Internetowe Koło Matematyczne

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów www.omg.edu.pl

Zestaw 3 – szkice rozwiązań zadań

1. Plansza do gry składa się z 15 ustawionych w rzędzie kwadratów. Pierwszy z graczy kładzie swój pionek na skrajnym lewym, a drugi na skrajnym prawym kwadracie.

1														2

Następnie gracze na przemian wykonują ruchy (pierwszy rozpoczyna) — ruch polega na przesunięciu pionka na sąsiedni wolny kwadrat (w prawo lub lewo). Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Który z graczy posiada strategię wygrywającą i na czym ona polega?

Rozwiązanie

Plansza składa się z 15 pól. Skoro pionki zostały postawione na polach skrajnych, więc między nimi jest 13 pól wolnych.
Przeanalizujmy, ile w ciągu całej gry może być wolnych pól między pionkami po ruchu pierwszego gracza, a ile po ruchu drugiego.
Po pierwszym ruchu pierwszego gracza pozostaje 12 pól wolnych – jest to liczba parzysta. Po ruchu drugiego gracza liczba pól wolnych między pionkami będzie równa 11 (na początku gry każdy z graczy ma tylko jeden sposób ruchu). W kolejnym ruchu pierwszy gracz przesuwa pionek o jedno pole w prawo lub w lewo – po jego ruchu liczba wolnych pól między pionkami znów będzie liczbą parzystą. Drugi gracz w swoim kolejnym ruchu też przesuwa pionek o jedno pole w prawo lub w lewo, zatem liczba wolnych pól między pionkami będzie liczbą nieparzystą, itd.
Aby gra się zakończyła liczba wolnych pól między pionkami musi wynosić 0 i pionek gracza, który miałby kolejny ruch musi znajdować się na polu skrajnym (startowym). Z powyższego spostrzeżenia wynika, że drugi gracz nigdy nie może wygrać tej gry – po jego ruchu liczba wolnych pól między pionkami zawsze będzie liczbą nieparzystą, a 0 jest jest liczbą parzystą.
Strategię wygrywającą ma pierwszy z graczy. Wystarczy, że w kadym swoim ruchu będzie się poruszał w kierunku przeciwnika – liczba wolnych pól między ich pionkami jest przed ruchem pierwszego z graczy zawsze liczbą nieparzystą, więc ruch taki jest zawsze możliwy. Drugi gracz ma ograniczone możliwości cofania się, więc liczba pól wolnych między pionkami graczy będzie się zmniejszała, aż osiągnie wartość 0 po ruchu pierwszego gracza. Drugi gracz może

wtedy tylko cofać się. Pierwszy gracz idzie w ślad za nim do momentu, gdy drugi postawi swój pionek na polu startowym i nie będzie już miał możliwości wykonania ruchu.

---

2. Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, z, że

$$x+y+z=xy+yz+zx=2.$$

Rozwiązanie

Ponieważ

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx,$$

więc korzystając z równości danych w zadaniu, otrzymujemy

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx&=4\\ x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)&=4\\ x^2+y^2+z^2+4&=4\\ x^2+y^2+z^2&=0. \end{aligned}$$

Liczby x^2, y^2 i z^2 są nieujemne, stąd jedynym rozwiązaniem uzyskanego równania jest $x=y=z=0$, które nie spełnia równości

$$x+y+z=2.$$

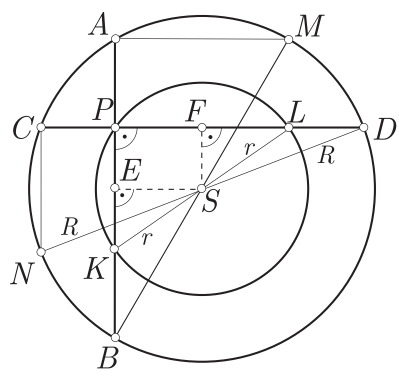
Nie istnieje zatem trójka liczb rzeczywistych spełniających warunki zadania.

---

3. Dane są dwa okręgi współśrodkowe — mniejszy o promieniu r i większy o promieniu R. Przez wybrany punkt mniejszego okręgu poprowadzono parę prostych prostopadłych. Oblicz sumę kwadratów długości odcinków wyciętych z tych prostych przez większy okrąg.

Rozwiązanie

Wybrany punkt mniejszego okręgu, przez który prowadzimy parę prostych prostopadłych oznaczmy przez P. Niech te proste wyznaczają w większym okręgu cięciwy AB i CD, które przecinają mniejszy okrąg odpowiednio w punktach K i L, różnych od punktu P (zobacz rysunek).



Wybierzmy na większym okręgu takie punkty M i N, aby odcinki BM i DN były jego średnicami. Wtedy trójkąty ABM i CDN są trójkątami prostokątnymi. Niech ponadto punkty E i F będą rzutami prostokątnymi środka S okręgów na proste odpowiednio AB i CD. Ponieważ

$$\begin{aligned}AB^2+CD^2 &= BM^2-AM^2+DN^2-CN^2= \\ &=4R^2-AM^2+4R^2-CN^2=8R^2-(AM^2+CN^2).\end{aligned}$$

więc wystarczy wyznaczyć wartość wyrażenia AM^2+CN^2.
Trójkąty ABM i EBS są trójkątami podobnymi, więc

$$\frac{AM}{BM}=\frac{ES}{BS},$$

stąd

$$AM=\frac{BM}{BS}\cdot ES=2ES. \tag{1}$$

Również trójkąty CND i FSD są trójkątami podobnymi, więc

$$\frac{CN}{DN}=\frac{FS}{DS},$$

stąd

$$CN=\frac{DN}{DS}\cdot FS=2FS. \tag{2}$$

Wykorzystując (1) i (2), dostajemy

$$AM^2+CN^2=4ES^2+4FS^2=4(ES^2+FS^2)=4SP^2=4r^2.$$

Ostatecznie

$$AB^2+CD^2=8R^2-(AM^2+CN^2)=8R^2-4r^2.$$

---

4. Wykaż, że

$$\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\dots+\frac{1}{2010}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}.$$

Rozwiązanie

Przekształcając prawą stronę, dostajemy kolejno:

$$\begin{aligned}&1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}= \\ &=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\dots+\frac{1}{2010}\right)= \\ &=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}-\left(1+\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+\dots+\frac{2}{2010}\right)= \\ &=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{1005}\right)= \\ &=\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\dots+\frac{1}{2009}+\frac{1}{2010},\end{aligned}$$

stąd równość dana w zadaniu jest prawdziwa.

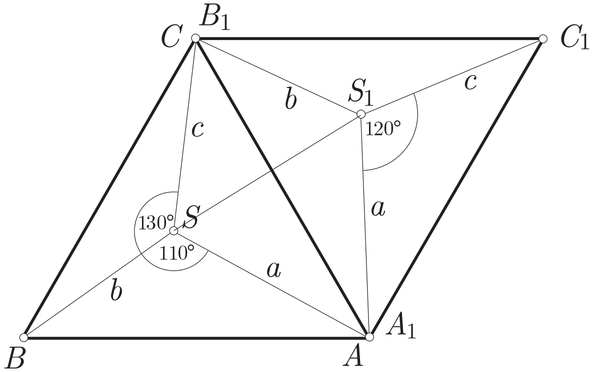
5. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Wewnątrz tego trójkąta wyznaczono taki punkt S, że

$$\sphericalangle ASB = 110^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BSC = 130^\circ.$$

Wykaż, że z odcinków SA, SB i SC można zbudować trójkąt i oblicz miary kątów tego trójkąta.

Rozwiązanie

Obracając trójkąt ABC wokół wierzchołka A o kąt 60° zgodnie z ruchem wskazówek zegara, dostajemy trójkąt $A_1B_1C_1$, w którym $A_1 = A$, $B_1 = C$. Przyjmijmy ponadto, że: $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$.



W obrocie tym odcinek AS przechodzi na odcinek AS_1, więc $\sphericalangle SAS_1 = 60^\circ$. Stąd trójkąt ASS_1 jest trójkątem równobocznym. Ponadto

$$\sphericalangle A_1S_1C_1 = \sphericalangle ASC = 360^\circ - (130^\circ + 110^\circ) = 120^\circ.$$

Z konstrukcji wynika, że trójkąt o bokach długości a, b, c zawsze istnieje (takim trójkątem jest trójkąt SB_1S_1). Wystarczy więc wyznaczyć kąty trójkąta SB_1S_1.

Ponieważ

$$\sphericalangle B_1S_1C_1 = \sphericalangle BSC = 130^\circ,$$

więc

$$\sphericalangle B_1S_1S = 360^\circ - (\sphericalangle B_1S_1C_1 + \sphericalangle C_1S_1A_1 + \sphericalangle SS_1A_1) =$$
$$= 360^\circ - (130^\circ + 120^\circ + 60^\circ) = 360^\circ - 310^\circ = 50^\circ.$$

Analogicznie

$$\sphericalangle B_1SS_1 = 360^\circ - (\sphericalangle BSB_1 + \sphericalangle ASB + \sphericalangle S_1SA) =$$
$$= 360^\circ - (120^\circ + 110^\circ + 60^\circ) = 360^\circ - 290^\circ = 70^\circ.$$

Teraz możemy wyznaczyć trzeci kąt trójkąta

$$\sphericalangle SB_1S_1 = 180^\circ - (\sphericalangle B_1SS_1 + \sphericalangle B_1S_1S) = 180^\circ - (70^\circ + 50^\circ) = 60^\circ.$$

Zatem trójkąt o bokach długości SA, SB, SC ma kąty: 50°, 70°, 60°.

6. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba

$$\sqrt{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1}$$

jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie

Obliczając wartości tego wyrażenia dla kilku początkowych liczb całkowitych dodatnich n zauważamy, że
dla $n=1$ mamy $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1}=\sqrt{25}=5=1\cdot 4+1$,
dla $n=2$ mamy $\sqrt{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+1}=\sqrt{121}=11=2\cdot 5+1$,
dla $n=3$ mamy $\sqrt{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+1}=\sqrt{361}=19=3\cdot 6+1$,
dla $n=4$ mamy $\sqrt{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7+1}=\sqrt{841}=29=4\cdot 7+1$.

Możemy zatem postawić hipotezę, że dla liczb całkowitych dodatnich n zachodzi równość

$$\sqrt{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1}=n\cdot(n+3)+1. \tag{1}$$

Pokażemy, że tak jest istotnie. Ponieważ

$$\begin{aligned}(n\cdot(n+3)+1)^2&=(n\cdot(n+3))^2+2n\cdot(n+3)+1=n^2(n^2+6n+9)+2n^2+6n+1=\\&=n^4+6n^3+9n^2+2n^2+6n+1=n^4+6n^3+11n^2+6n+1,\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1&=(n^2+n)(n^2+5n+6)+1=\\&=n^4+5n^3+6n^2+n^3+5n^2+6n+1=\\&=n^4+6n^3+11n^2+6n+1,\end{aligned}$$

więc faktycznie równość (1) zachodzi dla każdej całkowitej dodatniej liczby n. Oznacza to, że liczba $\sqrt{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1}$ jest liczbą całkowitą dla każdej całkowitej dodatniej liczby n.

---

7. Czy istnieje wielościan wypukły, w którym każda ściana ma inną liczbę wierzchołków? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Każda ściana dowolnego wielościanu ma skończoną liczbę wierzchołków. Spośród ścian danego wielościanu wybierzmy tę, która ma ich najwięcej (przyjmijmy, że ma ona n wierzchołków). Ściana o n wierzchołkach ma również n krawędzi. Każda z tych krawędzi jest wspólną krawędzią dwóch ścian. Ponieważ wielościan jest wypukły, więc żadne dwie ściany nie mogą mieć więcej, niż jednej wspólnej krawędzi. Oznacza to, że wielościan ten ma co najmniej $n+1$ ścian. Natomiast liczby wierzchołków poszczególnych ścian danego wielościanu mogą być równe: 3, 4, $\ldots$, n, ponieważ każda ze ścian ma co najwyżej n wierzchołków, czyli mogłoby ich być co najwyżej $n-2$. Nie jest więc możliwe, by każda ściana miała inną liczbę wierzchołków. (mn)