Zestaw 4 – szkice rozwiązań zadań

1. Znajdź wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x^2 = y+z \\ y^2 = z+x \\ z^2 = x^2+y^2. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Odejmując równanie drugie danego układu od równania pierwszego, dostajemy kolejno

$$\begin{aligned} x^2-y^2 &= y-x \\ (x-y)(x+y) &= -(x-y) \\ (x-y)(x+y+1) &= 0, \end{aligned}$$

stąd $x=y$ lub $y=-x-1$. Rozpatrzymy teraz dwa przypadki.

1° Niech $x=y$. Wtedy, wstawiając to do równań pierwszego i trzeciego, otrzymujemy

$$\begin{cases} x^2 = x+z \\ z^2 = 2x^2. \end{cases}$$

Z równania drugiego dostajemy $z=x\sqrt{2}$ lub $z=-x\sqrt{2}$.
Jeżeli $z=x\sqrt{2}$, to $x^2=x(1+\sqrt{2})$. Wtedy $x=0$ lub $x=1+\sqrt{2}$.
Jeśli $x=0$, to wtedy $y=0$ i $z=0$, a jeśli $x=1+\sqrt{2}$, to $y=1+\sqrt{2}$ i $z=2+\sqrt{2}$.
Jeżeli natomiast $z=-x\sqrt{2}$, to $x^2=x(1-\sqrt{2})$. Wtedy $x=0$ lub $x=1-\sqrt{2}$.
Jeśli $x=0$, to $y=0$ i $z=0$, a jeśli $x=1-\sqrt{2}$, to $y=1-\sqrt{2}$ i $z=2-\sqrt{2}$.
Ostatecznie w przypadku tym dostajemy

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \\ z=2+\sqrt{2}, \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \\ z=2-\sqrt{2}. \end{cases}$$

Bezpośrednim sprawdzeniem stwierdzamy, że są to rozwiązania danego układu równań.

2° Niech $y=-x-1$. Wtedy

$$\begin{cases} x^2 = -x-1+z \\ z^2 = x^2+(-x-1)^2. \end{cases}$$

Z równania pierwszego, dostajemy $z=x^2+x+1$. Przekształcając równanie drugie i wykorzystując otrzymany związek, otrzymujemy

$$z^2=x^2+x^2+2x+1=2x^2+2x+1=2(x^2+x+1)-1=2z-1,$$

stąd

$$\begin{aligned} z^2-2z+1&=0 \\ (z-1)^2&=0, \end{aligned}$$

czyli $z=1$. Wtedy

$$\begin{aligned} x^2+x+1&=1 \\ x^2+x&=0, \end{aligned}$$

a stąd $x=0$ lub $x=-1$.
Jeżeli $x=0$, to $y=-1$ i $z=1$, a jeśli $x=-1$, to $y=0$ i $z=1$. Ostatecznie w tym przypadku otrzymujemy

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=1. \end{cases}$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że to również są rozwiązania danego układu równań. Stąd dany układ równań ma pięć rozwiązań.

---

2. Czy istnieje taka całkowita dodatnia liczba n, że $2n$ jest kwadratem liczby całkowitej, zaś $1024n$ jest czwartą potęgą liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Niech $n=2^m\cdot p$, gdzie p jest liczbą nieparzystą i $m\in\mathbf{N}$. Wtedy $2n=2^{m+1}\cdot p$. Ponieważ $2n$ ma być kwadratem liczby naturalnej, więc $m+1$ musi być liczbą parzystą, stąd m – liczbą nieparzystą. Wtedy $1024n=2^{m+10}\cdot p$. Jeżeli $1024n$ jest czwartą potęgą liczby naturalnej, to $m+10$ jest liczbą podzielną przez 4. Ale m jest liczbą nieparzystą, więc $m+10$ również jest liczbą nieparzystą. Wynika stąd, że nie istnieje liczba n spełniająca warunki zadania.

---

3. Na okręgu umieszczono 2010 punktów białych i 1 punkt czerwony. Rozpatrujemy wszystkie możliwe wielokąty o wierzchołkach w tych punktach. Których wielokątów jest więcej: mających czerwony wierzchołek, czy mających tylko białe wierzchołki? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

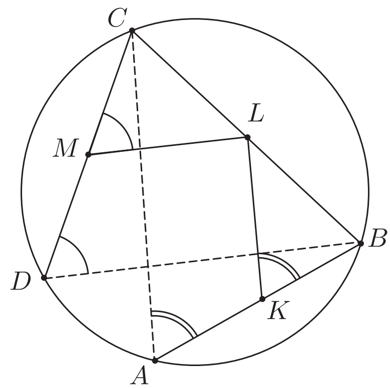
Weźmy najpierw wszystkie wielokąty, które mają wyłącznie białe wierzchołki. Są wśród nich: trójkąty, czworokąty, pięciokąty itd., aż w końcu wielokąt mający 2010 wierzchołków. Jeżeli teraz do każdego z tych wielokątów dołączymy wierzchołek czerwony, to otrzymamy tyle samo wielokątów: czworokątów, pięciokątów, sześciokątów itd., aż w końcu otrzymamy wielokąt mający 2011 wierzchołków. Jeśli dołączymy do nich trójkąty mające jeden czerwony wierzchołek, to już łatwo można zauważyć, że wielokątów mających czerwony wierzchołek jest więcej niż wielokątów mających wyłącznie białe wierzchołki.

---

4. W okręgu poprowadzono trzy cięciwy: AB, BC oraz CD. Niech punkty K, L oraz M będą odpowiednio środkami tych cięciw. Wykaż, że

$$\sphericalangle BKL = \sphericalangle CML.$$

Rozwiązanie



Zauważmy, że punkty K i L są środkami boków odpowiednio AB i BC trójkąta ABC, więc $KL \parallel AC$. Stąd

$$\sphericalangle BKL = \sphericalangle BAC.$$

Analogicznie, punkty L i M są środkami boków odpowiednio BC i CD trójkąta BCD, więc $LM \parallel BD$. Stąd

$$\sphericalangle CML = \sphericalangle CDB.$$

Kąty $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle CDB$ są kątami wpisanymi opartymi na tym samym łuku, więc $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CDB$, stąd

$$\sphericalangle BKL = \sphericalangle CML.$$

---

5. Dane są dodatnie liczby naturalne a i b. Udowodnij, że jeśli $a \cdot b$ jest liczbą parzystą, to istnieją takie dodatnie liczby naturalne c i d, że

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2,$$

a jeśli $a \cdot b$ jest liczbą nieparzystą, to takie liczby c i d nie istnieją.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy dwa przypadki.
1° Liczba $a \cdot b$ jest liczbą parzystą.
Jeżeli liczby a i b są różnej parzystości, to a^2+b^2 jest liczbą nieparzystą. Niech $a^2+b^2 = 2n+1$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Przyjmując $c=n$ i $d=n+1$, otrzymujemy

$$a^2+b^2+c^2 = 2n+1+n^2 = (n+1)^2 = d^2.$$

Jeżeli a i b są liczbami parzystymi, to a^2+b^2 jest liczbą podzielną przez 4. Niech $a^2+b^2 = 4n$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Przyjmując teraz $c = n-1$ i $d = n+1$, dostajemy

$$a^2+b^2+c^2 = 4n+(n-1)^2 = n^2-2n+1+4n = n^2+2n+1 = (n+1)^2 = d^2.$$

2° Liczba $a \cdot b$ jest liczbą nieparzystą.
Jeżeli $a \cdot b$ jest liczbą nieparzystą, to każda z liczb a, b jest liczbą nieparzystą, stąd $a+b$ jest liczbą parzystą. Niech $a \cdot b = 2n+1$ i $a+b = 2m$ dla pewnych $m, n \in \mathbf{N}$. Wtedy

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 4m^2 - 4n - 2.$$

Oznacza to, że liczba a^2+b^2 jest liczbą parzystą, ale niepodzielną przez 4. Jeżeli liczby naturalne a, b, c i d spełniają równość $a^2+b^2+c^2=d^2$, to wtedy

$$a^2+b^2=d^2-c^2=(d+c)(d-c).$$

Jeżeli liczby c i d są tej samej parzystości, to każda z liczb: $c+d$ i $c-d$ jest liczbą parzystą i ich iloczyn jest liczbą podzielną przez 4. Jeśli natomiast liczby c i d są różnej parzystości, to każda z liczb $c+d$ i $c-d$ jest liczbą nieparzystą i ich iloczyn też jest liczbą nieparzystą. Jak widać w tym przypadku takie liczby c i d nie istnieją.

---

6. Udowodnij, że nie istnieje wielościan mający dokładnie 7 krawędzi.

Rozwiązanie

Jeżeli jedną ze ścian wielościanu jest wielokąt mający co najmniej 4 boki, to wielościan ten ma co najmniej 8 krawędzi. Jeśli zaś wszystkie ściany tego wielościanu są trójkątami, to liczba krawędzi takiego wielościanu jest podzielna przez 3, więc nie może być równa 7. Stąd nie istnieje wielościan, który ma dokładnie 7 krawędzi.

---

7. Niech a będzie liczbą naturalną mającą 2010 cyfr i podzielną przez 9. Sumę cyfr tej liczby oznaczmy przez A, sumę cyfr liczby A oznaczmy przez B, sumę cyfr liczby B oznaczmy przez C. Wyznacz liczbę C.

Rozwiązanie

Ze znanej cechy podzielności przez 9 wynika, że liczby A, B i C są podzielne przez 9. Suma cyfr liczby 2010-cyfrowej nie przekracza $2010\cdot 9=18090$, więc liczba A ma nie więcej niż 5 cyfr. Suma cyfr liczby A nie przekracza $5\cdot 9=45$, więc liczba B nie przekracza 45, a suma cyfr liczby B nie przekracza $3+9=12$, więc liczba C nie przekracza 12. Ponieważ $C\leqslant 12$ i liczba C jest podzielna przez 9, więc $C=0$ lub $C=9$. Gdyby było $C=0$, to byłoby też $B=A=a=0$, co nie jest możliwe, stąd $C=9$.