Zestaw 5 – szkice rozwiązań zadań

1. Wykaż, że dla każdych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} < a+b+c.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że prawdziwa jest równoważność $L<P \Longleftrightarrow L-P<0$. Aby wykazać nierówność daną w zadaniu wystarczy więc wykazać, że

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} - (a+b+c) < 0$$

dla każdych liczb dodatnich a, b, c.

Pokażemy, że tak jest. Obliczając różnicę lewej i prawej strony danej nierówności, dostajemy kolejno

$$\begin{aligned} &\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} - (a+b+c) = \\ &= \frac{a^3+b^3+c^3-a^3-ab^2-ac^2-a^2b-b^3-bc^2-a^2c-b^2c-c^3}{a^2+b^2+c^2} = \\ &= -\frac{ab^2+ac^2+a^2b+bc^2+a^2c+b^2c}{a^2+b^2+c^2} < 0. \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla każdych dodatnich liczb a, b, c. Kończy to rozwiązanie zadania.

2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p+27$ jest sześcianem liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Niech $p+27=k^3$ dla pewnej liczby naturalnej k. Wtedy

$$p = k^3-27$$
$$p = (k-3)(k^2+3k+9).$$

Ponieważ liczba p jest liczbą pierwszą oraz $k-3<k^2+3k+9$, więc

$$k-3=1 \quad \text{i} \quad k^2+3k+9=p,$$

stąd $k=4$ i $p=16+12+9=37$. Bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że liczba ta spełnia warunki zadania.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach AB i AD wybrano odpowiednio takie punkty E i F, że odcinek EF jest równoległy do przekątnej BD danego równoległoboku. Wykaż, że pola trójkątów BCE i CDF są równe.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku: O — punkt przecięcia przekątnych AC i BD równoległoboku $ABCD$, a M — punkt przecięcia przekątnej AC z odcinkiem EF.
Ponieważ odcinek EF jest równoległy do przekątnej BD danego równoległoboku, a punkt O jest środkiem odcinka BD (przekątne w każdym równoległoboku przecinają się w połowie), więc punkt M jest środkiem odcinka EF, a zatem pola trójkątów AEM i AFM są równe. Wynika stąd, że punkty E i F są jednakowo oddalone od prostej AC, czyli $[ACE]=[ACF]$, gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ. Każda przekątna równoległoboku dzieli go na dwa trójkąty o równych polach. Otrzymujemy stąd kolejno

$$[ABC]=[ACD]$$
$$[BCE]+[ACE]=[CDF]+[ACF]$$
$$[BCE]=[CDF].$$

4. Liczby a, b, c, d są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Wykaż, że wśród liczb:

$$a+b-\sqrt{cd}\,,\quad b+c-\sqrt{da}\,,\quad c+d-\sqrt{ab}\,,\quad d+a-\sqrt{bc}$$

co najmniej dwie są dodatnie.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli suma dwóch liczb jest dodatnia, to co najmniej jedna z tych liczb jest dodatnia. Przyjmijmy oznaczenia

$$x_1=a+b-\sqrt{cd}\,,\qquad x_2=b+c-\sqrt{da}\,,$$
$$x_3=c+d-\sqrt{ab}\,,\qquad x_4=d+a-\sqrt{bc}\,.$$

Ponieważ

$$x_1+x_3=a+b-\sqrt{cd}+c+d-\sqrt{ab}=a-\sqrt{ab}+\frac{1}{4}b+c-\sqrt{cd}+\frac{1}{4}d+\frac{3}{4}b+\frac{3}{4}d=$$
$$=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\frac{1}{2}\sqrt{d}\right)^2+\frac{3}{4}b+\frac{3}{4}d,$$

więc $x_1+x_3>0$. Zatem co najmniej jedna z liczb x_1, x_3 jest dodatnia. Analogicznie pokazujemy, że $x_2+x_4>0$, czyli co najmniej jedna z liczb x_2, x_4 jest dodatnia. Wykazaliśmy tym samym, że wśród danych czterech liczb co najmniej dwie są dodatnie.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. Każdy punkt płaszczyzny został pomalowany jednym z dwóch kolorów, przy czym istnieją na tej płaszczyźnie punkty różnych kolorów. Wykaż, że istnieją na tej płaszczyźnie dwa punkty różnych kolorów odległe o 10.

Rozwiązanie

Wybierzmy na tej płaszczyźnie dwa punkty różnych kolorów. Niech to będą punkty A i B.
Jeżeli $AB = 10$, to właśnie te punkty spełniają warunki zadania.
Jeżeli $AB < 10$, to wybieramy na tej płaszczyźnie taki punkt C, że $AC = BC$. Jeżeli C ma taki sam kolor jak A, to punktami spełniającymi warunki zadania są punkty B i C. W przeciwnym przypadku punktami spełniającymi warunki zadania są punkty A i C.
Niech teraz $AB > 10$.

Wybierzmy na odcinku AB kolejno takie punkty $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_{n-1}, C_n$, że

$$AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = \ldots = C_{n-1}C_n = 10 \quad \text{i} \quad C_nB \leqslant 10.$$

Jeżeli któryś z odcinków: AC_1, C_1C_2, C_2C_3, $\ldots$, $C_{n-1}C_n$ ma końce różnych kolorów, to właśnie te punkty spełniają warunki zadania. Jeżeli wszystkie te odcinki mają końce jednakowych kolorów, to są one wszystkie koloru takiego samego jak punkt A. Zatem punkty C_n i B są różnych kolorów. Jeśli $C_nB = 10$, to te punkty spełniają warunki zadania. Jeśli natomiast $C_nB < 10$, to wybieramy na tej płaszczyźnie taki punkt C, że $C_nC = BC = 10$. Jeżeli punkt C jest takiego samego koloru jak punkt C_n, to punkty B i C spełniają warunki zadania. W przeciwnym przypadku warunki zadania spełniają punkty C_n i C.

6. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania

$$3x\sqrt{x^2-9} + 4x\sqrt{x^2-16} + 5x\sqrt{x^2-25} = 120.$$

Rozwiązanie

Dane równanie możemy zapisać równoważnie

$$3\sqrt{x^2-9} + 4\sqrt{x^2-16} + 5\sqrt{x^2-25} = \frac{120}{x}.$$

Ponieważ lewa strona otrzymanego równania jest dodatnia, więc jest też $x > 0$. Aby lewa strona równania była określona, muszą być spełnione nierówności

$$x^2 - 9 \geqslant 0, \quad x^2 - 16 \geqslant 0, \quad x^2 - 25 \geqslant 0,$$

czyli dla $x > 0$ mamy

$$x \geqslant 3, \quad x \geqslant 4, \quad x \geqslant 5,$$

a stąd $x \geqslant 5$.

Jeżeli $x>5$, to

$$3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}>$$
$$>3\sqrt{25-9}+4\sqrt{25-16}+5\sqrt{25-25}=$$
$$=3\cdot 4+4\cdot 3=24.$$

Jednocześnie

$$\frac{120}{x}<\frac{120}{5}=24.$$

Zatem dla $x>5$ dane równanie jest sprzeczne. Natomiast bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że $x=5$ spełnia dane równanie i jest to jedyne jego rozwiązanie.

---

7. Na kuli o promieniu 1 opisano wielościan, którego pole powierzchni jest równe 12. Oblicz objętość tego wielościanu.

Rozwiązanie

Łącząc każdy wierzchołek wielościanu opisanego na tej kuli z jej środkiem, otrzymujemy ostrosłupy, których podstawami są ściany wielościanu, a wysokościami promienie kuli. Suma objętości tych ostrosłupów jest równa objętości wielościanu, czyli $V_{\text{wielościanu}}=V_1+V_2+\dots+V_n$, gdzie V_1, V_2, …, V_n są objętościami powstałych ostrosłupów. Jeśli pola ścian wielościanu są równe P_1, P_2, …, P_n, to

$$V_{\text{wielościanu}}=\frac{1}{3}P_1r+\frac{1}{3}P_2r+\dots+\frac{1}{3}P_nr=\frac{1}{3}r(P_1+P_2+\dots+P_n)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 12=4.$$

Zauważy jednak, że

$$V_{\text{kuli}}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\cdot 1>4.$$

Zatem taki wielościan opisany na kuli o promieniu 1, o jakim jest mowa w zadaniu, nie istnieje.