Zestaw 8

1. Wykaż, że dla każdych liczb rzeczywistych a, b i c zachodzi równość

$$(a|b|-b|a|)(b|c|-c|b|)(c|a|-a|c|)=0.$$

Wskazówka

Zbadaj dwa przypadki:
1° Co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 0.
2° Każda z liczb a, b, c jest różna od zera. Jakie znaki mogą mieć wtedy te liczby?

2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, które spełniają nierówności

$$\frac{2010}{\sqrt{n+10}}<\sqrt{n-10}<\frac{2011}{\sqrt{n+10}}.$$

Wskazówka

Zauważ, że dana nierówność może być zapisana w sposób równoważny następująco

$$2010^2 < n^2-100 < 2011^2.$$

3. Każdą z liczb 1, 2, 3, …, 32, 33 zapisano na oddzielnej kartce. Jaś twierdzi, że potrafi rozłożyć te kartki w jedenastu pudełkach — po trzy w każdym pudełku — tak, aby w każdym pudełku suma liczb zapisanych na dwóch kartkach była równa liczbie zapisanej na trzeciej kartce. Małgosia twierdzi, że jest to niemożliwe. Kto ma rację: Jaś czy Małgosia? Odpowiedź uzasadnij.

Wskazówka

Jeżeli Jaś ma rację, to jaka jest suma liczb w każdym z pudełek?

4. Rozstrzygnij, czy istnieje pięć kolejnych liczb całkowitych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby całkowitej.

Wskazówka

Zauważ, że pięć kolejnych liczb całkowitych można zapisać w postaci: $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$, gdzie n jest liczbą całkowitą. Stąd

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10.$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

5. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym krawędzie AD i BC są równej długości. Punkty M, N, P, Q są środkami krawędzi odpowiednio AB, BD, DC, CA. Wykaż, że odcinki MP i NQ mają punkt wspólny i są prostopadłe.

Wskazówka

Wystarczy skorzystać z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta.

6. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt M jest takim punktem boku AC, że $MC = 2 \cdot MA$. Punkty K i L dzielą bok BC na trzy równe części. Wykaż, że

$$\sphericalangle AKM + \sphericalangle ALM = 30^\circ.$$

Wskazówka

Wybierz na boku AB taki punkt N, że $NB = 2 \cdot NA$, a następnie wykaż, że trójkąty AMK i ANL są przystające.

7. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{(n+1)^{n-1} \cdot (n-1)^{n+1}} < n^n.$$

Wskazówka

Zauważ, że dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich n mamy

$$(n+1)^{n-1} \cdot (n-1)^{n+1} = (n+1)^n \cdot (n-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1} \quad \text{oraz} \quad \frac{n-1}{n+1} < 1.$$