Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 5
czerwiec 2012

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Sztuczka z iloczynem

W teorii liczb często poszukuje się rozwiązań równania w zbiorze liczb całkowitych (innymi słowy, rozwiązuje się *równanie diofantyczne*). Istnieje wiele metod wykorzystywanych w tym celu — jedną z nich przedstawię w niniejszym artykule. Polega ona na sprowadzeniu rozważanej równości do postaci

$$(\dots)(\dots)=k, \qquad (1)$$

gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Wówczas wszystkie możliwe rozkłady liczby k na iloczyn dwóch liczb całkowitych wyznaczają nam serię układów równań, których rozwiązanie pozwala rozwikłać problem. Powstaje pytanie, jak i kiedy można doprowadzić równanie do takiej postaci? W niektórych przypadkach warto pamiętać prostą tożsamość

$$(x+a)(y+b)=xy+bx+ay+ab, \qquad (2)$$

gdyż zdarza się, że równanie ma bardzo zbliżoną postać do prawej strony powyższej zależności i korzystając z niej możemy „zwinąć” pewne wyrażenia, jak w równości (1). Zazwyczaj rolę x i y grają zmienne niewiadome, natomiast rolę a i b — pewne konkretne liczby. Popatrzmy na kilka przykładów.

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie $xy+1=x+y$.

Rozwiązanie

Przenosząc x i y na lewą stronę, uzyskujemy

$$xy-x-y+1=0.$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy postać prawej strony tożsamości (2) dla $a=b=-1$. Zatem możemy zapisać rozpatrywane równanie w postaci

$$(x-1)(y-1)=0.$$

Lewa strona jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno wyrażenie w nawiasach jest równe 0. To ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x=1$ lub $y=1$. Wobec tego wszystkie rozwiązania (x,y) danego równania są postaci $(1,s)$ lub $(t,1)$, gdzie s i t są dowolnymi liczbami całkowitymi.

W powyższym przykładzie wystarczyło uporządkować wyrazy, aby dostać wyrażenie z równości (2). Zazwyczaj jednak po takim wstępnym przekształceniu nie dostajemy całej prawej strony tej tożsamości. Wówczas należy do obu stron równania dodać brakującą część, co ilustruje nasz kolejny przykład.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie $xy=x+y$.

Rozwiązanie

Przenosząc wszystko na lewą stronę, dostajemy

$$xy-x-y=0.$$

W odróżnieniu od poprzedniego przykładu, w tym brakuje jedynki, która posłużyłaby nam do zapisania lewej strony jako iloczynu dwóch wyrażeń algebraicznych. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, aby tę jedynkę dodać do obu stron, otrzymując:

$$xy-x-y+1=1.$$

Teraz możemy „zwinąć” wyrażenie po lewej stronie:

$$(x-1)(y-1)=1.$$

Iloczyn dwóch liczb całkowitych wynosi 1 wtedy i tylko wtedy, gdy oba czynniki tego iloczynu są równe 1 lub oba są równe -1. To prowadzi do dwóch możliwych układów równań

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-1. \end{cases}$$

Stąd $(x,y)=(2,2)$ lub $(x,y)=(0,0)$.

Uzyskaliśmy zatem następujący sposób postępowania: najpierw sprowadzamy badane równanie do postaci

$$xy+bx+ay=c.$$

Następnie zapisujemy je w formie:

$$xy+bx+ay+ab=c+ab,$$

którą, zgodnie z równością (2), możemy zapisać jako

$$(x+a)(y+b)=c+ab.$$

Teraz możliwe rozkłady liczby $c+ab$ na iloczyn dwóch liczb całkowitych dają nam układy równań. Po ich rozwiązaniu uzyskujemy wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające dane równanie.

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie $2xy+3x+y=-1$.

Rozwiązanie

W tym przykładzie pojawił się współczynnik — różny od 1 — przy wyrazie xy, co uniemożliwia nam skorzystanie z tożsamości (2). Powinniśmy zatem zmodyfikować poprzednie rozumowanie.

Zauważmy, że do samego przedstawienia wyrażenia jako iloczynu dwóch innych wyrażeń nie potrzebowaliśmy tego, by liczby a i b były całkowite. Innymi słowy, tożsamość (2) jest słuszna dla *dowolnych* liczb a i b, niekoniecznie całkowitych.

Zapiszmy zatem dane równanie w postaci

$$xy+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y=-\frac{1}{2}.$$

Wyrażenie po lewej stronie posiada już znaną nam postać, możemy więc skorzystać z wcześniejszych przekszt-

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

tałceń:

$$xy+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Mnożąc teraz obie strony równania przez 4 w celu usunięcia ułamków, dostajemy:

$$(2x+1)(2y+3)=1,$$

a to już potrafimy rozwiązać poznanymi wcześniej metodami. Ostatecznie otrzymujemy dwa rozwiązania wyjściowego równania: $(x,y)=(0,-1)$ oraz $(x,y)=(-1,-2)$.

Na koniec jak zwykle kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie

a) $xy=x+2y$,
b) $xy=3x+5y+7$,
c) $3xy-x+2y=1$,
d) $2xy=x+y$.

Zadanie 5.

Dana jest liczba pierwsza p. Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}.$$

Michał Kieza

Pierwsze koty za płoty ;)

W dniach 20–23 maja 2012 r. w Mszanie Dolnej odbyły się I Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów (*CPS Juniorów*). Uczestniczyło w nich po sześciu zawodników w wieku gimnazjalnym z Czech, Polski i Słowacji. Polska delegacja została wyłoniona na podstawie wyników tegorocznej edycji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. W jej skład weszli:

- Anna Czerwińska (ZSO nr 7 w Szczecinie),
- Konrad Majewski (Gimnazjum nr 42 w Warszawie),
- Marcin Michorzewski (ZSO nr 7 w Szczecinie),
- Konrad Paluszek (Gimnazjum nr 42 w Warszawie),
- Oskar Szymański (Katolickie Gimnazjum im. św. Stanisława Kostki w Kielcach),
- Jan Tabaszewski (ZS nr 51 w Warszawie).

W poniedziałek 21 maja miały miejsce zawody indywidualne. W czasie 3,5 godziny zawodnicy rozwiązywali 5 zadań. Każde z nich oceniane było w skali od 0 do 5 punktów. Zwyciężył Konrad Majewski, rozwiązując bezbłędnie wszystkie zadania i zdobywając maksymalną liczbę punktów.

We wtorek 22 maja odbyły się zawody drużynowe. Zawodnicy zostali podzieleni na trzyosobowe zespoły — po jednym uczniu z każdego kraju. Drużyny wybrano metodą losowania. Każda z nich w ciągu 5 godzin rozwiązywała 6 zadań. Dodatkową trudność stanowił fakt, że treści zadań napisane były w różnych językach: dwa po czesku, dwa po polsku i dwa po słowacku. Ponadto rozwiązania zadań, których treść napisana była po czesku, należało zredagować w języku słowackim itd. Zawodnicy poradzili sobie z tym bardzo dobrze. Zwyciężyła drużyna w składzie: Ema Krakovská (Słowacja), Viktor Něměček (Czechy) i Konrad Majewski (Polska), zdobywając 29 punktów na 30 możliwych.

Każdego dnia po zawodach odbywało się wspólne omówienie zadań. Zawodnicy prezentowali przy tablicy swoje rozwiązania we własnym języku, co nie stanowiło istotnej bariery dla uczestników z innych krajów. Po omówieniu zadań uczniowie mieli okazję spędzić wspólnie czas i lepiej się poznać, grając w siatkówkę i bilard.

Chociaż Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów odbyły się w tym roku po raz pierwszy, to tradycja rywalizacji matematycznej naszych trzech krajów jest znacznie dłuższa. Sięga ona czerwca 2001 roku. Czesi postanowili wówczas zaprosić Polaków do udziału we wspólnych zawodach, które dotychczas odbywały się jedynie między drużynami czeską a słowacką. W ten sposób zainicjowane zostały Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne. Uczestniczą w nich każdego roku uczniowie szkół ponadgimnazjalnych, którzy kilka tygodni później będą reprezentować swoje kraje na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej.

Kolejne zawody *CPS Juniorów* znów odbędą się w Mszanie Dolnej. Wezmą w nich udział najlepsi zawodnicy przyszłorocznej edycji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

Joanna Ochremiak — przewodnicząca delegacji polskiej

O n kolejnych liczbach

Wśród n kolejnych liczb całkowitych istnieje taka, która dzieli się przez n. Ta prosta obserwacja ma całkiem interesujące konsekwencje. W szczególności, iloczyn n kolejnych liczb całkowitych dzieli się przez n. Przyjrzyjmy się kilku przykładom.

Zadanie 1.

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n, liczba n^2-n jest parzysta.

Rozwiązanie

Zapiszmy dane wyrażenie w postaci $n(n-1)$. Ponieważ wśród dwóch kolejnych liczb całkowitych któraś dzieli się przez 2, to dana liczba jest parzysta.

Zadanie 2.

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n, liczba n^3-n jest podzielna przez 6.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1).$$

Otrzymaliśmy tym razem iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych. Jedna z nich dzieli się przez 3, a zatem cały iloczyn również.

Ponieważ największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 równa się 1 (innymi słowy: liczby 2 i 3 są *względnie pierwsze*), więc pozostaje dowieść, że dana liczba jest podzielna przez 2. Jednak z poprzedniego zadania wiemy już, że liczba $n(n-1)$ dzieli się przez 2 — tym bardziej liczba $(n-1)n(n+1)$.

Kolejny przykład, choć wygląda podobnie, jest nieco trudniejszy.

Zadanie 3.

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n, liczba n^5-n jest podzielna przez 30.

Rozwiązanie

Ponieważ

$$n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)=$$
$$=(n-1)n(n+1)(n^2+1),$$

to z poprzedniego zadania wynika, że dana liczba jest podzielna przez 6. Ponieważ liczby 5 i 6 są względnie pierwsze, więc aby rozwiązać zadanie, pozostaje uzasadnić podzielność badanego wyrażenia przez 5.

Wyrażenie w ostatnim nawiasie utrudnia nam napisanie n^5-n w postaci iloczynu pięciu kolejnych liczb całkowitych. Możemy jednak przekształcić je w następujący sposób:

$$n^2+1=n^2-4+5=(n-2)(n+2)+5.$$

Dzięki temu otrzymujemy

$$n^5-n=(n-1)n(n+1)\big((n-2)(n+2)+5\big)=$$
$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1).$$

Pierwszy składnik powyższego wyrażenia jest podzielny przez 5, bowiem jest to iloczyn pięciu kolejnych liczb całkowitych. Drugi składnik jest także podzielny przez 5, a zatem całe wyrażenie również.

Kolejne zadanie można rozwiązać, analizując reszty z dzielenia liczby n przez 3. Poniżej przedstawimy inne rozumowanie, nawiązujące do omawianej metody.

Zadanie 4. (V OMG, zawody stopnia drugiego)

Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby

$$n^2+n+1 \quad \text{oraz} \quad n^2+n+3$$

są pierwsze.

Rozwiązanie

Dla $n=1$ otrzymujemy

$$n^2+n+1=3 \quad \text{oraz} \quad n^2+n+3=5,$$

zatem obie liczby są pierwsze. Udowodnimy, że $n=1$ jest jedyną liczbą, spełniającą warunki zadania.

W tym celu wykażemy, że jeśli $n>1$, to któraś z rozważanych liczb jest podzielna przez 3. A ponieważ

$$n^2+n+3>n^2+n+1>3,$$

więc któraś z powyższych dwóch liczb nie może być liczbą pierwszą.

Zauważmy, że wśród trzech kolejnych liczb

$$n^2+n+1, \quad n^2+n+2, \quad n^2+n+3$$

któraś dzieli się przez 3. Wystarczy zatem wykazać, że dla żadnej liczby całkowitej $n>1$, liczba n^2+n+2 nie dzieli się przez 3.

Wśród trzech kolejnych liczb całkowitych n, $n+1$ oraz $n+2$, dokładnie jedna dzieli się przez 3. Jeśli jest nią n lub $n+1$, to liczba

$$n^2+n+2=n(n+1)+2$$

nie może dzielić się przez 3. Jeśli zaś podzielna przez 3 jest liczba $n+2$, to liczba n, a co za tym idzie także liczba n^2, nie jest podzielna przez 3. Wtedy również liczba

$$n^2+n+2=n^2+(n+2)$$

nie może być podzielna przez 3.

Na koniec jak zwykle kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5.

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n, co najmniej jedna z liczb n^4-8n, n^4+8n jest podzielna przez 3.

Zadanie 6.

Udowodnij, że dla żadnej liczby całkowitej n, liczba $(n+1)^3-n$ nie dzieli się przez 6.

Zadanie 7.

Wykorzystując równości

$$n^2+n+1=(n-2)(n+3)+7,$$
$$n^2-n+1=(n+2)(n-3)+7,$$

wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n, liczba n^7-n jest podzielna przez 7.

Uwaga

Niektóre z powyższych zadań są szczególnymi przypadkami tzw. *małego twierdzenia Fermata: Jeśli p jest liczbą pierwszą, to dla każdej liczby całkowitej n, liczba n^p-n jest podzielna przez p.*

Michał Kieza

Reprezentacja Polski znów zwycięża!

W dniach 10–16 kwietnia 2012 r. w Cambridge w Wielkiej Brytanii odbyła się I Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt (European Girls' Mathematical Olympiad, EGMO). W skład delegacji polskiej, wyłonionej na podstawie wyników zeszłorocznej Olimpiady Matematycznej, weszły:

- Agata Latacz (V LO w Krakowie),
- Barbara Mroczek (XIV LO w Warszawie),
- Anna Olech (XIV LO w Warszawie),
- Anna Siennicka (XIV LO w Warszawie).

Wszystkie nasze reprezentantki były w przeszłości laureatkami Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

Polki, z wynikiem 122 punktów, zwyciężyły w klasyfikacji drużynowej zawodów. Dziewczyny świetnie poradziły sobie także w rywalizacji indywidualnej. Basia wywalczyła złoty medal, a obie Anie i Agata – srebro.

Polskiej delegacji udało się pokonać reprezentacje 18 krajów, wśród nich Rumunię, która z wynikiem 121 punktów uplasowała się na drugim miejscu, Ukrainę (117 punktów) i Stany Zjednoczone (110 punktów). W zawodach wzięły ponadto udział delegacje z Arabii Saudyjskiej, Belgii, Bułgarii, Finlandii, Holandii, Indonezji, Irlandii, Luksemburga, Łotwy, Serbii, Szwajcarii, Turcji, Węgier, Wielkiej Brytanii oraz Włoch.

Sukces naszych dziewcząt opisała *Gazeta Wyborcza* na portalu `wyborcza.pl`. Minister Edukacji Narodowej Krystyna Szumilas oraz podsekretarz stanu w MEN Joanna Berdzik zaprosiły zwyciężczynie do swoich gabinetów, aby im osobiście pogratulować. Dziewczyny opowiadały o swoich wrażeniach z zawodów również w porannym programie *Kawa czy herbata?* w TVP1.

Jest to już trzecie z kolei zwycięstwo uzdolnionej matematycznie polskiej młodzieży w ostatnim czasie, po wygranej na Środkowoeuropejskiej Olimpiadzie Matematycznej (MEMO 2011) oraz Olimpiadzie Matematycznej Państw Bałtyckich (*Baltic Way* 2011).

Olimpiada EGMO odbyła się w Murray Edwards College, który stanowi część Uniwersytetu Cambridge. Same zawody miały miejsce 12 i 13 kwietnia. Każdego dnia zawodniczki w ciągu 4,5 godziny rozwiązywały 4 zadania. Za każde z zadań można było otrzymać od 0 do 7 punktów.

Czas poza zawodami wypełniały zapewnione przez organizatorów atrakcje. Dziewczyny miały okazję popływać łodziami, wziąć udział w zawodach sportowych oraz nauczyć się tradycyjnego tańca – Ceilidh. Szczególnie interesujący okazał się spacer po miejscach w Cambridge związanych z matematyką. Jednym z takich miejsc jest Instytut Matematyczny Izaaka Newtona (Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences), gdzie tablice oraz kreda do rozwiązywania problemów matematycznych znajdują się nawet w toaletach.

Ostatniego dnia uczestniczki Olimpiady udały się na wycieczkę do Bletchley Park — posiadłości ziemskiej, w której podczas II Wojny Światowej miała swoją siedzibę Rządowa Szkoła Kodów i Szyfrów (Government Code and Cypher School). Pracujący przed laty w Bletchley Park zespół matematyków i kryptologów — wśród których był także „ojciec komputerów” Alan Turing — zajmował się odczytywaniem wiadomości kodowanych przy pomocy Enigmy oraz innych niemieckich maszyn szyfrujących. Miłą niespodziankę sprawiły nam osoby oprowadzające po kompleksie, wielokrotnie podkreślając rolę polskich matematyków w złamaniu szyfru Enigmy.

Obecnie dużą część Bletchley Park stanowi Muzeum Komputerów, gdzie podziwiać można zarówno pierwsze programowalne maszyny cyfrowe, pochodzące z lat czterdziestych XX wieku, jak i najnowsze osiągnięcia techniki komputerowej.

Zawody EGMO odbyły się w tym roku po raz pierwszy. Inicjatywa ich organizacji wyszła od osób skupionych wokół Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, czemu zawody zawdzięczają swój prestiż i wysoki poziom zadań. Pomimo, iż olimpiada adresowana jest do uczennic z krajów europejskich, to spotkała się z zainteresowaniem daleko poza granicami Europy. Dowodzi tego udział w zawodach krajów spoza starego kontynentu. Interesujący jest fakt, że pomysł organizacji olimpiady dla dziewcząt zaczerpnięty został z Chin, gdzie podobne zawody mają już dziesięcioletnią tradycję.

W przyszłym roku Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt odbędzie się w Luksemburgu. Organizatorzy mają nadzieję, że dzięki innowacyjnej formule (rywalizacja samych dziewcząt) oraz wysokiemu poziomowi merytorycznemu, zawody te wpiszą się na stałe w kalendarz najbardziej prestiżowych międzynarodowych zawodów matematycznych.

Joanna Ochremiak
— wiceprzewodnicząca delegacji polskiej

A niechaj narodowie wżdy postronni znają...

Czytelnikom, którzy uznali sztukę pięknego wysławiania się za umarłą, chcielibyśmy zaprezentować treści dwóch odwołań, jakie wpłynęły po zawodach stopnia trzeciego bieżącej edycji Olimpiady. Ich autorem jest **Jacek Rutkowski**, uczeń klasy trzeciej Publicznego Gimnazjum im. ks. Piotra Skargi w Warszawie, laureat tegorocznej OMG.

Odwołanie 1.

Zali Szanowny Sprawdzacz tegoż zadania jeno na pierwszą stronę jego baczył (to jest, rozwiązania)? Albowiem niestety, wprzódy zaledwie błądziłem, iżby rozwiązania tajniki poznać (błądzi wszak człowiek póki dąży!), co nie udawało mi się przez czasu przeciąg długości niebagatelnej, wszelako następniem, jak się zdaje, zadanie rozwiązał, alibo choć w połowie. Wersja druga (dla matematyków, nieradych ksiąg wieków minionych czytujących): Czy naprawdę należy mi się zaledwie zero punktów za zadanie o numerze trzecim? Oczywiście przepraszam, jeśli okazać by się miało, żem bez podstaw list nadesłał!

Odwołanie 2.

Cóż się Waćpaństwu w moim rozwiązaniu zadania czwartego nie podoba? Azalim nie zawarł w tymże treści istotnych, które przyczynić się winny do punktów większej ilości mi przydania? Jeśli wszelakom błąd jakiś uczynił w istocie, przepraszam bardzo za listu owego nadesłanie, wszak tysiące podobnych muszą Szanowni Państwo rozpatrywać. Wersja druga (dla matematyków, nieradych ksiąg wieków minionych czytujących): Czy na pewno mam tylko do połowy zadanie 4?

Jacek, spytany o zgodę na publikację treści powyższych odwołań, napisał:

Słowa nadesłane ku mnie doprawdy wielką mi chlubą! Pozwolenia udzielam, jakżebym inaczej miał uczynić, zważywszy na mą z Olimpiadą zażyłość, spowodowaną równie laureata tytułem honornym uzyskania, jak i radością niepojętą z matematycznego poznania, objawiającego się śród zadań intrygujących nader rozwiązywania, oraz na miłość własną, która woła jakoby z wnętrza duszy mojej, aby sławy słodkie znamiona stały się mojem udziałem, którą to poskromić pragnąwszy, czekam wciąż na czasy ku temu stosowniejsze.

Serdecznie pozdrawiam, odpisujący tak, jako przykazane człekowi, którego odwołanie pragnie się zamieścić przez wzgląd na treść jego urodną.

Z otuchą dla spragnionych barwnej polszczyzny serc oraz nadzieją na lepsze językowe jutro, żegnamy się z naszymi Czytelnikami na okres wakacyjny, życząc przyjemnego wypoczywania!

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Przecinamy graniastosłup

6. a) Uzasadnij, że punkt C jest środkiem każdej z przekątnych C_1C_4, C_2C_5 i C_3C_6.

6. b) Zauważ, że płaszczyzny $A_2A_3B_3B_2$, $A_1A_4B_4B_1$ oraz $A_6A_5B_5B_6$ są równoległe.

6. c) Udowodnij najpierw, że każdy z czworokątów $C_1C_2C_3C$ oraz $CC_2C_3C_4$ jest równoległobokiem.

6. d) Czworokąt $C_1C_2C_3C$ jest równoległobokiem, więc pola trójkątów C_1C_2C i C_3C_2C są równe.

7. Wykorzystaj zadanie 5 z artykułu.

8. Przekształć tezę do postaci

$$(d_1-d_4)(d_1+d_4)+(d_3-d_6)(d_3+d_6)+(d_5-d_2)(d_5+d_2)=0,$$

a następnie wykorzystaj niektóre zadania omówione w artykule.

9. Rozumowanie jest analogiczne do rozwiązania zadania 2 z artykułu.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski (redaktor naczelny), Urszula Swianiewicz, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com