Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 3
luty 2012

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Refleksje po zawodach II stopnia VII OMG

W dniu 7 stycznia 2012 roku odbyły się zawody drugiego stopnia VII Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Wzięło w nich udział około 1300 gimnazjalistów z całej Polski. Jako jeden ze sprawdzających prace uczestników chciałbym podzielić się z Czytelnikami *Kwadratu* swoimi uwagami, dotyczącymi rozwiązań poszczególnych problemów.

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b, których iloczyn ab jest podzielny przez 175, a suma $a+b$ jest równa 175.

Nasuwa się następujący prosty, ale żmudny sposób rozwiązania: przejrzyjmy wszystkie 174 pary liczb całkowitych dodatnich a i b, których suma jest równa 175.

$a=1,\ b=174$	$\ldots$
$a=2,\ b=173$	$a=172,\ b=3$
$a=3,\ b=172$	$a=173,\ b=2$
$\ldots$	$a=174,\ b=1$

Teraz dla każdej pary obliczamy iloczyn ab i sprawdzamy, czy dzieli się on przez 175. To nietrudne, ale bardzo żmudne. Czy zatem warto zastanawiać się nad takim rozwiązaniem?

Odpowiedź pozytywną zasugerowała mi praca jednego zawodnika. Napisał on, że rozpoczął od analizowania kolejnych przypadków; rzeczywiście w pracy były rozpatrzone pierwsze dwie czy trzy pary. Następnie zauważył, że jeśli liczba a nie dzieli się przez 5, to liczba b dopełniająca ją do liczby podzielnej przez 5 (czyli do 175) też nie dzieli się przez 5 i iloczyn na pewno nie będzie dzielić się przez 175. Mógł zatem ograniczyć się do takich par, w których liczba a dzieli się przez 5:

$a=5,\ \ b=170$	$\ldots$
$a=10,\ b=165$	$a=160,\ b=15$
$a=15,\ b=160$	$a=165,\ b=10$
$\ldots$	$a=170,\ b=5$

Takich par jest tylko 34, a jeśli uwzględnimy fakt, że każda występuje dwukrotnie (jako (a,b) i jako (b,a)), wystarczy rozpatrzeć tylko 17 — wystarczająco niewiele, by zdążyć w czasie zawodów.

W podobny sposób możemy nawet bardziej ograniczyć liczbę przypadków; ponieważ $175=7\cdot 25$, to iloczyn ab dzieli się przez 7 (gdyż jest on podzielny przez 175), więc jedna z liczb a, b również dzieli się przez 7. Wśród wybranych liczb podzielnych przez 5, od 5 do 170, tylko cztery dzielą się przez 7, to znaczy 35, 70, 105 i 140. Pozostają nam zatem tylko cztery pary:

$a=35,\ b=140$	$a=105,\ b=70$
$a=70,\ b=105$	$a=140,\ b=35$

i każda z nich spełnia warunki zadania: iloczyn ab jest liczbą podzielną przez 175, a suma równa się 175.

Okazało się, że rozwiązanie sposobem nieefektywnym, żmudnym, zasugerowało szybko pewne uproszczenia, które znacznie je przyspieszyły.

Warto zatem po rozwiązaniu zadania, tuż przed przystąpieniem do redakcji, zastanowić się przez chwilę, czy nasze rozumowanie da się uprościć. Dzięki temu możemy zaoszczędzić potem dużo czasu przy redagowaniu rozwiązania, a i nasz zapis stanie się krótszy, czytelniejszy i bardziej przejrzysty.

W przypadku wspomnianego wyżej uczestnika, niepotrzebne było mówienie o wszystkich możliwych parach. Można było od razu zauważyć, że co najmniej jedna z liczb a, b musi dzielić się przez 5, a skoro suma $a+b$ jest podzielna przez 5, to druga liczba też dzieli się przez 5. Podobnie jest z siódemką. Dalej wystarczy zauważyć, że liczby 5 i 7 są względnie pierwsze (tzn. ich największy wspólny dzielnik jest równy 1), skąd wynika, że obie liczby a i b muszą dzielić się przez $5\cdot 7=35$. To daje nam powyższe cztery pary (a,b). W ten sposób dostajemy oryginalne rozwiązanie zadania zamieszczone na stronie Olimpiady.

I takie właśnie rozwiązanie znalazło się w pracach wielu uczestników zawodów. Niektórzy jednak popełniali w swoim rozumowaniu następujący błąd: wnioskowali, że *obie* liczby a i b są podzielne przez 5 *jedynie* na podstawie podzielności iloczynu ab tych liczb przez $25=5\cdot 5$. Oczywiście tak wnioskować nie można, bo np. dla $a=1$ i $b=175$ iloczyn ab jest liczbą podzielną przez 25 (a nawet przez 175), gdy tymczasem liczba a przez 5 podzielna nie jest. Jeśli zatem chcemy udowodnić, że *obie* liczby a i b są podzielne przez 5, musimy w swoim rozumowaniu wykorzystać nie tylko to, że iloczyn ab jest podzielny przez 25, ale także to, że suma $a+b$ jest podzielna przez 5.

Zadanie 2.

W pewnym turnieju uczestniczyło 6 drużyn. Każda drużyna rozegrała z każdą inną dokładnie jeden mecz. Za zwycięstwo w meczu drużyna otrzymywała 3 punkty, za porażkę 0 punktów, a za remis 1 punkt. Po turnieju okazało się, że suma punktów zdobytych przez wszystkie drużyny wynosi 41. Wykaż, że istnieją takie cztery drużyny, z których każda co najmniej jeden raz zremisowała.

Zauważmy, że łącznie rozegrano 15 meczów; można je po prostu wypisać lub przeprowadzić rozumowanie ogólne: każda z 6 drużyn rozegrała 5 meczów, stąd iloczyn $6\cdot 5=30$. Jednak w ten sposób każdy mecz policzyliśmy dwukrotnie, dlatego liczba meczów wynosi 15. Ogólnie, gdyby w turnieju uczestniczyło n drużyn, to rozegrałyby łącznie $\frac{1}{2}n(n-1)$ meczów.

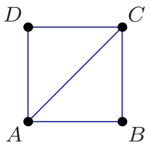
Teraz zauważmy, że jeśli mecz zakończył się wygraną którejś drużyny, to obie dostały za ten mecz łącz-

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

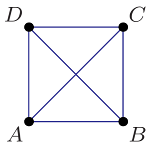
nie 3 punkty, a w przypadku remisu tylko 2 punkty, czyli o jeden punkt mniej. Gdyby zatem wszystkie mecze zakończyły się wygraną jednej z drużyn, to suma wszystkich uzyskanych punktów wyniosłaby 45. W naszym turnieju suma była o 4 punkty mniejsza, zatem 4 mecze musiały zakończyć się remisem.

Odtąd główna trudność zadania polegała na zrozumieniu, że nie pytają nas o liczbę *meczów* zakończonych remisem, ale o liczbę *drużyn*, które zremisowały. Wielu zawodników bez żadnego wyjaśnienia pisało w tym miejscu, że skoro 4 mecze zakończyły się remisem, to co najmniej 4 drużyny zremisowały. Nie jest to pełne rozwiązanie zadania. Dlaczego? Popatrzmy na kilka wariantów naszego problemu.

Gdyby suma wszystkich punktów wynosiła 40, to rozumując podobnie jak wyżej stwierdzilibyśmy, że 5 meczów zakończyło się remisem. Nie oznacza to jednak, że zremisowało co najmniej 5 drużyn. Wystarczyłyby tylko 4 takie drużyny — A, B, C i D, między którymi remisem zakończyły się mecze zaznaczone na rysunku 1.



rys. 1



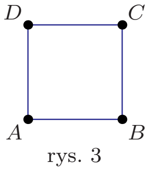
rys. 2

Gdyby suma wszystkich punktów wynosiła 39, to 6 meczów zakończyłoby się remisem, choć nadal tylko 4 drużyny mogłyby zremisować, co ilustruje z kolei rysunek 2.

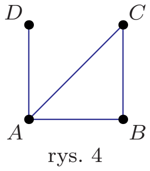
Jednakże, gdyby suma wszystkich punktów wynosiła 38, to remisów w turnieju byłoby 7 i wtedy co najmniej 5 drużyn musiałoby zremisować choć raz. Istotnie, gdyby drużyn tych było tylko 4, to — ponieważ jedynie mecze między nimi mogły zakończyć się remisem — liczba remisów nie przekroczyłaby liczby wszystkich meczów między tymi drużynami, czyli $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$, co przeczy temu, że remisów jest 7.

Widzimy zatem, że liczba remisów i liczba drużyn, które zremisowały, są dwiema zupełnie innymi wielkościami, które akurat dla liczby 4 są równe. Nie jest to jednak reguła i nie można bez uzasadnienia twierdzić, że 4 remisy oznaczają co najmniej 4 drużyny, które zremisowały — takie rozwiązania były uznawane za niekompletne.

Na zakończenie wspomnę o jeszcze jednej kwestii. Można uzasadnić, że są dwie sytuacje, w których dokładnie 4 drużyny zremisowały. Jeśli drużyny oznaczymy literami A, B, C i D, to remisy między nimi mogłyby wyglądać następująco (rys. 3, 4):



rys. 3



rys. 4

Powyższe sytuacje są różne; w pierwszej każda drużyna zremisowała dokładnie 2 razy, w drugiej drużyna A zremisowała 3 razy, a drużyna D tylko raz. Niektórzy zawodnicy pisali, że tylko w jednym przypadku można znaleźć cztery drużyny z czterema remisami i wskazywali jedną z tych sytuacji. Jeden zgubiony przypadek dowodzi, że nie wszystkie konfiguracje zostały rozważone i pozostaje wątpliwość, czy nie pominięto również sytuacji, w której występują tylko 3 drużyny remisujące. Jeśli więc twierdzimy, że jakaś konfiguracja jest jedyna, powinniśmy się chwilkę zastanowić, czy tak rzeczywiście jest, a przede wszystkim dlaczego tak jest. I to wyjaśnienie powinno się znaleźć w pracy.

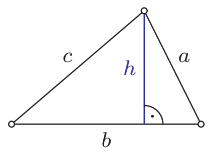
Zadanie 3.

Czy istnieje taki trójkąt o bokach długości a, b, c, którego pole jest równe $\frac{1}{4}(ab+bc)$? Odpowiedź uzasadnij.

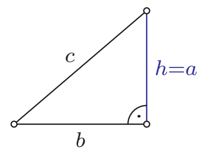
Niech h będzie wysokością trójkąta opuszczoną na bok długości b. Wówczas pole P trójkąta możemy wyrazić na dwa sposoby:

$$P=\frac{bh}{2} \quad \text{oraz} \quad P=\frac{ab+bc}{4},$$

skąd bez trudu dostajemy równość $a+c=2h$. Zauważmy jednak, że w dowolnym trójkącie zachodzi $a\geqslant h$ i $c\geqslant h$ (zob. rys. 5 dla trójkąta ostrokątnego). Zatem dodając stronami te nierówności, uzyskujemy $a+c\geqslant 2h$. Ale równość $a+c=2h$ oznaczałaby, że przed dodaniem stronami też mielibyśmy równości: $a=h$ i $c=h$. Ta sytuacja jest jednak niemożliwa, bowiem w przeciwnym razie oba kąty przy boku b tego trójkąta byłyby proste. W każdym trójkącie musi być zatem $a+c>2h$, wobec czego opisany w treści zadania trójkąt nie istnieje.



rys. 5



rys. 6

Niektórzy zawodnicy upraszczali sobie życie pisząc, że spełnione są *jednocześnie obie* nierówności $a>h$ oraz $c>h$. Wtedy zależność $a+c>2h$ dostajemy natychmiast, dodając te nierówności stronami. Tymczasem nie jest prawdą, że w *każdym* trójkącie $a>h$ oraz $c>h$. Uczestnicy, którzy tak twierdzili, pomijali w swoim rozumowaniu trójkąty prostokątne, o kącie prostym znajdującym się naprzeciwko boku a lub boku c (rys. 6). Takie rozwiązania były więc uznawane za niekompletne.

Na koniec jeszcze jedna ciekawostka. W rozwiązaniu wykorzystaliśmy wzór na pole trójkąta $P=\frac{1}{2}bh$. Lecz kto taki wzór kiedykolwiek widział? We wszystkich podręcznikach, tablicach, zbiorach zadań widnieje przecież wzór $P=\frac{1}{2}ah$. Wielu zawodników korzystało z niego, zapisując równanie

$$\frac{ah}{2}=\frac{ab+bc}{4}.$$

Mimo niezwykłej czasem pomysłowości przekształcania równości $2ah=ab+bc$, próby te nie prowadziły do sukcesu...

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb nieujemnych i nie większych od 1, dla których spełniona jest równość $a+b+c=ab+bc+ca$.

Wielu zawodników wykonało zasadniczą część rozumowania, która rozpoczyna się od przekształcenia różnicy lewej i prawej strony:

$$(a+b+c)-(ab+bc+ca)=a(1-b)+b(1-c)+c(1-a).$$

Załóżmy, że wszystkie liczby a, b i c są różne od 0 i różne od 1. Wtedy liczby a, $1-b$, b, $1-c$, c i $1-a$ są dodatnie,

a więc
$$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)>0\,,$$
skąd wynika, że równość z treści zadania nie zachodzi.

Teraz należy zająć się przypadkiem, w którym przyjęte przez nas założenie: *wszystkie liczby a, b i c są różne od 0 i różne od 1*, nie jest spełnione. W tym miejscu wielu zawodników popełniło błąd logiczny.

Przyjrzyjmy się naszemu założeniu; mówi ono, że każda z trzech liczb a, b i c spełnia warunek: jest różna od zera i od jedynki. Oznaczmy ten warunek literą W. Mamy zatem zdanie: *każda* z rozważanych liczb spełnia warunek W. Zaprzeczeniem takiego zdania jest: *któraś* z rozważanych liczb nie spełnia warunku W. Wielu zawodników natomiast rozważało jako zaprzeczenie o wiele mniej ogólną sytuację: *każda* z rozważanych liczb nie spełnia warunku W, czyli *wszystkie* liczby a, b i c są równe 0 lub 1.

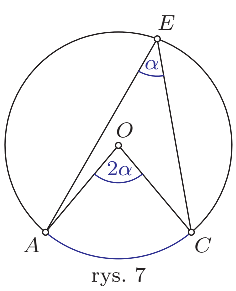
Niektórzy wręcz rozumieli ten ostatni warunek następująco: *wszystkie liczby są równe 0 lub wszystkie liczby są równe 1*. Ogranicza on jeszcze mocniej ogólność rozumowania. Oczywiście obie trójki $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ spełniają daną równość i okazuje się, że rzeczywiście są one jedynymi rozwiązaniami zadania.

Może się więc wydawać, że zawodnicy, którzy w taki właśnie sposób doszli do rozwiązania, rozwiązali zadanie poprawnie. Po drodze popełnili jednak poważny błąd logiczny; jego istota matematyczna sprowadza się do nieuzasadnionego wykluczenia przypadku, w którym na przykład dokładnie jedna liczba a, b lub c jest równa zeru, a pozostałe są dowolne. Pominięte przypadki nie są łatwe do przeanalizowania i stanowią istotną część pełnego rozwiązania zadania.

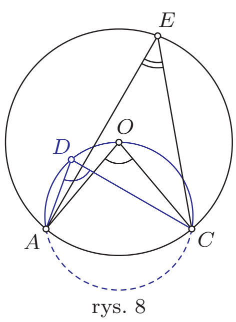
Zadanie 5.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym
$$\sphericalangle DAB+\sphericalangle BCD=\sphericalangle ABC\,.$$
Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykaż, że punkt O jest jednakowo odległy od prostych AD i CD.

Przypomnijmy najpierw twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym, w przypadku łuku krótszego od półokręgu. Przypuśćmy, że kąt AEC, wpisany w okrąg o środku O, jest oparty na łuku AC, krótszym od półokręgu (rys. 7). Na tym samym łuku oparty jest więc kąt środkowy AOC. Wówczas spełniona jest zależność $\sphericalangle AOC=2\sphericalangle AEC$.



rys. 7



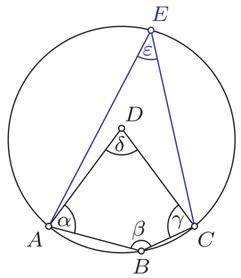
rys. 8

Zapewne wielu zawodników sądziło, że prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne: jeśli punkt D leży wewnątrz danego okręgu oraz $\sphericalangle ADC=2\sphericalangle AEC$ (rys. 8), to punkt D pokrywa się ze środkiem O tego okręgu. Nie jest to prawda — dowolny punkt D leżący na łuku AOC okręgu opisanego na trójkącie ACO spełnia tę równość. Istotnie: z przytoczonego wcześniej twierdzenia wynika, że dwa kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe. Zatem stosując tę własność dla łuku AC (nie zawierającego punktu O) okręgu opisanego na trójkącie ACO, uzyskujemy
$$\sphericalangle ADC=\sphericalangle AOC=2\sphericalangle AEC\,.$$
Jednak punkt D nie pokrywa się z punktem O. Zatem twierdzenie odwrotne do twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym nie jest prawdziwe.

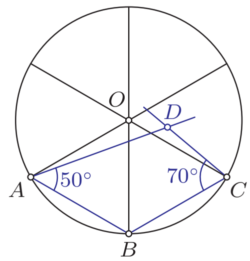
Przejdźmy teraz do treści zadania 5. Opiszmy okrąg na trójkącie ABC i wybierzmy na łuku AC (nie zawierającym punktu B) tego okręgu dowolny punkt E. Następnie oznaczmy kąty jak na rysunku 9.

Ponieważ czworokąt $ABCE$ jest wpisany w okrąg, więc $\varepsilon=180^\circ-\beta$. Następnie, zgodnie z treścią zadania mamy równość $\alpha+\gamma=\beta$. Zatem
$$\delta=360^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)=360^\circ-2\beta=2\cdot(180^\circ-\beta)=2\varepsilon.$$
Teraz wielu uczestników używało fałszywego twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym, wnioskując z powyższej równości pokrywanie się punktów D i O. Teza zadania jest wówczas oczywista.

Popełniony błąd w rozumowaniu nie jest jeszcze dowodem na to, że hipoteza „$O=D$” jest fałszywa: być może da się znaleźć inne, poprawne rozumowanie, które prowadzi do takiego wniosku. Aby się zatem przekonać, że takiego rozumowania nie ma i istotnie są czworokąty spełniające warunki zadania, w których $O\neq D$, wykonajmy starannie następującą konstrukcję.



rys. 9



rys. 10

Zacznijmy od podzielenia koła o środku O na 6 jednakowych wycinków (rys. 10). Wybierzmy następnie trzy kolejne punkty A, B i C podziału okręgu. Kąt ABC wynosi 120°. Poprowadźmy teraz półproste z punktów A i C tak, by tworzyły z odcinkami AB i CB odpowiednio kąty 50° i 70°, jak na rysunku 10. Niech punkt D będzie punktem przecięcia tych półprostych.

Czworokąt $ABCD$ spełnia warunki zadania, gdyż $\sphericalangle ABC=120^\circ$ oraz $\sphericalangle BAD+\sphericalangle BCD=50^\circ+70^\circ=120^\circ$. Jednocześnie widać, że punkty O (środek okręgu opisanego na trójkącie ABC) i D nie pokrywają się. Dzięki starannemu rysunkowi nie wpadliśmy zatem w opisaną wcześniej pułapkę.

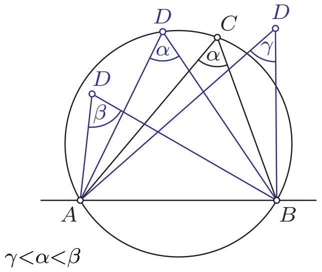
Niedokładny rysunek może zmylić w sposób bardzo subtelny, o czym przekonamy się na przykładzie następującego rozumowania.

Narysujmy czworokąt $ABCD$ spełniający warunki zadania oraz okrąg opisany na trójkącie ABC i oznaczmy kąty (rys. 9):
$$\alpha=\sphericalangle BAD,\quad \beta=\sphericalangle ABC,\quad \gamma=\sphericalangle BCD,\quad \delta=\sphericalangle ADC.$$
Tak jak wyżej wykazujemy, że $\delta=2\cdot(180^\circ-\beta)>180^\circ-\beta$, skąd wynika, że punkt D leży wewnątrz okręgu opi-

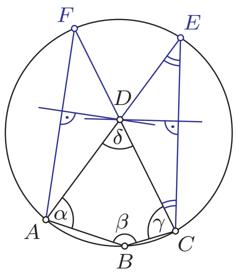
sanego na trójkącie ABC. Korzystamy w tym miejscu z następującego twierdzenia, które warto znać:

Przypuśćmy, że punkty A, B i C leżą na okręgu k, a punkt D znajduje się po tej samej stronie prostej AB, co punkt C (rys. 11). Wówczas:

- *jeśli $\measuredangle ADB = \measuredangle ACB$, to D leży na okręgu k;*
- *jeśli $\measuredangle ADB > \measuredangle ACB$, to D leży wewnątrz okręgu k;*
- *jeśli $\measuredangle ADB < \measuredangle ACB$, to D leży na zewnątrz okręgu k.*



rys. 11



rys. 12

Wracamy do zadania 5. Przedłużmy boki AD i CD do przecięcia z okręgiem i otrzymane punkty przecięcia oznaczmy odpowiednio przez E i F (rys. 12).

Czworokąt $ABCE$ jest wpisany w okrąg, skąd uzyskujemy $\measuredangle DEC = 180° - \beta$. Ponieważ kąt δ jest kątem zewnętrznym trójkąta CED, więc $\delta = \measuredangle DEC + \measuredangle DCE$. Jednocześnie $\delta = 2\cdot(180° - \beta)$, zatem $\measuredangle DCE = 180° - \beta$. Wynika z tego, że $\measuredangle DCE = \measuredangle DEC$, czyli $CD = ED$. Punkt D jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego CED, a więc leży na symetralnej podstawy CE.

W ten sam sposób dowodzimy, że punkt D leży także na symetralnej odcinka AF. Punkt D jest zatem punktem przecięcia symetralnych dwóch różnych cięciw okręgu, czyli środkiem tego okręgu, a zatem punkty O i D pokrywają się.

Oczywiście, powyższy dowód musi zawierać błąd, gdyż jak wiemy teza „$O = D$” jest fałszywa. Proponuję Czytelnikom znalezienie luki i zmodyfikowanie rozumowania tak, aby otrzymać prawidłowe rozwiązanie zadania. Odpowiedź podam w następnym numerze *Kwadratu*.

Jak widzimy, niektóre zadania wymagały bardzo starannego wykończenia i przeprowadzenia rozumowania wolnego od luk, nieścisłości czy błędów. Moje refleksje mają pomóc przyszłym Olimpijczykom w takim właśnie starannym wykończeniu rozwiązań i mam nadzieję, że z każdym rokiem nieścisłości będzie mniej.

Wojciech Guzicki

Chochlik Olimpijski

Wierzymy, że podobnie jak dziennikarze mają chochlika drukarskiego, tak uczestnicy zawodów matematycznych mają złośliwego chochlika olimpijskiego, odpowiadającego za ich urocze potknięcia podczas redakcji rozwiązań. Poniżej zamieszczone są fragmenty prac z zeszłorocznej i tegorocznej edycji OMG, które wywołały szczególne rozbawienie wśród sprawdzających – mamy nadzieję, że zasłużą również na uśmiech Czytelników.

- Pola trójkątów ABC i XYZ mają jednakową długość podstawy.
- Nie może być tak, że nie ma takiej sytuacji, ponieważ nie jest możliwy taki układ wygranych/przegranych, aby nie było takiej trójki.
- Wiemy, że styczna do okręgu jest prostopadła do jednego z jego promieni.
- Kąty wierzchołkowe są równe, co wynika z równości między kątem wpisanym i dopisanym.
- Wyjąłem z pięciokąta czworościan $ABDE$.
- Trójkąty te są podobne, zatem ich podstawy również.
- Trójkąty są tworzone przez dwie przekątne i jedną ścianę.
- Korzystam z cechy przystawania: bok-kąt.
- Płaszczyzna styczna do tych kul istnieje, bowiem trzy kule dają razem sześć promieni.
- (...) więc równość nie zachodzi (to jest zachodzi, ale nie jest równością).
- Te liczby nie mogą być również pierwiastkami, ponieważ mnożąc pierwiastki uzyskujemy nowe, zaś dodając — nic z nimi nie możemy więcej zrobić.
- Jeśli suma trzech liczb dodatnich jest zerem, to każda z nich jest zerem.

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Nierówność trójkąta

5. Odbij punkt P symetrycznie względem ramion kąta, a następnie połącz odcinkiem tak otrzymane punkty. Punkty przecięcia tego odcinka z ramionami kąta są szukanymi punktami A i B.

Aby wykazać, że tak skonstruowane punkty stanowią rozwiązania zadania, wybierz dwa dowolne punkty A' i B' na ramionach tego kąta i uzasadnij, że obwód trójkąta $A'B'P$ jest większy lub równy od obwodu trójkąta ABP.

6. Niech α będzie miarą danego kąta. Obróć punkt P wokół punktu O o kąt α i połącz uzyskany punkt odcinkiem z punktem P. Punkt przecięcia tego odcinka z ramieniem kąta jest jednym z szukanych punktów X, Y. Drugi z tych punktów wyznacz w oparciu o warunek $OX = OY$.

Aby wykazać, że tak skonstruowane punkty stanowią rozwiązania zadania, wybierz na ramionach kąta dowolne dwa punkty X' i Y', dla których $OX' = OY'$ i uzasadnij, że $PX' + PY' \geqslant PX + PY$.

7. Niech A' będzie obrazem punktu A w symetrii względem prostej DM, a B' obrazem punktu B w symetrii względem prostej CM. Uzasadnij, że trójkąt $A'B'M$ jest równoboczny.

8. Niech ADK i CBL będą trójkątami równobocznymi zbudowanymi po zewnętrznej stronie danego prostokąta. Punkty przecięcia odcinka KL z okręgami opisanymi na trójkątach DAK i BCL są szukanymi punktami P i Q.

Aby wykazać, że tak skonstruowane punkty stanowią rozwiązania zadania, wybierz dowolne dwa punkty P' i Q' wewnątrz prostokąta i uzasadnij odpowiednią nierówność. W tym miejscu może okazać się przydatne zadanie 4.

Tożsamość Diofantosa

4. Wykorzystaj tożsamość (3) dla $n = -1$.

5. $3 = 2^2 - 1^2$.

6. Uzasadnij najpierw, że kwadrat liczby parzystej dzieli się przez 4, a kwadrat liczby nieparzystej przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1.

7. Uzasadnij najpierw, że gdyby $231 = 2a^2 + 3b^2$, to liczba a musiałaby być podzielna przez 3, po czym podstaw $a = 3c$, gdzie c jest pewną liczbą całkowitą. Dzieląc przez 3 otrzymasz równanie $77 = 6c^2 + b^2$. Wykorzystaj teraz fakt, że kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3 daje resztę 0 lub 1.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski (redaktor naczelny), Urszula Swianiewicz, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Adres do korespondencji: `kwadrat.omg@gmail.com`