Zestaw 2 – szkice rozwiązań zadań

1. Dana jest taka liczba rzeczywista, której rozwinięcie dziesiętne jest nieskończone i składa się wyłącznie z cyfr 1, 2 i 3. Wykazać, że jeżeli w tym rozwinięciu jest co najwyżej 2010 jedynek i co najwyżej 2010 dwójek, to dana liczba jest wymierna.

Rozwiązanie

Zauważmy, że rozwinięcie dziesiętne danej liczby ma od pewnego miejsca po przecinku same trójki. Gdyby było inaczej, to liczba jedynek i dwójek nie byłaby skończona, a przecież jedynek i dwójek razem jest co najwyżej 4020. Wobec tego daną liczbę można zapisać jako sumę ułamka dziesiętnego skończonego x (oznaczmy przez n liczbę cyfr po przecinku liczby x) i liczby

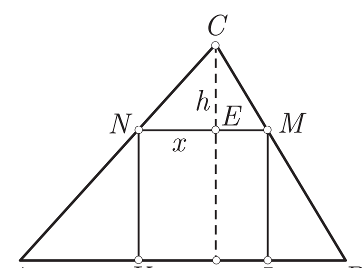
$$y = 0,\underbrace{00\ldots0}_{n}333\ldots = \frac{0,333\ldots}{10^n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^n}.$$

A zatem liczba y jest liczbą wymierną. Stąd liczba, o której mowa w zadaniu jako suma liczb wymiernych x i y jest liczbą wymierną.

2. W trójkąt ostrokątny ABC o polu S wpisano kwadrat $KLMN$ o polu P w taki sposób, że punkty K i L leżą na boku AB, a punkty M i N leżą odpowiednio na bokach BC i CA. Oblicz sumę długości boku AB i wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia:
c — długość boku AB,
h — długość wysokości CD,
x — długość boku kwadratu $KLMN$
(zobacz rysunek).



Ponieważ trójkąty NMC i ABC są podobne (mają równe odpowiednie kąty), więc

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CE}{CD} \quad \text{czyli} \quad \frac{x}{c} = \frac{h-x}{h}.$$

Stąd $xh = ch - cx$, czyli $x(c+h) = ch$. A zatem $\sqrt{P}(c+h) = 2S$, czyli

$$AB + CD = c + h = \frac{2S}{\sqrt{P}}.$$

3. Rozstrzygnąć, czy istnieją parami różne liczby pierwsze p, q, r, dla których liczba

$$\frac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr}$$

jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie

Załóżmy, że liczba $\frac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr}$ jest całkowita. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $p<q<r$. Liczba r jest pierwsza, więc musi być ona dzielnikiem jednej z liczb $p+q$, $q+r$, $r+p$. Gdyby liczba $q+r$ była podzielna przez r, to przez r podzielna byłby również liczba q, co nie jest możliwe. Podobnie, gdyby liczba $p+r$ była podzielna przez r, to przez r podzielna byłby również liczba p, co też nie jest możliwe. Wobec tego $r\,|\,p+q$ i w konsekwencji

$$1 \leqslant \frac{p+q}{r} < \frac{2r}{r} = 2\,.$$

Zatem liczba $\frac{p+q}{r}$ — jako liczba całkowita, musi być równa 1. Stąd uzyskujemy $p+q=r$, co z kolei implikuje równość $p=2$ (w przeciwnym razie liczba $r=p+q$, jako suma dwóch liczb nieparzystych, byłaby liczbą parzystą większą od 2, czyli złożoną). Wobec tego $p=2$ oraz $r=q+2$.
Dany w treści zadania ułamek redukuje się zatem do postaci

$$\frac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr} = \frac{(2q+2)(q+4)}{2q} = q+5+\frac{4}{q}.$$

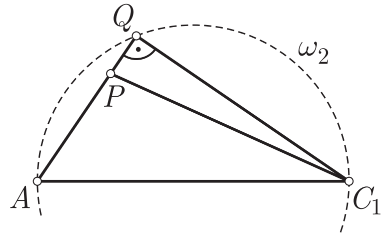
Liczba ta jest całkowita tylko wtedy, gdy $q=2$, stąd $q=p$. Otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że liczby p i q są różne. Tak więc nie istnieją liczby p, q, r spełniające warunki zadania.

4. Dany jest sześcian $ABCDA_1B_1C_1D_1$, w którym odcinek AC_1 jest jego główną przekątną. Wykaż, że jeżeli punkt P, różny od punktów A i C_1, leży na powierzchni tego sześcianu, to trójkąt APC_1 jest prostokątny lub rozwartokątny.

Rozwiązanie

Opiszmy na danym sześcianie sferę. Możliwe są dwa przypadki położenia punktu P.
Przypadek 1.
Punkt P jest jednym z wierzchołków B, C, D, A_1, B_1, D_1 sześcianu. Wtedy przekrój sfery płaszczyzną, do której należą punkty A, P, C_1 jest okręgiem ω_1, na którym leżą wszystkie te trzy punkty, a ponadto odcinek AC_1 jest średnicą okręgu ω_1. A zatem trójkąt APC_1 jest prostokątny.

Przypadek 2.



Punkt P leży na powierzchni sześcianu, ale nie jest żadnym z jego wierzchołków. Tym razem przekrój sfery płaszczyzną, do której należą A, P, C_1 jest okręgiem ω_2, którego średnicą jest odcinek AC_1, a punkt P leży wewnątrz okręgu ω_2. Pokażemy, że $\sphericalangle APC_1$ jest kątem rozwartym.

Oznaczmy przez Q ($Q \neq A$) punkt, w którym półprosta AP przecina sferę. Ponieważ punkt Q leży w tej samej płaszczyźnie, co punkty A, P, C_1, więc punkt Q leży na okręgu ω_2 i kąt AQC_1 jest kątem prostym. A zatem trójkąt PQC_1 jest prostokątny, skąd wynika, że kąty QPC_1 i PC_1Q są ostre. Wówczas kąt APC_1 jest rozwarty, bo $\sphericalangle APC_1 = 180° - \sphericalangle QPC_1$.

Wobec tego niezależnie od wyboru punktu P trójkąt APC_1 jest prostokątny lub rozwartokątny.

---

5. Na okręgu napisano n liczb rzeczywistych w taki sposób, że każda z tych liczb jest równa wartości bezwzględnej różnicy dwóch liczb stojących bezpośrednio za nią (patrząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara).

a) Znajdź te liczby, jeśli $n = 2010$ a ich suma jest równa 1340.

b) Znajdź sumę tych liczb, jeśli $n = 1\,000$.

Rozwiązanie

Znajdźmy wśród wypisanych liczb największą i ponumerujmy kolejno wszystkie wypisane liczby, patrząc zgodnie z ruchem wskazówek zegara i zaczynając od tej największej: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Oznaczmy też $a_1 = x$.

Ponieważ każda z wypisanych liczb jest równa wartości bezwzględnej dwóch innych, to wszystkie wypisane liczby są nieujemne, czyli $x \geqslant 0$. Wynika stąd, że jeżeli $x = 0$, to wszystkie liczby wypisane na okręgu są zerami.

Załóżmy więc, że $x > 0$. Ponieważ $|a_2 - a_3| = x$, a różnica $a_2 - a_3$ jest liczbą z przedziału $\langle -x, x\rangle$ (bo $0 \leqslant a_2 \leqslant x$ oraz $0 \leqslant a_3 \leqslant x$), to możliwe są dwa przypadki:

(1) $a_2 - a_3 = x$; wtedy $a_2 = x$ i $a_3 = 0$, a następnie

$$a_4 = x,\ a_5 = x,\ a_6 = 0,\ a_7 = x,\ a_8 = x,\ a_9 = 0.$$

Kontynuując to rozumowanie zauważamy, że spośród wypisanych liczb wszystkie o numerach podzielnych przez 3 są równe 0, a wszystkie pozostałe są równe x. Z drugiej strony

$$a_n = |a_1 - a_2| = |x - x| = 0,$$

czyli n jest liczbą podzielną przez 3.

(2) $a_2 - a_3 = -x$; wtedy $a_2 = 0$ i $a_3 = x$, a następnie

$$a_4 = x,\ a_5 = 0,\ a_6 = x,\ a_7 = x,\ a_8 = 0,\ a_9 = x.$$

Kontynuując to rozumowanie zauważamy, że spośród wypisanych liczb równe 0 są wszystkie te, których numery przy dzieleniu 0 przez 3 dają resztę 2, a wszystkie pozostałe są równe x. Z drugiej strony

$$a_n = |a_1 - a_2| = |x - 0| = x \text{ i } a_{n-1} = |a_n - a_1| = |x - x| = 0,$$

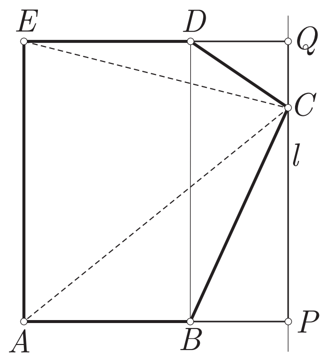
czyli n również w tym przypadku jest liczbą podzielną przez 3.
a) Wypisane liczby da się podzielić na 670 trójek $(x,x,0)$, gdzie x jest największą liczbą spośród wypisanych. Wobec tego $670\cdot 0 + 2\cdot 670\cdot x = 1340$, skąd $x = 1$, a zatem na okręgu napisano liczby w powtarzającym się 670 razy układzie $(1,1,0)$.
b) Ponieważ 1000 nie dzieli się przez 3, to na okręgu wypisano 1000 zer, więc suma wypisanych liczb jest równa 0.

---

6. Dany jest taki wypukły pięciokąt $ABCDE$, że czworokąt $ABDE$ jest prostokątem. Wykaż, że $[ABCDE] < 2\cdot[ACE]$.

Uwaga. Symbolem $[\mathcal{F}]$ oznaczamy pole figury $\mathcal{F}$

Rozwiązanie



Poprowadźmy przez punkt C prostą l równoległą to AE. Niech proste AB i DE przecinają prostą l odpowiednio w punktach P i Q. Ponieważ czworokąt $ABDE$ jest prostokątem, więc czworokąt $APQE$ również jest prostokątem. Zauważmy, że

$$[APQE] = 2\cdot[ACE]$$

oraz to, że punkt C leży wewnątrz odcinka PQ (gdyby leżał na zewnątrz, np. punkty C, Q, P leżałyby na prostej l w tej właśnie kolejności, to kąt EDC wewnętrzny pięciokąta $ABCDE$ byłby większy od kąta półpełnego, co byłoby sprzeczne z założeniem, że pięciokąt $ABCDE$ jest wypukły). Pięciokąt $ABCDE$ jest zatem zawarty w prostokącie $APQE$, więc

$$[ABCDE] < [APQE] = 2\cdot[ACE],$$

co kończy rozwiązanie zadania.

7. Rozstrzygnij, ile jest wszystkich par (x,y) liczb naturalnych sześciocyfrowych, spełniających następujące warunki:

1° wszystkie cyfry liczb x i y są różne od zera,

2° liczba y powstaje przez przestawienie cyfr liczby x,

3° $x+y=1\,000\,000$.

Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Załóżmy, że liczby x i y spełniają równość $x+y=1\,000\,000$.
Istnieją wtedy takie liczby całkowite x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 x_5 oraz y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 z przedziału $\langle 1; 9\rangle$, że

$$x = x_5 \cdot 10^5 + x_4 \cdot 10^4 + x_3 \cdot 10^3 + x_2 \cdot 10^2 + x_1 \cdot 10 + x_0$$

(liczby x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 x_5 to kolejne cyfry zapisu dziesiętnego liczby x). Wtedy

$$y = y_5 \cdot 10^5 + y_4 \cdot 10^4 + y_3 \cdot 10^3 + y_2 \cdot 10^2 + y_1 \cdot 10 + y_0$$

oraz zbiory cyfr tych liczb są równe:

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} = \{y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}.$$

Dodawanie $x+y=1\,000\,000$ możemy zilustrować sposobem pisemnym:

$$\begin{array}{ccccccc} & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \\ + & y_5 & y_4 & y_3 & y_2 & y_1 & y_0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Suma dwóch cyfr liczb x i y jest równa co najmniej 2 (bo cyfry tych liczb są różne od zera) i jest niewiększa niż 18. Ponieważ

$$(x_5+y_5)10^5 + (x_4+y_4)10^4 + (x_3+y_3)10^3 + \\ +(x_2+y_2)10^2 + (x_1+y_1)10 + (x_0+y_0) = 1\,000\,000,$$

więc x_0+y_0 dzieli się przez 10, stąd $x_0+y_0=10$ lub $x_0+y_0=0$. Jednak warunek $x_0+y_0=0$ jest sprzeczny z warunkami zadania.

Wobec tego dla $i=1, 2, 3, 4, 5$ mamy $x_i+y_i=9$. Wtedy

$$(x_0+y_0)+(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+(x_4+y_4)+(x_5+y_5)=10+9\cdot 5=55.$$

Jest to jednak niemożliwe, ponieważ

$$\begin{aligned} &(x_0+y_0)+(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+(x_3+y_3)+(x_4+y_4)+(x_5+y_5)= \\ =&(x_0+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+(y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)= \\ =&2(x_0+x_1+x_2+x_3+x_4+x_5), \end{aligned}$$

a to jest liczba parzysta.

Ostatecznie stwierdzamy, że nie ma par (x,y) liczb całkowitych spełniających warunki zadania.

(*pkw*)