Zestaw 6

1. Znajdź wszystkie trójki (x, y, z) liczb rzeczywistych, które są rozwiązaniami równania

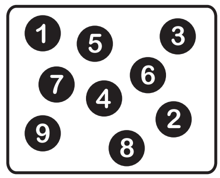
$$5(x^2+y^2+z^2)=4(xy+yz+zx).$$

2. Udowodnij, że dla każej liczby naturalnej $n \geqslant 6$ kwadrat można rozciąć na n kwadratów.

3. Na okręgu o środku S opisano trapez $ABCD$ (o podstawach AB i CD). Wykaż, że

$$\frac{1}{AS^2}-\frac{1}{BS^2}=\frac{1}{CS^2}-\frac{1}{DS^2}.$$

4. Na stole leży 9 żetonów z numerami od $\langle 1\rangle$ do $\langle 9\rangle$. Dwóch zawodników gra w następującą grę: pierwszy gracz w swoim ruchu usuwa ze stołu żeton z wybraną liczbą oraz wszystkie żetony z jej dzielnikami, następnie drugi wykonuje ruch według tych samych zasad itd. Wygrywa zawodnik, który zdejmie ze stołu ostatni żeton. Który z graczy (pierwszy czy drugi) ma strategię wygrywającą i na czym ona może polegać?



5. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, dla których wartość wyrażenia

$$p^4-5p^2+4$$

nie jest podzielna przez 360.

6. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c. Ustal, w jakich proporcjach środek okręgu wpisanego w ten trójkąt podzielił odcinki wycięte z dwusiecznych kątów trójkąta przez brzeg tego trójkąta.

7. W czworościanie $ABCD$ krawędzie ściany ABC są odpowiednio równe:

$$BC=a, \quad CA=b, \quad AB=c,$$

a wszystkie pozostałe ściany są przystające do ściany ABC. Oblicz odległość między krawędziami AB i CD.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego