Zestaw 5

1. Wykaż, że dla każdych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} < a+b+c,$$

2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p+27$ jest sześcianem liczby naturalnej.

3. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach AB i AD wybrano odpowiednio takie punkty E i F, że odcinek EF jest równoległy do przekątnej BD danego równoległoboku. Wykaż, że pola trójkątów BCE i CDF są równe.

4. Liczby a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Wykaż, że wśród liczb:

$$a+b-\sqrt{cd}, \quad b+c-\sqrt{da}, \quad c+d-\sqrt{ab}, \quad d+a-\sqrt{bc}$$

co najmniej dwie są dodatnie.

5. Każdy punkt płaszczyzny został pomalowany jednym z dwóch kolorów, przy czym istnieją na tej płaszczyźnie punkty różnych kolorów. Wykaż, że istnieją na tej płaszczyźnie dwa punkty różnych kolorów odległe o 10.

6. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania

$$3x\sqrt{x^2-9}+4x\sqrt{x^2-16}+5x\sqrt{x^2-25}=120.$$

7. Na kuli o promieniu 1 opisano wielościan, którego pole powierzchni jest równe 12. Oblicz objętość tego wielościanu.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego