Zestaw 8 — szkice rozwiazań zadań

1. Wykaż, że dla każdych liczb rzeczywistych a, b i c zachodzi równość

$$(a|b|-b|a|)(b|c|-c|b|)(c|a|-a|c|)=0.$$

Rozwiązanie

Zbadamy dwa przypadki.

Przypadek 1°

Co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa zero. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że jest to liczba a. Wtedy

$$a\cdot|b|-b\cdot|a|=0\cdot|b|-b\cdot|0|=0,$$

stąd równość dana w zadaniu jest spełniona.

Przypadek 2°

Każda z liczb a, b, c jest różna od zera. Wtedy co najmniej dwie z tych liczb są tego samego znaku (dodatnie lub ujemne). Niech to będą liczby a i b.

Jeśli liczby a i b są dodatnie, to $|a|=a$ i $|b|=b$, stąd

$$a\cdot|b|-b\cdot|a|=a\cdot b-b\cdot a=0,$$

a zatem równość dana w zadaniu jest spełniona.

Jeśli liczby a i b są ujemne, to $|a|=-a$ i $|b|=-b$, stąd

$$a\cdot|b|-b\cdot|a|=a\cdot(-b)-b\cdot(-a)=-a\cdot b-b\cdot(-a)=-ab+ab=0.$$

Jak widać i w tym przypadku równość dana w zadaniu jest spełniona. Kończy to rozwiązanie zadania.

2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, które spełniają nierówności

$$\frac{2010}{\sqrt{n+10}}<\sqrt{n-10}<\frac{2011}{\sqrt{n+10}}.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że musi być spełniona nierówność $n-10\geqslant 0$, stąd $n\geqslant 10$. Wtedy dane nierówności możemy zapisać w sposób równoważny

$$2010<\sqrt{(n-10)(n+10)}<2011$$

$$2010^2<n^2-100<2011^2$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$2010^2+100<n^2<2011^2+100.$$

Ponieważ

$$2010^2<2010^2+100<n^2<2011^2+100<2012^2,$$

więc $n^2=2011^2$, a stąd $n=2011$.

---

3. Każdą z liczb 1, 2, 3, ..., 32, 33 zapisano na oddzielnej kartce. Jaś twierdzi, że potrafi rozłożyć te kartki w jedenastu pudełkach — po trzy w każdym pudełku — tak, aby w każdym pudełku suma liczb zapisanych na dwóch kartkach była równa liczbie zapisanej na trzeciej kartce. Małgosia twierdzi, że jest to niemożliwe. Kto ma rację: Jaś czy Małgosia? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Pokażemy, że rację ma Małgosia. Gdyby rację miał Jaś, to suma liczb w każdym pudełku byłaby parzysta. Rzeczywiście, jeśli w dowolnie wybranym pudełku znajdują się kartki z liczbami a, b, c i $a+b=c$, to

$$a+b+c=c+c=2c.$$

Wtedy suma wszystkich liczb na kartkach musiałaby być liczbą parzystą. Jednak

$$1+2+3+\cdots+32+33=(1+33)+(2+32)+(3+31)+\cdots(16+18)+17.$$

Suma liczb w każdym z nawiasów jest liczbą parzystą, stąd suma wszystkich liczb na kartkach jest liczbą nieparzystą. Oznacza to, że Jaś nie ma racji.

---

4. Rozstrzygnij, czy istnieje pięć kolejnych liczb całkowitych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Zauważmy, że pięć kolejnych liczb całkowitych można zapisać w postaci: $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, gdzie n jest liczbą całkowitą. Stąd

$$(n-2)^2+(n-1)^2+(n)^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10.$$

Wiadomo, że kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 4 daje resztę 0 lub 1. W dalszej części zadania posłużymy się kongruencjami (można o tym przeczytać np. w broszurze: *I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*).

Jeżeli $n\equiv 0 \pmod 4$, to $5n^2+10\equiv 10\equiv 2 \pmod 4$;
jeżeli $n\equiv 1 \pmod 4$, to $5n^2+10\equiv 15\equiv 3 \pmod 4$;
jeżeli $n\equiv 2 \pmod 4$, to $5n^2+10\equiv 30\equiv 2 \pmod 4$;
jeżeli $n\equiv 3 \pmod 4$, to $5n^2+10\equiv 55\equiv 3 \pmod 4$.

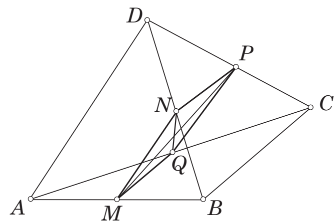
Jak widać w żadnym z przypadków nie otrzymujemy ani reszty 0, ani reszty 1. Stąd liczba ta nie może być kwadratem liczby całkowitej.

5. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym krawędzie AD i BC są równej długości. Punkty M, N, P, Q są środkami krawędzi odpowiednio AB, BD, DC, CA. Wykaż, że odcinki MP i NQ mają punkt wspólny i są prostopadłe.

Rozwiązanie

Skorzystamy z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta, które mówi:

W każdym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku tego trójkąta.



Na podstawie powyższego twierdzenia, mamy

$$MN \parallel AD \quad \text{i} \quad MN = \frac{1}{2}AD \quad \text{oraz} \quad PQ \parallel AD \quad \text{i} \quad PQ = \frac{1}{2}AD,$$

więc odcinki MN i PQ są równoległe, a zatem zawierają się w jednej płaszczyźnie. Oznacza to, że czworokąt $MNPQ$ (równoległobok!) zawiera się w jednej płaszczyźnie, stąd odcinki MP i NQ (przekątne tego czworokąta) mają punkt wspólny. Wykażemy teraz, że te odcinki są prostopadłe. Wykorzystując fakt, że $AD = BC$, otrzymujemy

$$MN = PQ = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = MQ = NP,$$

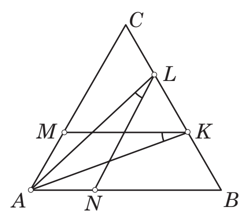
czyli czworokąt $MNPQ$ jest rombem, a wiadomo, że przekątne rombu są prostopadłe. Kończy to rozwiązanie zadania.

6. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt M jest takim punktem boku AC, że $MC = 2 \cdot MA$. Punkty K i L dzielą bok BC na trzy równe części. Wykaż, że

$$\sphericalangle AKM + \sphericalangle ALM = 30^\circ.$$

Rozwiązanie

Wybierzmy na boku AB taki punkt N, że $NB = 2 \cdot NA$. Przyjmijmy też położenie punktów K i L na boku BC tak, jak na rysunku obok. Ponieważ $\frac{CL}{LB} = \frac{AN}{NB}$, więc $LN \parallel AC$. Ponadto $\frac{CM}{AM} = \frac{CK}{BK}$, więc $MK \parallel AB$, a stąd

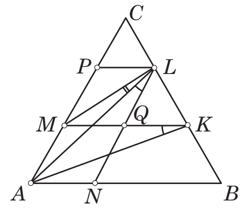


$$\sphericalangle BNL = 60^\circ = \sphericalangle KMC.$$

Zatem

$$\sphericalangle ANL = \sphericalangle AMK = 120^\circ.$$

Ponadto $AN = AM$ i $LN = KM$. Oznacza to, że trójkąty AMK i ANL są przystające, stąd $\sphericalangle AKM = \sphericalangle ALN$.



Wybierzmy teraz na boku AC taki punkt P, że $AP = 2 \cdot CP$. Niech ponadto punkt Q będzie punktem przecięcia odcinków MK i LN. Zauważmy, że czworokąt $MQLP$ jest rombem o kącie ostrym równym 60°. Ponieważ przekątne w rombie są dwusiecznymi kątów, więc

$$\sphericalangle AKM + \sphericalangle ALM = \sphericalangle ALN + \sphericalangle ALM = \sphericalangle QLM = 30^\circ.$$

---

7. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{(n+1)^{n-1} \cdot (n-1)^{n+1}} < n^n.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich n mamy

$$(n+1)^{n-1} \cdot (n-1)^{n+1} = (n+1)^n \cdot (n-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1}.$$

Ponieważ $\frac{n-1}{n+1} < 1$, więc

$$(n+1)^{n-1} \cdot (n-1)^{n+1} < (n+1)^n \cdot (n-1)^n = (n^2-1)^n < (n^2)^n = n^{2n},$$

a stąd

$$\sqrt{(n+1)^{n-1} \cdot (n-1)^{n+1}} < n^n.$$