Zestaw 6 — szkice rozwiązań zadań

1. Znajdź wszystkie trójki (x,y,z) liczb rzeczywistych, które są rozwiązaniami równania

$$5(x^2+y^2+z^2)=4(xy+yz+zx).$$

Rozwiązanie

Przekształcając równoważnie dane równanie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 5(x^2+y^2+z^2)&=4(xy+yz+zx)\\ 4x^2-4xy+y^2+4y^2-4yz+z^2+4z^2-4zx+x^2&=0\\ (2x-y)^2+(2y-z)^2+(2z-x)^2&=0. \end{aligned}$$

Ponieważ kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny, więc suma kwadratów jest równa zero tylko wtedy, gdy wszystkie liczby są zerami, zatem

$$2x-y=2y-z=2z-x=0$$

czyli

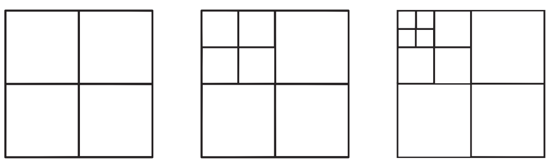
$$x=2z=4y=8x.$$

Stąd równanie ma tylko jedno rozwiązanie: $x=y=z=0$.

2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 6$ kwadrat można rozciąć na n kwadratów.

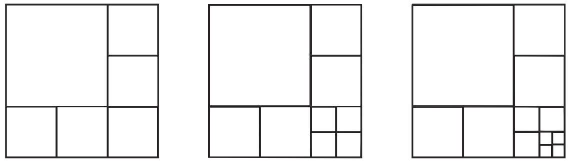
Rozwiązanie

Łatwo podzielić kwadrat na 4 kwadraty. Po każdym takim podziale liczba kwadratów zwiększa się o 3. Stosując ten podział wielokrotnie możemy uzyskać wszystkie liczby postaci $4+3n$, gdzie $n\in\mathbf{N}_0$.

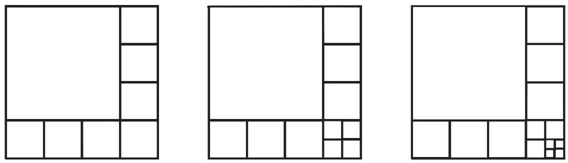


Rozpoczynając od podziału na 6 kwadratów i dzieląc kolejno dowolne powstałe kwadraty na 4 części możemy uzyskać wszystkie liczby postaci $6+3n$, gdzie $n\in\mathbf{N}_0$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Jeśli podzielimy kwadrat na 8 części, to rozumując analogicznie uzyskujemy wszystkie liczby postaci $8+3n$, gdzie $n\in\mathbf{N}_0$.



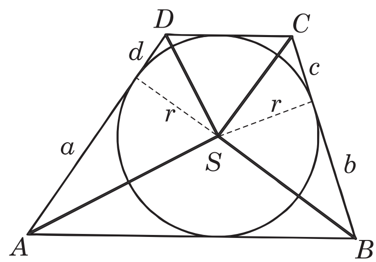
Możemy więc podzielić kwadrat na 4, 6, 7, 8 i dowolną większą liczbę kwadratów.

---

3. Na okręgu o środku S opisano trapez $ABCD$ (o podstawach AB i CD). Wykaż, że

$$\frac{1}{AS^2}-\frac{1}{BS^2}=\frac{1}{CS^2}-\frac{1}{DS^2}.$$

Rozwiązanie



W dowolnym trapezie suma kątów przy każdym z ramion wynosi 180°, czyli

$$\sphericalangle BAD+\sphericalangle ADC=180^\circ.$$

Odcinki AS i DS są dwusiecznymi kątów, więc

$$\sphericalangle SAD+\sphericalangle ADS=90^\circ,$$

stąd trójkąt ASD jest prostokątny, w którym r jest jest wysokością poprowadzoną do przeciwprostokątnej AD. Oznaczmy części na które spodek wysokości r podzielił odcinek AD jako odcinki a i d.

Ponieważ wysokość r dzieli trójkąt prostokątny ASD na dwa trójkąty do niego podobne, więc

$$\frac{a}{r}=\frac{r}{d}\quad \text{czyli}\quad ad=r^2.$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla trójkąta BSC, uzyskujemy (przy oznaczeniach z rysunku) proporcję $\frac{b}{r}=\frac{r}{c}$, więc $bc=r^2$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa oraz powyższych równości, otrzymujemy

$$\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{DS^2}=\frac{1}{a^2+r^2}+\frac{1}{d^2+r^2}=\frac{1}{a^2+ad}+\frac{1}{d^2+ad}=$$
$$=\frac{1}{a(a+d)}+\frac{1}{d(a+d)}=\frac{d}{ad(a+d)}+\frac{a}{ad(a+d)}=\frac{a+d}{ad(a+d)}=\frac{1}{ad}=\frac{1}{r^2}.$$

Analogicznie

$$\frac{1}{BS^2}+\frac{1}{CS^2}=\frac{1}{bc}=\frac{1}{r^2}.$$

Z dwóch ostatnich równości, dostajemy

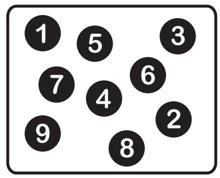
$$\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{DS^2}=\frac{1}{BS^2}+\frac{1}{CS^2}$$

czyli

$$\frac{1}{AS^2}-\frac{1}{BS^2}=\frac{1}{CS^2}-\frac{1}{DS^2}.$$

---

4. Na stole leży 9 żetonów z numerami od $\langle 1\rangle$ do $\langle 9\rangle$. Dwóch zawodników gra w następującą grę: pierwszy gracz w swoim ruchu usuwa ze stołu żeton z wybraną liczbą oraz wszystkie żetony z jej dzielnikami, następnie drugi wykonuje ruch według tych samych zasad itd. Wygrywa zawodnik, który zdejmie ze stołu ostatni żeton. Który z graczy (pierwszy czy drugi) ma strategię wygrywającą i na czym ona może polegać?



Rozwiązanie

Uzasadnimy, że jeśli pierwszy gracz w pierwszym swoim ruchu weźmie żeton oznaczony numerem $\langle 7\rangle$, to jest w stanie zagwarantować sobie wygraną. Oznaczmy gracza pierwszego przez $G1$, a drugiego przez $G2$.
Rozważmy w takiej sytuacji wszystkie opcje ruchu drugiego gracza:

$G1$	$G2$	$G1$	pozostają żetony	dalsza rozgrywka
$\langle 7\rangle$	$\langle 9\rangle$	$\langle 8\rangle$	$\langle 5\rangle$ $\langle 6\rangle$	po 2 ruchach wygrywa $G1$
$\langle 7\rangle$	$\langle 8\rangle$	$\langle 9\rangle$	$\langle 5\rangle$ $\langle 6\rangle$	po 2 ruchach wygrywa $G1$
$\langle 7\rangle$	$\langle 6\rangle$	$\langle 6\rangle$	$\langle 5\rangle$ $\langle 9\rangle$	po 2 ruchach wygrywa $G1$
$\langle 7\rangle$	$\langle 5\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$ $\langle 4\rangle$ $\langle 6\rangle$ $\langle 8\rangle$ $\langle 9\rangle$	dalsza rozgrywka opisana poniżej
$\langle 7\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 5\rangle$ $\langle 6\rangle$ $\langle 8\rangle$ $\langle 9\rangle$	po 4 ruchach wygrywa $G1$
$\langle 7\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 5\rangle$ $\langle 6\rangle$ $\langle 8\rangle$ $\langle 9\rangle$	po 4 ruchach wygrywa $G1$
$\langle 7\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 5\rangle$	$\langle 3\rangle$ $\langle 4\rangle$ $\langle 6\rangle$ $\langle 8\rangle$ $\langle 9\rangle$	dalsza rozgrywka opisana poniżej

Jeżeli po ruchu pierwszego gracza na stole zostaną żetony $\langle 3\rangle$, $\langle 4\rangle$, $\langle 6\rangle$, $\langle 8\rangle$, $\langle 9\rangle$, to pierwszy gracz może osiągnąć zwycięstwo następujźco:

$G2$	$G1$	pozostają żetony	dalsza rozgrywka
$\langle 9\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 6\rangle$ $\langle 8\rangle$	po 2 ruchach wygrywa $G1$
$\langle 8\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 6\rangle$ $\langle 9\rangle$	po 2 ruchach wygrywa $G1$
$\langle 6\rangle$	$\langle 4\rangle$	$\langle 8\rangle$ $\langle 9\rangle$	po 2 ruchach wygrywa $G1$
$\langle 4\rangle$	$\langle 9\rangle$	$\langle 6\rangle$ $\langle 8\rangle$	po 2 ruchach wygrywa $G1$
$\langle 3\rangle$	$\langle 8\rangle$	$\langle 6\rangle$ $\langle 9\rangle$	po 2 ruchach wygrywa $G1$

---

5. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, dla których wartość wyrażenia

$$p^4-5p^2+4$$

nie jest podzielna przez 360.

Rozwiązanie

Przekształcając dane wyrażenie równoważnie, otrzymujemy

$$\begin{aligned} p^4-5p^2+4 &= (p^4-4p^2+4)-p^2=(p^2-2)^2-p^2= \\ &= (p^2-2-p)(p^2-2+p)=(p-2)(p+1)(p+2)(p-1)= \\ &= (p-2)(p-1)(p+1)(p+2). \end{aligned}$$

Zauważmy, że liczba jest podzielna przez 360 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 5, 8 i 9. Jeżeli p jest liczbą całkowitą, to wśród liczb: $p-2$, $p-1$, p, $p+1$, $p+2$ dokładnie jedna jest podzielna przez 5 (ponieważ jest to pięć kolejnych liczb całkowitych).

■ Łatwo sprawdzić, że dla $p=5$ wyrażenie dane w zadaniu nie jest podzielne przez 5. Jeśli p jest liczbą pierwszą różną od 5, to dokładnie jedna z liczb: $p-2$, $p-1$, $p+1$, $p+2$ jest podzielna przez 5, więc i dane wyrażenie dzieli się przez 5.

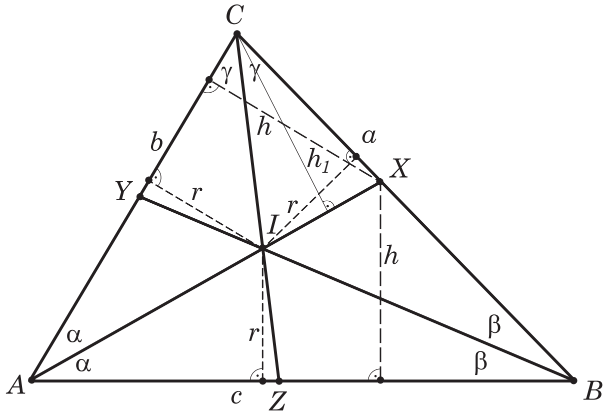
■ Jeśli p jest liczbą nieparzystą, to liczby $p-1$ i $p+1$ są kolejnymi liczbami parzystymi i jedna z nich dzieli się przez 4, więc ich iloczyn dzieli się przez 8, stąd i dane wyrażenie dzieli się przez 8. Jeśli natomiast $p=2$ (jest to jedyna liczba pierwsza parzysta), to wartość danego wyrażenia jest równa 0. Czyli dla każdej liczby pierwszej p dane wyrażenie dzieli się przez 8.

■ Jeśli p jest liczbą podzielną przez 3, to wśród liczb: $p-2$, $p-1$, $p+1$, $p+2$ są dwie, które dzielą się przez 3, a zatem dane wyrażenie dzieli się przez 9. Łatwo sprawdzić, że dla $p=3$ wyrażenie nie dzieli się przez 3.
Na podstawie powyższych uwag, dane wyrażenie nie dzieli się przez 360 tylko dla $p=3$ oraz $p=5$.

6. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c. Ustal, w jakich proporcjach środek okręgu wpisanego w ten trójkąt podzielił odcinki wycięte z dwusiecznych kątów trójkąta przez brzeg tego trójkąta.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku: A, B, C — wierzchołki trójkąta; I — środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC; X, Y Z — punkty przecięcia boków BC, AC, AB przez odpowiednie dwusieczne kątów trójkąta ABC. W dalszej części rozwiązania przez $[MNP]$ oznaczać będziemy pole trójkąta o wierzchołkach M, N, P.



Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, więc jest oddalony od każdego jego boku o r, gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego. Ponieważ punkt X leży na dwusiecznej kąta BAC, więc jest jednakowo oddalony od boków AB i AC. Przyjmijmy, że ta odległość jest równa h.
Trójkąty ACI i XCI mają wspólną wysokość h_1, więc

$$[ACI] = \frac{1}{2} \cdot AI \cdot h_1 \quad \text{oraz} \quad [XCI] = \frac{1}{2} \cdot XI \cdot h_1$$

i jednocześnie

$$[ACI] = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot r \quad \text{oraz} \quad [XCI] = \frac{1}{2} \cdot CX \cdot r.$$

Stąd

(1) $$\frac{[ACI]}{[XCI]} = \frac{AI}{XI} = \frac{CA}{CX}.$$

Analogicznie otrzymujemy

(2) $$\frac{[BAX]}{[CAX]} = \frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC}.$$

Uwaga. Równości (1) i (2) można otrzymać bezpośrednio z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkąta.

Wykorzystując równość (2), otrzymujemy

$$\frac{a}{CX}=\frac{BC}{CX}=\frac{BC+CX}{CX}=\frac{BX}{CX}+1=\frac{AB}{AC}+1=\frac{c}{b}+1=\frac{c+b}{b}.$$

Stąd

$$CX=\frac{ab}{b+c}. \tag{3}$$

Wykorzystując teraz (1) i (3), dostajemy

$$\frac{AI}{XI}=\frac{b}{CX}=\frac{b(b+c)}{ab}=\frac{b+c}{a}.$$

Prowadząc analogicznie rozumowanie, otrzymujemy

$$\frac{BI}{YI}=\frac{a+c}{b} \quad \text{oraz} \quad \frac{CI}{ZI}=\frac{a+b}{c}.$$

---

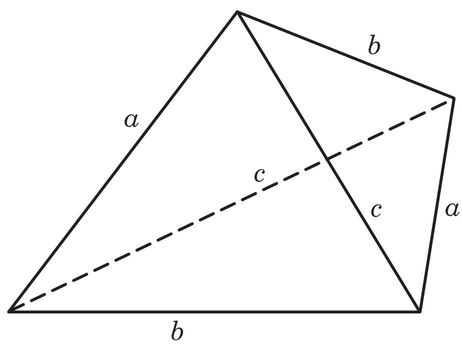
7. W czworościanie $ABCD$ krawędzie ściany ABC są odpowiednio równe:

$$BC=a, \quad CA=b, \quad AB=c,$$

a wszystkie pozostałe ściany są przystające do ściany ABC. Oblicz odległość między krawędziami AB i CD.

Rozwiązanie

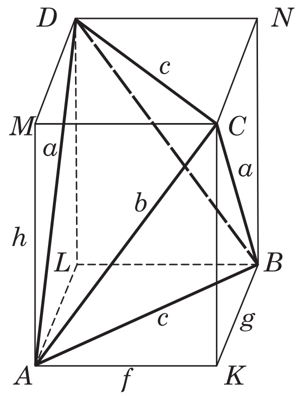
Zauważmy, że w czworościanie opisanym w treści zadania w każdym jego wierzchołku schodzą się krawędzie o długościach a, b i c.



Poprowadźmy trzy pary płaszczyzn równoległych:

• płaszczyznę równoległą do krawędzi AB i zawierającą krawędź CD oraz płaszczyznę równoległą do krawędzi CD i zawierającą krawędź AB,

- parę płaszczyzn wyznaczonych przez krawędzie BC i AD,
- parę płaszczyzn wyznaczonych przez krawędzie AC i BD.



Płaszczyzny te wyznaczają równoległościan $AKBLMCND$, w którym przeciwległe ściany są przystającymi równoległobokami. Zauważmy, że krawędzie czworościanu $ABCD$ są przekątnymi ścian otrzymanego równoległościanu. Każda para przeciwległych ścian ma obie przekątne tej samej długości, zatem równoległoboki muszą być prostokątami, czyli równoległościan $AKBLMCND$ jest prostopadłościanem. Oznaczmy jego krawędzie: $f=AK$, $g=AL$ i $h=AM$. Odległość między krawędziami AB i CD jest równa h. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy zależności

$$\begin{cases} g^2+h^2=a^2 \\ h^2+f^2=b^2 \\ g^2+f^2=c^2. \end{cases}$$

Dodając dwa pierwsze równania stronami oraz wykorzystując trzecie, dostajemy

$$g^2+h^2+h^2+f^2=2h^2+c^2=a^2+b^2,$$

a stąd

$$h^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

$$h=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\,.$$