Zestaw 9

1. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb całkowitych spełniających układ równań
$$\begin{cases} ab+c=2011 \\ a+bc=2012. \end{cases}$$

2. Wysokości AA_1, BB_1, CC_1 trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Wykaż, że jeżeli $HA_1=HB_1=HC_1$, to trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym.

3. Liczby x, y, z są takimi liczbami rzeczywistymi, że $(x+y)(y+z)(z+x)\neq 0$. Wykaż, że prawdziwa jest równość
$$\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-x}{z+x}+\frac{x-y}{x+y}\cdot\frac{y-z}{y+z}\cdot\frac{z-x}{z+x}=0.$$

4. Dane są liczby
$$A=\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1} \quad \text{oraz} \quad B=\frac{2}{xy+1},$$
gdzie x i y są takimi liczbami rzeczywistymi, że $x\neq y$ i $xy+1\neq 0$. Wyznacz $A+B$, jeśli wiadomo, że $A=B$.

5. Dany jest czworokąt wypukły, którego kolejne boki mają długości: 48, 49, 51, 52. Wykaż, że suma długości przekątnych tego czworokąta jest większa od 100.

6. Dany jest prostopadłościan o podstawach $ABCD$ i $EFGH$. Płaszczyzna przecina jego krawędzie boczne AE, BF, CG i DH odpowiednio w punktach M, N, P i Q. Wykaż, że
$$AM+CP=BN+DQ.$$

7. Na tablicy napisano liczby: 1, 2, 4, 5. Operacja polega na wybraniu dwóch liczb a i b — spośród napisanych na tablicy — i zastąpieniu ich liczbami $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ i $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Czy po pewnej liczbie takich operacji można otrzymać na tablicy liczby: 1, $2\sqrt{2}$, 3, $4\sqrt{2}$? Odpowiedź uzasadnij.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego