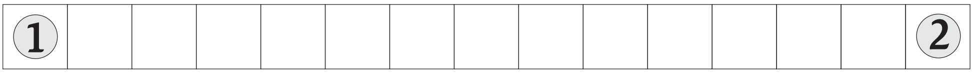
Internetowe Koło Matematyczne

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Zestaw 3

1. Plansza do gry składa się z 15 ustawionych w rzędzie kwadratów. Pierwszy z graczy kładzie swój pionek na skrajnym lewym, a drugi na skrajnym prawym kwadracie.



Następnie gracze na przemian wykonują ruchy (pierwszy rozpoczyna) — ruch polega na przesunięciu pionka na sąsiedni wolny kwadrat (w prawo lub lewo). Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Który z graczy posiada strategię wygrywającą i na czym ona polega?

2. Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, z, że

$$x+y+z=xy+yz+zx=2.$$

3. Dane są dwa okręgi współśrodkowe — mniejszy o promieniu r i większy o promieniu R. Przez wybrany punkt mniejszego okręgu poprowadzono parę prostych prostopadłych. Oblicz sumę kwadratów długości odcinków wyciętych z tych prostych przez większy okrąg.

4. Wykaż, że

$$\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\dots+\frac{1}{2010}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}.$$

5. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Wewnątrz tego trójkąta wyznaczono taki punkt S, że

$$\sphericalangle ASB=110^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BSC=130^\circ.$$

Wykaż, że z odcinków SA, SB i SC można zbudować trójkąt i oblicz miary kątów tego trójkąta.

6. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba

$$\sqrt{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1}$$

jest liczbą całkowitą.

7. Czy istnieje wielościan wypukły, w którym każda ściana ma inną liczbę wierzchołków? Odpowiedź uzasadnij.