Zestaw 8

1. Wykaż, że dla każdych liczb rzeczywistych a, b i c zachodzi równość

$$(a|b|-b|a|)(b|c|-c|b|)(c|a|-a|c|)=0.$$

2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, które spełniają nierówności

$$\frac{2010}{\sqrt{n+10}}<\sqrt{n-10}<\frac{2011}{\sqrt{n+10}}.$$

3. Każdą z liczb 1, 2, 3, ..., 32, 33 zapisano na oddzielnej kartce. Jaś twierdzi, że potrafi rozłożyć te kartki w jedenastu pudełkach — po trzy w każdym pudełku — tak, aby w każdym pudełku suma liczb zapisanych na dwóch kartkach była równa liczbie zapisanej na trzeciej kartce. Małgosia twierdzi, że jest to niemożliwe. Kto ma rację: Jaś czy Małgosia? Odpowiedź uzasadnij.

4. Rozstrzygnij, czy istnieje pięć kolejnych liczb całkowitych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby całkowitej.

5. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym krawędzie AD i BC są równej długości. Punkty M, N, P, Q są środkami krawędzi odpowiednio AB, BD, DC, CA. Wykaż, że odcinki MP i NQ mają punkt wspólny i są prostopadłe.

6. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt M jest takim punktem boku AC, że $MC=2\cdot MA$. Punkty K i L dzielą bok BC na trzy równe części. Wykaż, że

$$\sphericalangle AKM+\sphericalangle ALM=30^\circ.$$

7. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{(n+1)^{n-1}\cdot(n-1)^{n+1}}<n^n.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego