Zestaw 7 — szkice rozwiazań zadań

1. Liczby a, b, c spełniają warunki:

(1) $a+b+c=20$,

(2) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{1}{4}$.

Obliczyć wartość wyrażenia

$$w=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}.$$

Rozwiązanie

Korzystając z warunków (1) i (2), otrzymujemy

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=20\cdot\frac{1}{4}=5.$$

Przekształcając lewą stronę otrzymanej równości, mamy kolejno

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}=5$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c+a}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{a+b}=5$$

$$\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1=5,$$

stąd

$$w=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2.$$

2. Wyznaczyć wszystkie pary (x,y) liczb rzeczywistych spełniające równanie

$$(x^4+1)(4y^4+1)=8x^2y^2.$$

Rozwiązanie

Sposób 1.

Z nierówności $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ między średnią arytmetyczną i geometryczną dla dwóch liczb nieujemnych a i b, otrzymujemy

$$\text{(1)}\qquad \frac{x^4+1}{2}\geqslant x^2 \quad\text{i}\quad \frac{4y^4+1}{2}\geqslant 2y^2.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

W powyższych nierównościach zachodzą równości tylko wtedy, gdy

$$x^4 = 1 \quad \text{i} \quad 4y^4 = 1. \tag{2}$$

Na podstawie (1), otrzymujemy

$$(x^4+1)(4y^2+1) \geqslant 8x^2y^2,$$

przy czym równość

$$(x^4+1)(4y^2+1) = 8x^2y^2$$

zachodzi tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek (2). Stąd rozwiązaniami danego układu są pary

$$\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Sposób 2.
Zauważmy, że

$$(x^4+1)(4y^4+1)-8x^2y^2 = 4x^4y^4+x^4+4y^4+1-8x^2y^2 = (x^2-2y^2)^2+(2x^2y^2-1)^2.$$

Stąd

$$(x^4+1)(4y^4+1)-8x^2y^2 \geqslant 0,$$

przy czym w ostatniej nierówności zachodzi równość tylko wtedy, gdy

$$x^2-2y^2 = 0 \quad \text{i} \quad 2x^2y^2-1 = 0,$$

skąd

$$x^2 = 2y^2 \quad \text{i} \quad 2x^2y^2 = 1$$

$$x^2 = 2y^2 \quad \text{i} \quad x^4 = 1.$$

Dalsza część rozwiązania jak w sposobie 1.

---

3. Niech p i q będą dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Udowodnić, że liczba $p+q$ jest iloczynem co najmniej trzech (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych od 1.

Rozwiązanie

Ponieważ liczby p i q są liczbami naturalnymi nieparzystymi, więc liczba $\dfrac{p+q}{2}$ jest liczbą naturalną. Jeżeli $p<q$, to

$$2p < p+q < 2q$$

$$p < \frac{p+q}{2} < q.$$

Ponieważ p i q są dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi nieparzystymi, to liczba $\dfrac{p+q}{2}$ jest liczbą złożoną.

Zatem

$$\frac{p+q}{2} = m \cdot n$$

dla pewnych liczb naturalnych $m>1$ i $n>1$. Oznacza to, że

$$p+q = 2 \cdot m \cdot n,$$

skąd teza zadania.

---

4. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunki:

(1) $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$,

(2) $a+b+c+d \geqslant 1$.

Wykazać, że prawdziwa jest nierówność

$$a^2+3b^2+5c^2+7d^2 \geqslant 1.$$

Rozwiązanie

Z nierówności $a+b+c+d \geqslant 1$ wynika, że

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd \geqslant 1.$$

Korzystając teraz z warunku (1), dostajemy

$$2ab \leqslant 2b^2, \quad 2ac \leqslant 2c^2, \quad 2ad \leqslant 2d^2, \quad 2bc \leqslant 2c^2, \quad 2bd \leqslant 2d^2, \quad 2cd \leqslant 2d^2,$$

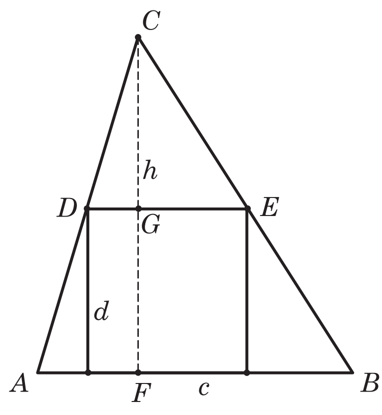
stąd

$$\begin{aligned} a^2+3b^2+5c^2+7d^2 &\geqslant a^2+b^2+c^2+d^2+2b^2+2c^2+2d^2+2c^2+2d^2+2d^2 \geqslant \\ &\geqslant a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd \geqslant 1. \end{aligned}$$

---

5. W trójkąt ostrokątny ABC wpisano kwadrat tak, że dwa jego wierzchołki należą do boku AB, a dwa pozostałe do pozostałych boków trójkąta. Udowodnić, że pole tego kwadratu nie przekracza połowy pola trójkąta ABC.

Rozwiązanie



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:
$AB = c$ — długość boku trójkąta, na którym leżą dwa wierzchołki kwadratu,
$CF = h$ — długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C,
d — długość boku kwadratu.
Z podobieństwa trójkątów ABC i DEC, otrzymujemy

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CF}{CG} \quad \text{czyli} \quad \frac{c}{d} = \frac{h}{h-d}.$$

Stąd $d = \frac{ch}{c+h}$. Zatem pole kwadratu jest równe $P_k = \frac{(ch)^2}{(c+h)^2}$.

Dalszą część zadania rozwiążemy dwoma sposobami.

Sposób 1.

Z nierówności $\sqrt{ch} \leqslant \frac{c+h}{2}$ między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich c i h, otrzymujemy

$$P_k = \frac{(ch)^2}{(c+h)^2} \leqslant \frac{(ch)^2}{4ch} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ch = \frac{1}{2} P_{ABC}.$$

Sposób 2.

Ponieważ

$$P_k - \frac{1}{2} P_{ABC} = \frac{(ch)^2}{(c+h)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} ch = \frac{4(ch)^2 - ch(c+h)^2}{4(c+h)^2} =$$

$$= \frac{ch(4ch - c^2 - 2ch - h^2)}{4(c+h)^2} = \frac{ch(-c^2 + 2ch - h^2)}{4(c+h)^2} = -\frac{ch(c-h)^2}{4(c+h)^2} \leqslant 0,$$

skąd

$$P_k \leqslant \frac{1}{2} P_{ABC}.$$

---

6. Danych jest 70 różnych liczb całkowitych dodatnich, wśród których nie ma liczb większych od 200. Wykazać, że przynajmniej dwie z nich różnią się o 4 lub o 5, lub o 9.

Wskazówka

Oznaczmy dane liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{70}$. Rozpatrzmy liczby

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{70},$$
$$a_1 + 4, a_2 + 4, a_3 + 4, \ldots, a_{70} + 4,$$
$$a_1 + 9, a_2 + 9, a_3 + 9, \ldots, a_{70} + 9.$$

Ponieważ liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{70}$ są różne, więc również liczby $a_1 + 4$, $a_2 + 4$, $a_3 + 4, \ldots, a_{70} + 4$ oraz $a_1 + 9$, $a_2 + 9$, $a_3 + 9, \ldots, a_{70} + 9$ są różne. Razem wypisaliśmy 210 liczb całkowitych dodatnich, z których największa może być równa 209. Zatem co najmniej dwie spośród tych liczb są równe. Mogą zajść następujące trzy przypadki

1° $a_i = a_j + 4$, czyli $a_i - a_j = 4$;

2° $a_i = a_j + 9$, czyli $a_i - a_j = 9$;

3° $a_i + 4 = a_j + 9$, czyli $a_i - a_j = 5$.

Stąd wynika teza zadania.

7. Wykazać, że w każdym czworościanie istnieją takie trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka, z których można zbudować trójkąt.

Rozwiązanie

Niech AB będzie najdłuższą krawędzią czworościanu $ABCD$. Wtedy każda z pozostałych krawędzi ma długość nie większą od AB. Zauważmy, że (na podstawie nierówności trójkąta dla trójkątów ABC i ABD) zachodzą nierówności

$$AC+BC>AB \quad \text{i} \quad AD+BD>AB.$$

Stąd

$$AC+BC+AD+BD>2AB$$

$$(AC+AD-AB)+(BC+BD-AB)>0.$$

Suma dwóch liczb jest dodatnia, jeżeli co najmniej jedna z nich jest dodatnia, a zatem

$$AC+AD-AB>0 \quad \text{lub} \quad BC+BD-AB>0,$$

czyli

$$AC+AD>AB \quad \text{lub} \quad BC+BD>AB.$$

Oznacza to, że z odcinków AB, AC, AD lub BC, BD, BA można zbudować trójkąt.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego