Koło Matematyczne Gimnazjalistów

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

www.omg.edu.pl

Zestaw 6

1. Znajdź wszystkie trójki (x,y,z) liczb rzeczywistych, które są rozwiązaniami równania

$$5(x^2+y^2+z^2)=4(xy+yz+zx).$$

Wskazówka

Można odpowiednio pogrupować wszystkie wyrazy równania i sprowadzi je do postaci sumy kwadratów porównywanej do zera.

2. Udowodnij, że dla każej liczby naturalnej $n \geqslant 6$ kwadrat można rozciąć na n kwadratów.

Wskazówka

Łatwo wykazać, że każdy kwadrat można podzielić na 4 oraz na 6, na 7 i na 8 kwadratów. To wystarczy do rozwiązania całego zadania.

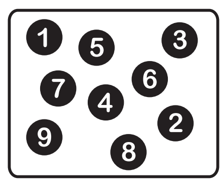
3. Na okręgu o środku S opisano trapez $ABCD$ (o podstawach AB i CD). Wykaż, że

$$\frac{1}{AS^2}-\frac{1}{BS^2}=\frac{1}{CS^2}-\frac{1}{DS^2}.$$

Wskazówka

Środek okręgu wpisanego w wielokąt leży na przecięciu dwusiecznych kątów tego wielokąta. Można zauważyć, że trójkąty ASD i BSC są prostokątne (dlaczego?) i wykorzystać ten fakt w rozwiązaniu zadania.

4. Na stole leży 9 żetonów z numerami od $\langle 1\rangle$ do $\langle 9\rangle$. Dwóch zawodników gra w następującą grę: pierwszy gracz w swoim ruchu usuwa ze stołu żeton z wybraną liczbą oraz wszystkie żetony z jej dzielnikami, następnie drugi wykonuje ruch według tych samych zasad itd. Wygrywa zawodnik, który zdejmie ze stołu ostatni żeton. Który z graczy (pierwszy czy drugi) ma strategię wygrywającą i na czym ona może polegać?



Wskazówka

Niezależnie od wybranego ruchu wśród żetonów usuwanych przez pierwszego gracza w pierwszym ruchu na pewno będzie żeton $\langle 1\rangle$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Czy może istnieć strategia wygrywająca dla drugiego gracza? Załóżmy, że tak. Oznacza to, że drugi gracz ma prowadzącą do zwycięstwa *ripost* na każde rozpoczęcie gry. W szczególności musi mieć taką taktykę w przypadku, gdy pierwszy gracz weźmie w pierwszym ruchu tylko żeton z numerem $\langle 1\rangle$. Ale gdyby taka taktyka dla drugiego gracza istniała (np. gdyby polegała na wzięciu żetonu z numerem $\langle n\rangle$), to pierwszy gracz mógłby ją *przejąć* biorąc żeton $\langle n\rangle$ w pierwszym ruchu (oczywiście wraz z żetonem $\langle 1\rangle$).
W grze zatem istnieje strategia wygrywająca dla pierwszego gracza. Trzeba jednak jeszcze ustalić, na czym ona polega.

5. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, dla których wartość wyrażenia

$$p^4-5p^2+4$$

nie jest podzielna przez 360.

Wskazówka

Spróbuj sprowadzić wyrażenie p^4-5p^2+4 do postaci iloczynu czterech liczb całkowitych.

6. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c. Ustal, w jakich proporcjach środek okręgu wpisanego w ten trójkąt podzielił odcinki wycięte z dwusiecznych kątów trójkąta przez brzeg tego trójkąta.

Wskazówka

Podpowiedzią niech będzie przypomnienie, że każdy punkt dwusiecznej kąta jest jednakowo oddalony od jego ramion. Można skorzystać z tej własności dla dwóch punktów — środka okręgu wpisanego i punktu przecięcia dwusiecznej z przeciwległym bokiem trójkąta.

7. W czworościanie $ABCD$ krawędzie ściany ABC są odpowiednio równe:

$$BC=a,\quad CA=b,\quad AB=c,$$

a wszystkie pozostałe ściany są przystające do ściany ABC. Oblicz odległość między krawędziami AB i CD.

Wskazówka

Rozwiązanie tego zadania bardzo ułatwi umieszczenie danego czworościanu w odpowiednio dobranym prostopadłościanie.