Koło Matematyczne Gimnazjalistów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Zestaw 10 — szkice rozwiazań zadań

1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=72 \\ (y+z)(x+y+z)=120 \\ (z+x)(x+y+z)=96. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Dodając równania danego układu stronami i wyłączając wspólny czynnik przed nawias, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} (x+y+z)(x+y+y+z+z+x)&=288 \\ 2(x+y+z)(x+y+z)&=288 \\ (x+y+z)^2&=144, \end{aligned}$$

stąd

$$x+y+z=12 \quad \text{lub} \quad x+y+x=-12.$$

Jeżeli $x+y+z=12$, to dany w zadaniu układ równań możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} x+y&=6 \\ y+z&=10 \\ z+x&=16, \end{aligned}$$

skąd $x=2$, $y=4$, $z=6$.
Postępując analogicznie w przypadku drugim, gdy $x+y+z=-12$, dostajemy $x=-2$, $y=-4$, $z=-6$. Bezpośrednim podstawieniem sprawdzamy, że obie trójki liczb są rozwiązaniami danego układu równań.

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność:

$$a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca&=\frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)= \\ &=\frac{1}{2}\Big((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\Big)\geqslant 0, \end{aligned}$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

stąd dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i c prawdziwa jest nierówność

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

Przyjmując w tej nierówności $c=1$, dostajemy tezę.

---

3. Mały majsterkowicz Kazio przygotował na szkolną dyskotekę efekty świetlne własnego pomysłu. Żarówki, których jest 1000 i które są ponumerowane liczbami od 1 do 1000, są włączane i wyłączane specjalnym przełącznikiem. Kolejne k-te naciśnięcie przełącznika zmienia stan wszystkich żarówek o numerach podzielnych przez k. Na początku dyskoteki wszystkie żarówki były wyłączone. Pierwsze naciśnięcie przełącznika zapala wszystkie żarówki. Drugie naciśnięcie gasi wszystkie żarówki o numerach parzystych. Po trzecim użyciu przełącznika świecą się żarówki o numerach nieparzystych i jednocześnie niepodzielnych przez 3 oraz o numerach parzystych i podzielnych przez 3. Pod koniec dyskoteki okazało się, że Kazio naciskał przełącznik 1000 razy. Które żarówki świeciły się po zakończeniu dyskoteki?

Rozwiązanie

Zauważmy, że stan k-tej żarówki zmienia się tyle razy ile dzielników naturalnych ma liczba k. Zatem po zakończeniu dyskoteki będą się świeciły żarówki o numerach, które mają nieparzystą liczbę dzielników. Wykażemy, że takimi liczbami są kwadraty liczb naturalnych. Rozpatrzmy liczbę k, która ma parzystą liczbę dzielników:

$$d_1 < d_2 < \ldots < d_{2n-1} < d_{2n}.$$

Wówczas

$$k = d_1 \cdot d_{2n} = d_2 \cdot d_{2n-1} = \ldots = d_n \cdot d_{n+1},$$

stąd liczba k nie jest kwadratem liczby naturalnej. Jeśli liczba k ma nieparzystą liczbę dzielników:

$$d_1 < d_2 < \ldots < d_{n+1} < \ldots < d_{2n+1},$$

to

$$k = d_1 \cdot d_{2n+1} = d_2 \cdot d_{2n} = \ldots = d_{n+1}^2 = \ldots = d_n \cdot d_{n+2}.$$

Liczba k jest w tym przypadku kwadratem liczby naturalnej. Zatem, po dyskotece bądą świeciły się żarówki o numerach: 1, 4, 9, 16, …, 30^2, 31^2.

4. Czy istnieją takie dwie liczby x i y, aby jednocześnie zachodziły równości:

$$x(y-x)=3 \quad \text{i} \quad y(4y-3x)=2.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Załóżmy, że takie liczby istnieją. Odejmując stronami dane równania, dostajemy:

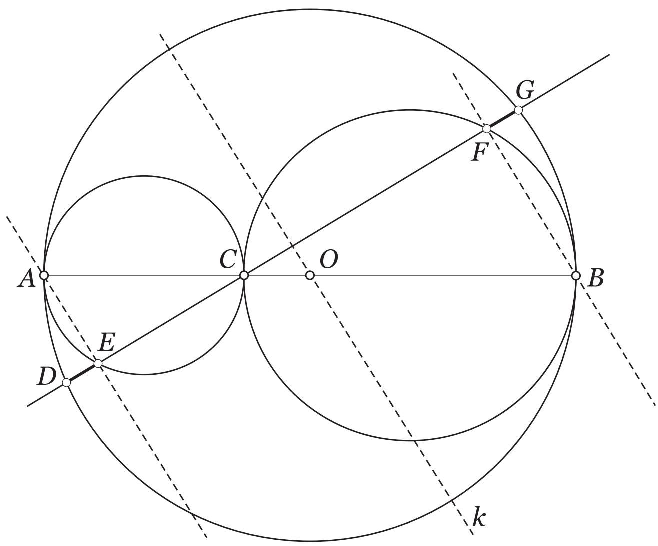
$$\begin{aligned} xy-x^2-4y^2+3xy&=1 \\ -(x^2-4xy+4y^2)&=1 \\ (x-2y)^2&=-1. \end{aligned}$$

Ostatnia równość nie może zachodzić, bo kwadrat liczby nie może być liczbą ujemną. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że takie liczby nie istnieją.

5. Punkt C leży wewnątrz odcinka AB. Niech okręgi o_1, o_2 i o będą okręgami o średnicach odpowiednio AC, BC i AB. Prosta k przechodzi przez punkt C i przecina okręgi w pięciu punktach D, E, C, F, G, położonych na tej prostej w wymienionej kolejności. Wykaż, że odcinki DE i FG są równej długości.

Rozwiązanie

Niech punkt E należy do okręgu o_1, punkt F — do okręgu o_2 oraz niech punkt O będzie środkiem okręgu o. Kąt wpisany w okrąg oparty na średnicy jest kątem prostym, więc $AE \perp DG$ i $BF \perp DG$.



Proste AE i BF są zatem równoległe i przechodzą przez końce średnicy AB okręgu o. Punkt O, będący środkiem okręgu o, jest jednakowo oddalony od

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Eurpejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

prostych AE i BF. Niech prosta k będzie prostą przechodzącą przez punkt O i równoległą do prostych AE i BF. Jest zatem ta prosta osią symetrii fgury otworzonej z prostych AE i BF, okręgu o, oraz prostej DG. Stąd odcinki DE i FG są symetryczne względem prostej k, czyli mają tę samą długość.

---

6. Pewna liczba naturalna ma w układzie dziesiętnym postać $\overline{x0yz}$, gdzie x, y, z są cyframi oraz $x>0$. Liczba ta podzielona przez pewną liczbę naturalną n daje iloraz, który w układzie dziesiętnym jest postaci $\overline{xyz}$. Znaleźć x, y, z oraz n.

Rozwiązanie

Niech

$$\overline{x0yz} = 1000x + 10y + z \quad \text{oraz} \quad \overline{xyz} = 100x + 10y + z.$$

Zgodnie z warunkami zadania zachodzi równość

$$1000x + 10y + z = n \cdot (100x + 10y + z),$$

którą możemy zapisać równoważnie

$$100x(10-n) = (10y+z)(n-1). \tag{1}$$

Jeśli $n \geqslant 11$, to równość (1) zachodzić nie może, bo lewa strona byłaby ujemna, a prawa dodatnia. Analogicznie, równość (1) zachodzić nie może, gdy $n \leqslant 5$, bo wtedy lewa strona równości jest równa co najmniej 500, a prawa jest mniejsza od 400. Stąd możliwe wartości n należą do zbioru $\{6, 7, 8, 9, 10\}$.
Zbadamy teraz te pięć możliwych przypadków:

(a) Niech $n=6$. Równość (1) przyjmuje wtedy postać $80x = 10y + z$. Lewa strona otrzymanej równości jest podzielna przez 10, więc jej prawa strona też musi być podzielna przez 10. Stąd $z=0$, a wtedy $x=1$ i $y=8$.

(b) Jeżeli $n=7$, to równość (1) możemy zapisać $50x = 10y + z$. Rozumując podobnie jak w punkcie (a), dostajemy: $z=0$, $x=1$, $y=5$.

(c) Jeśli $n=8$, to zależność (1) przyjmuje postać $200x = 7(10y+z)$. Wtedy może być jedynie $x=7$ i stąd $200 = 10y + z$. Jednak ta równość zachodzić nie może, bo $10y + z \leqslant 99 < 200$.

(d) Niech $n=9$. Równość (1) możemy zapisać w postaci $25x = 20y + 2z$, stąd z musi być podzielna przez 5, czyli $z=0$ lub $z=5$.
Gdy $z=0$, to poprzez rozumowanie jak w przypadku (a), otrzymujemy $x=4$ i $y=5$; gdy natomiast $z=5$, to dostajemy równość $5x = 4y + 2$, której prawa strona jest parzysta i niepodzielna przez 4. Stąd może być $x=2$ lub $x=6$. Dla $x=2$ otrzymujemy $y=2$, a dla $x=6$ dostajemy $y=7$.

(e) Jeżeli $n=10$, równość (1) przyjmuje postać $100x \cdot 0 = 9(10y+z)$. Równość ta zachodzi dla każdej liczby $x \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Wtedy $10y + z = 0$, a stąd $y = z = 0$.

Reasumując, dla poszczególnych wartości n, otrzymujemy następujące rozwiązania (x,y,z): dla $n=6$ mamy $(1,8,0)$, dla $n=7$ mamy $(1,5,0)$, dla $n=9$ mamy $(4,5,0)$ lub $(2,2,5)$, lub $(6,7,5)$, a dla $n=10$ mamy $(x,0,0)$, gdzie $x \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$.

---

7. Rozstrzygnij czy istnieje wielościan o sześciu ścianach i siedmiu wierzchołkach.

Rozwiązanie

Taki wielościan istnieje — zobacz rysunek poniżej. Punkty: A, C, F, G i D leżą w jednej płaszczyźnie.