumeruj wypisane liczby a_1, a_2, ..., a_{2010}, a następnie znajdź zależność pomiędzy liczbami a_k i a_{k+7}.

2. Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Na przeciwprostokątnej AB tego trójkąta wybrano takie punkty D i E, że zachodzą równości $AD = AC$ i $BE = BC$. Oblicz długość odcinka DE.

Wskazówka
Można wykorzystać fakt: jeżeli z punktu poza okręgiem poprowadzimy styczne do tego okręgu, to odcinki łączące ten punkt z punktami styczności są równej długości.

3. Wyznacz liczbę par (x,y) liczb całkowitych spełniających równanie

$$x^4 = y^4 + 1223334444.$$

Wskazówka
Zbadaj, jaką liczbą — ze względu na przystość liczb x i y — może być liczba $x^4 - y^4$.

4. W pudełku znajduje się 11 kul białych i 11 kul niebieskich. Jaś i Małgosia grają w następującą grę, którą rozpoczyna Małgosia. Wyjmuje ona z tego pudełka wybrane przez siebie dwie kule. Jeżeli wybierze kule jednakowego koloru, to do pudełka dokłada jedną kulę białą; jeżeli wybierze kule różnych kolorów, to dokłada kulę niebieską. Następnie swój ruch, według tych samych zasad, wykonuje Jaś i znów Małgosia, znów Jaś itd., aż w końcu w pudełku zostanie tylko jedna kula. Jeżeli ta kula będzie biała, wygrywa Małgosia. W przeciwnym wypadku wygrywa Jaś. Czy Małgosia może tak prowadzić tę grę, aby wygrać? Odpowiedź uzasadnij.

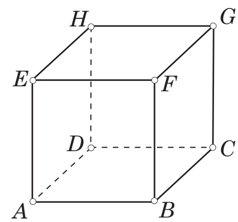
Wskazówka
Wykaż, że po każdej operacji liczby kul niebieskich w pudełku są tej samej parzystości.

5. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} a^2+24=9b+\dfrac{a+c}{2} \\ b^2+25=9c+\dfrac{b+a}{2} \\ c^2+26=9a+\dfrac{c+b}{2}. \end{cases}$$

Wskazówka
Można dodać równania stronami oraz wykorzystać wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń.

6. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Na krawędziach AE, BC i GH tego sześcianu wybrano odpowiednio takie punkty M, N i P, że $AM=CN=HP$.
Wykaż, że trójkąt MNP jest trójkątem równobocznym.



Wskazówka
Uzasadnij, że trójkąty AMN, CNP i HPM są trójkątami przystającyni.

7. Powiemy, że liczba całkowita n jest liczbą *słoneczną*, jeżeli $n=a^2+5b^2$, gdzie liczby a i b są liczbami całkowitymi różnymi od zera. Wykaż, że jeżeli liczba n jest liczbą *słoneczną*, to liczba n^4 też jest liczbą *słoneczną*.

Wskazówka
Wykaż, że kwadrat liczby *słonecznej* jest liczbą *słoneczną*.