Internetowe Koło Matematyczne
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Zestaw 4

1. Znajdź wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x^2 = y + z \\ y^2 = z + x \\ z^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Wskazówka
Odejmij dwa pierwsze równania stronami i wywnioskuj stąd, że musi być $x=y$ lub $x+y+1=0$.

2. Czy istnieje taka całkowita dodatnia liczba n, że $2n$ jest kwadratem liczby całkowitej, zaś $1024n$ jest czwartą potęgą liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka
Liczbę n można zapisać w postaci $n=2^m p$, gdzie p jest liczbą nieparzystą i $m \in \mathbf{N}$ (przyjmujemy tu, że zero jest liczbą naturalną). Wtedy $2n = 2^{m+1}p$. Skoro $2n$ jest kwadratem liczby naturalnej, to m musi być liczbą nieparzystą.

3. Na okręgu umieszczono 2010 punktów białych i 1 punkt czerwony. Rozpatrujemy wszystkie możliwe wielokąty o wierzchołkach w tych punktach. Których wielokątów jest więcej: mających czerwony wierzchołek, czy mających tylko białe wierzchołki? Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka
Każdemu wielokątowi, który ma tylko białe wierzchołki można przyporządkować wielokąt o wierzchołkach w tych samych białych punktach i jednym wierzchołku czerwonym. Zauważ, że są wielokąty mające czerwony wierzchołek, które nie zostały przyporządkowane w ten sposób żadnemu wielokątowi o białych wierzchołkach.

4. W okręgu poprowadzono trzy cięciwy: AB, BC oraz CD. Niech punkty K, L oraz M będą odpowiednio środkami tych cięciw. Wykaż, że

$$\sphericalangle BKL = \sphericalangle CML.$$

Wskazówka
Zauważ, że odcinek ML jest równoległy do odcinka BD, zaś odcinek KL jest równoległy do odcinka AC.

5. Dane są dodatnie liczby naturalne a i b. Udowodnij, że jeśli $a \cdot b$ jest liczbą parzystą, to istnieją takie dodatnie liczby naturalne c i d, że

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2,$$

a jeśli $a \cdot b$ jest liczbą nieparzystą, to takie liczby c i d nie istnieją.

Wskazówka
W przypadku, gdy $a \cdot b$ jest liczbą parzystą, rozpatrz dwie możliwości: a i b są różnej parzystości lub a i b są liczbami parzystymi. W pierwszym z tych przypadków liczba a^2+b^2 jest nieparzysta. Spróbuj dobrać liczby c i d tak, aby spełniona była równość $a^2+b^2+c^2=d^2$. W drugim przypadku zauważ, że liczba a^2+b^2 jest podzielna przez 4. Dalej spróbuj postępować jak poprzednio.
Jeśli $a \cdot b$ jest liczbą nieparzystą, to zauważ, że liczba a^2+b^2 jest liczbą parzystą, ale niepodzielną przez 4.

6. Udowodnij, że nie istnieje wielościan mający dokładnie 7 krawędzi.

Wskazówka
Rozpatrz dwie możliwości:
(a) jedną ze ścian wielościanu jest wielokąt mający co najmniej 4 boki,
(b) wszystkie ściany wielościanu są trójkątami.

7. Niech a będzie liczbą naturalną mającą 2010 cyfr i podzielną przez 9. Sumę cyfr tej liczby oznaczmy przez A, sumę cyfr liczby A oznaczmy przez B, sumę cyfr liczby B oznaczmy przez C. Wyznacz liczbę C.

Wskazówka
Zauważ, że suma cyfr liczby 2010-cyfrowej nie przekracza $2010 \cdot 9$, więc liczba A ma nie więcej ni 5 cyfr.