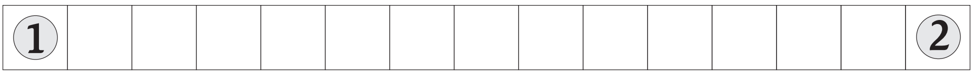
Internetowe Koło Matematyczne

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Zestaw 3

1. Plansza do gry składa się z 15 ustawionych w rzędzie kwadratów. Pierwszy z graczy kładzie swój pionek na skrajnym lewym, a drugi na skrajnym prawym kwadracie.



Następnie gracze na przemian wykonują ruchy (pierwszy rozpoczyna) — ruch polega na przesunięciu pionka na sąsiedni wolny kwadrat (w prawo lub lewo). Przegrywa gracz, który nie może wykonać ruchu. Który z graczy posiada strategię wygrywającą i na czym ona polega?

Wskazówka

Łatwo zauważyć, że jeśli któryś z graczy w swoim ruchu stanie po raz pierwszy na polu sąsiadującym z polem zajętym przez przeciwnika, to wygra grę.

2. Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, z, że

$$x+y+z=xy+yz+zx=2.$$

Wskazówka

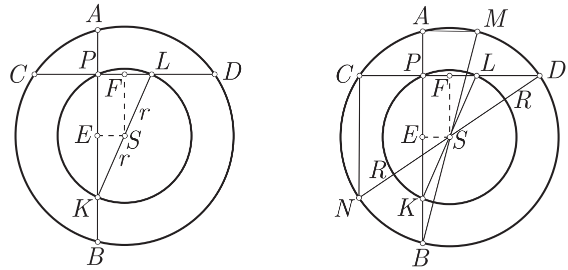
Oblicz $(x+y+z)^2$.

3. Dane są dwa okręgi współśrodkowe — mniejszy o promieniu r i większy o promieniu R. Przez wybrany punkt mniejszego okręgu poprowadzono parę prostych prostopadłych. Oblicz sumę kwadratów długości odcinków wyciętych z tych prostych przez większy okrąg.

Wskazówka

Często pomysłem przy zadaniach geometrycznych jest uzupełnienie rysunku. Problem w tym, co dorysować, aby dojść do rozwiązania.

Jako wskazówka niech posłużą dwa rysunki:



Szukamy sumy AB^2+CD^2. Odcinki AM i ES są prostopadłe do AB, zaś CN i FS są prostopadłe do CD.

4. Wykaż, że
$$\frac{1}{1006}+\frac{1}{1007}+\cdots+\frac{1}{2010}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}.$$

Wskazówka
Jedną z metod wykazania tego typu równości jest przekształcanie jednej strony (zwykle tej bardziej skomplikowanej — co czasem jest subiektywne) do postaci takiej, jak po drugiej stronie.

5. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Wewnątrz tego trójkąta wyznaczono taki punkt S, że
$$\sphericalangle ASB=110^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BSC=130^\circ.$$
Wykaż, że z odcinków SA, SB i SC można zbudować trójkąt i oblicz miary kątów tego trójkąta.

Wskazówka

Można obrócić trójkąt ABC wokół wybranego wierzchołka (np. A) o kąt 60°.

6. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba
$$\sqrt{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1}$$
jest liczbą całkowitą.

Wskazówka
Można sprawdzić kilka przykładów:
dla $n=1$ mamy $\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot4+1}=\sqrt{25}=5$,
dla $n=2$ mamy $\sqrt{2\cdot3\cdot4\cdot5+1}=\sqrt{121}=11$,
dla $n=3$ mamy $\sqrt{3\cdot4\cdot5\cdot6+1}=\sqrt{361}=19$,
dla $n=4$ mamy $\sqrt{4\cdot5\cdot6\cdot7+1}=\sqrt{841}=29$.
We wszystkich czterech przypadkach uzyskaliśmy liczby naturalne. Pytanie, czy tak będzie zawsze? Można postawić taką hipotezę i spróbować ją zweryfikować.
Warto poszukać zależności między liczbami: n i $\sqrt{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)+1}$.
Na podstawie czterech przykładów możemy przygotować tabelkę:

1	2	3	4	...	n
5	11	19	29	...	?

i spróbować odkryć ogólną zależność.

7. Czy istnieje wielościan wypukły, w którym każda ściana ma inną liczbę wierzchołków? Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka
Można rozpocząć od analizy ściany o największej liczbie wierzchołków.