Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

Kwadrat

Nr 19
styczeń 2017

Gazetka Olimpiady Matematycznej Juniorów

ISSN 2300-0708

Honorowi profesorowie

Na łamach *Kwadratu* regularnie donosimy o sukcesach uczestników naszej Olimpiady w rozmaitych konkursach (nie tylko matematycznych!). Te wspaniałe osiągnięcia to nie tylko zasługa zdolności i ciężkiej pracy uczniów, lecz również wysiłku nauczycieli, ustawiających cenne drogowskazy na ścieżce rozwoju, którą podążają ich podopieczni.

Jedną z najbardziej prestiżowych nagród, mających na celu wyróżnienie nauczycieli odnoszących sukcesy na polu (współ)pracy z uczniem, jest *honorowy tytuł profesora oświaty*, przyznawany corocznie najwybitniejszym pedagogom przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.

Miło jest nam poinformować, że wśród 20 osób, którym w dniu 14 października 2016 roku nadany został ów zaszczytny tytuł, znalazł się Waldemar Rożek, przewodniczący Komitetu Okręgowego OMJ w Stalowej Woli.

Tylko 14 nauczycieli matematyki w Polsce może poszczycić się honorowym tytułem profesora oświaty. Aż 6 z nich to przewodniczący (lub byli przewodniczący) Komitetów Okręgowych OMJ. Są to (w nawiasie podano rok przyznania tytułu):

- Wojciech Tomalczyk (2008)
  — Komitet Okręgowy w Gdyni,
- Henryk Pawłowski (2009)
  — Komitet Okręgowy w Toruniu,
- Paweł Kwiatkowski (2014)
  — Komitet Okręgowy w Piotrkowie Trybunalskim,
- Tomasz Szymczyk (2014)
  — Komitet Okręgowy w Bielsku-Białej,
  ogólnopolski koordynator OMJ,
- Jacek Dymel (2015)
  — Komitet Okręgowy w Krakowie,
- Waldemar Rożek (2016)
  — Komitet Okręgowy w Stalowej Woli.

Profesorom oświaty, a przede wszystkim tym zaprzyjaźnionym z OMJ, serdecznie gratulujemy i życzymy zasłużonej satysfakcji ze wspaniałych owoców swojej dydaktycznej pracy.

Dorysujmy środek odcinka

W wielu zadaniach geometrycznych sformułowanie nie odkrywa wszystkich tajemnic rozważanej konfiguracji. Zdarza się, że następstwa warunków zadania nie są widoczne na pierwszy rzut oka. Czasem jednak, aby zobaczyć kluczowe dla rozwiązania zależności, wystarczy *dorysować punkt*.

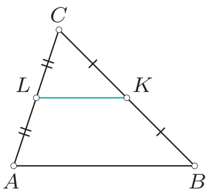
Samo dorysowanie punktu zwykle jednak nie rozwiązuje zadania, ale otwiera drogę do spostrzeżeń zbliżających do znalezienia rozwiązania. W cyklu artykułów „Dorysujmy...” postaramy się przekazać pewne wskazówki dotyczące tego, co warto dorysować i jakie korzyści można z tego odnieść.

W tym numerze zajmiemy się *środkiem odcinka*. Taki punkt często okazuje się przydatny, gdy w rozważanej konfiguracji pojawiają się inne środki odcinków. Dorysowanie kolejnego może bowiem umożliwić skorzystanie z ważnego (choć dość elementarnego) faktu, zwanego *twierdzeniem o linii środkowej w trójkącie*.

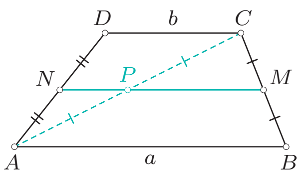
Twierdzenie 1.

W trójkącie ABC punkty K i L są środkami odpowiednio boków BC i AC (rys. 1). Wówczas odcinek KL jest równoległy do boku AB i ma dwa razy mniejszą długość od długości odcinka AB.

Dowód wykorzystuje własności równoległoboków i można go znaleźć w książeczce Waldemara Pompe *Wokół obrotów, przewodnik po geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA (twierdzenie 4.5).



rys. 1



rys. 2

Przyjrzyjmy się, jak zastosowanie powyższego twierdzenia po dorysowaniu środka pewnego odcinka może pomóc w rozwiązywaniu przykładowych zadań.

Zadanie 1.

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach $AB=a$ oraz $CD=b$. Punkty M i N są odpowiednio środkami ramion BC i AD. Wyznacz długość odcinka MN.

Rozwiązanie

Niech P będzie środkiem przekątnej AC (rys. 2). Wówczas z twierdzenia 1 wynika, że pary prostych PM i AB oraz PN i CD są równoległe. Proste AB i CD są równoległe, jako podstawy trapezu, a zatem również proste PM i PN są równoległe. Ponieważ proste te mają punkt wspólny P, więc oznacza to, że się pokrywają, czyli punkt P należy do odcinka MN. Z twierdzenia 1 otrzymujemy ponadto $PM=\frac{1}{2}a$ oraz $PN=\frac{1}{2}b$. Zatem

$$MN = PM + PN = \frac{1}{2}(a+b),$$

co kończy rozwiązanie zadania.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Zadanie 2.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków BC i AD. Udowodnij, że $AB+CD \geqslant 2\cdot MN$. Wykaż ponadto, że równość w tej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy proste AB i CD są równoległe.

Rozwiązanie

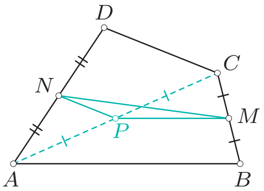
Równość, którą należy udowodnić, można zapisać jako $\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CD \geqslant MN$, co sugeruje dorysowanie punktu, który pozwoli na uzyskanie odcinków o długościach $\frac{1}{2}AB$, $\frac{1}{2}CD$. Podobnie jak w rozwiązaniu poprzedniego zadania, odpowiednim kandydatem na dorysowany punkt P jest środek przekątnej AC (rys. 3).

Korzystając z twierdzenia 1, uzyskujemy równości $PM=\frac{1}{2}AB$, $PN=\frac{1}{2}CD$. Jak widać, dowodzona nierówność przybiera postać

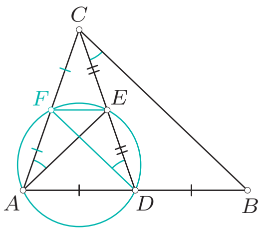
$$PM+PN \geqslant MN,$$

co jest prawdą na mocy nierówności trójkąta MNP.

Równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy punkt P leży na odcinku MN, czyli gdy proste PM i PN są równoległe. Z twierdzenia 1 wiemy, że pary prostych PM i AB oraz PN i CD są równoległe. Równoległość prostych PM i PN jest więc równoważna równoległości prostych AB i CD. Tym samym rozwiązanie jest zakończone.



rys. 3



rys. 4

Zadanie 3. (zawody II stopnia IX OMG)

W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest środkiem odcinka CD. Wykaż, że jeżeli $\sphericalangle CAE=\sphericalangle BCD$, to $AC=CD$.

Rozwiązanie

Pojawiające się w treści zadania punkty D i E są środkami pewnych boków trójkątów ABC i ACD. Trójkąty te mają wspólny bok AC, skąd pomysł, by dorysować środek F tego odcinka (rys. 4).

Na mocy twierdzenia 1, proste BC i DF są równoległe, a więc $\sphericalangle BCD=\sphericalangle CDF$. Łącząc tę zależność z daną w treści zadania równością kątów, uzyskujemy $\sphericalangle CAE=\sphericalangle CDF$. Ponieważ punkty E i F leżą po tej samej stronie prostej AD, więc z ostatniej równości wynika, że na czworokącie $ADEF$ można opisać okrąg. Wobec tego

$$\sphericalangle ADE+\sphericalangle AFE=180^\circ.$$

Z kolei z twierdzenia 1 wnioskujemy, że proste AD i EF są równoległe, wobec czego

$$\sphericalangle DAF+\sphericalangle AFE=180^\circ.$$

Odejmując stronami ostatnie dwie równości, otrzymujemy $\sphericalangle ADE=\sphericalangle DAF$, skąd wniosek, że trójkąt ACD jest równoramienny i $AC=CD$. To kończy dowód.

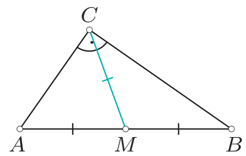
Środek odcinka może okazać się przydatny także wtedy, gdy w rozważanej konfiguracji pojawiają się trójkąty prostokątne. Przypomnijmy następujący fakt.

Twierdzenie 2.

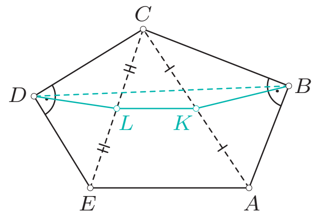
Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB (rys. 5). Wówczas $MC=\frac{1}{2}AB$.

Dowód znów można przeprowadzić w oparciu o własności równoległoboków. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy ponownie do wspomnianej wyżej książeczki Waldemara Pompe (twierdzenie 4.2).

Spójrzmy na rozwiązania dwóch zadań pochodzących z części korespondencyjnej OMG, w których dorysowanie środka przeciwprostokątnej znacznie przybliża do rozwiązania.



rys. 5



rys. 6

Zadanie 4. (zawody I stopnia VII OMG)

W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2\cdot BD$.

Rozwiązanie

Jak widać, w sformułowaniu zadania nie ma środków odcinków, które mogłyby sugerować dorysowanie kolejnego. Są natomiast kąty proste. Dorysujmy więc (tym razem dwa) punkty K i L, będące odpowiednio środkami odcinków AC i CE (rys. 6).

Korzystając z twierdzenia 2, uzyskujemy równości $KB=\frac{1}{2}AC$, $LD=\frac{1}{2}CE$. Ponadto z twierdzenia 1 otrzymujemy równość $KL=\frac{1}{2}EA$. Łącząc te zależności, dochodzimy do wniosku, że obwód trójkąta ACE jest równy

$$AC+CE+EA=2\cdot(KB+LD+KL).$$

Do zakończenia rozwiązania pozostaje zauważyć, że zachodzi nierówność $KB+LD+KL \geqslant BD$, gdyż najkrótsza droga między punktami B i D wiedzie w linii prostej.

Zadanie 5. (zawody I stopnia X OMG)

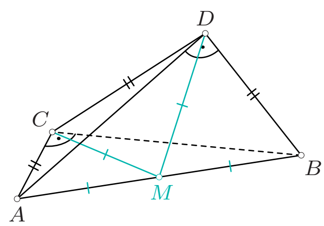
Dany jest czworościan $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADB=90^\circ \quad \text{oraz} \quad AC=CD=DB.$$

Wykaż, że $AB<2\cdot CD$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że trójkąty prostokątne ABC i ABD mają wspólną przeciwprostokątną, więc warto rozpocząć rozwiązanie zadania od dorysowania środka M odcinka AB (rys. 7).



rys. 7

Korzystając z twierdzenia 2, uzyskujemy wówczas równości $MA=MB=MC=MD$, które w połączeniu z założeniem $AC=CD=DB$ dają przystawanie trójkątów ACM, CDM, DBM (cecha bok–bok–bok). Stąd uzyskujemy równości kątów

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle CMD = \sphericalangle DMB.$$

Z drugiej strony, $\sphericalangle AMC + \sphericalangle CMD > \sphericalangle AMD$, więc

$$\sphericalangle AMC + \sphericalangle CMD + \sphericalangle DMB > \sphericalangle AMD + \sphericalangle DMB = 180^\circ.$$

Wobec tego $\sphericalangle CMD > 60^\circ$. W trójkącie równoramiennym CDM kąt między ramionami jest zatem większy od kąta między podstawą a ramieniem. To oznacza, że ramię jest krótsze od podstawy, czyli $MC = \frac{1}{2}AB < CD$, skąd wynika żądana nierówność.

Na zakończenie proponujemy kilka zadań, których rozwiązanie warto zacząć od dorysowania środków pewnych odcinków. Wskazówki podamy w kolejnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 6.

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach $AB = a$ oraz $CD = b$, przy czym $a > b$. Punkty P i Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Wyznacz długość odcinka PQ.

Zadanie 7.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są równej długości. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AD i BC. Wykaż, że prosta MN tworzy równe kąty z przekątnymi AC i BD.

Zadanie 8.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem boku CD. Udowodnij, że jeżeli $\sphericalangle AMB = 90^\circ$, to $AD + BC \geqslant AB$.

Zadanie 9.

W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości $\sphericalangle BCD = \sphericalangle EFA = 90^\circ$. Udowodnij, że obwód czworokąta $ABDE$ jest nie mniejszy od $2 \cdot CF$.

Zadanie 10.

Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = 5$, $CD = 3$ oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$. Wykaż, że odległość między prostymi AB i CD jest nie większa od 2.

Uwaga. Odległość między prostymi w przestrzeni to długość najkrótszego odcinka łączącego te proste.

Zadanie 11.

Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, takie trójkąty prostokątne ACK i BCL, że

$$\sphericalangle AKC = \sphericalangle BLC = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CAK = \sphericalangle CBL.$$

Wykaż, że $MK = ML$.

Łukasz Bożyk

W liczbach całkowitych

W zadaniach olimpijskich pojawia się czasami problem wyznaczenia wszystkich rozwiązań pewnego równania, które są liczbami całkowitymi. W tego typu zagadnieniach warto przyjrzeć się największemu wspólnemu dzielnikowi obu stron równania.

Zdarza się bowiem, że obie strony równania to wyrażenia algebraiczne, których największy wspólny dzielnik potrafimy dość dobrze oszacować lub wręcz dokładnie wyznaczyć. Gdyby na przykład okazało się, że największy wspólny dzielnik obu stron danego równania wynosi 5, to nasze równanie może być spełnione jedynie wtedy, gdy obie jego strony są równe 5. A stąd na ogół już tylko jeden krok do wyznaczenia wszystkich jego rozwiązań w liczbach całkowitych.

Przyjrzyjmy się, jak działa ta metoda w konkretnych zastosowaniach.

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$a^2 b = c(a-b)^3\,.$$

Rozwiązanie

Niech $d = \mathrm{NWD}(a,b)$. Wówczas $a = dk$, $b = dl$ dla pewnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych k, l. Dane równanie, po podzieleniu obu stron przez d^3, przybiera postać

$$k^2 l = c(k-l)^3\,. \qquad (1)$$

Zauważmy, że liczby $k^2 l$ i $(k-l)^3$ są względnie pierwsze. Istotnie, gdyby obie te liczby miały wspólny dzielnik pierwszy p, to przez p dzieliłaby się liczba k lub liczba l, a ponadto także liczba $k-l$. Stąd wynika, że wtedy przez p dzieliłyby się obie liczby k i l, co przeczy temu, że największy wspólny dzielnik liczb k i l jest równy 1.

Liczby $(k-l)^3$ i $k^2 l$ są zatem względnie pierwsze, a z równania (1) wynika, że liczba $(k-l)^3$ jest dodatnim dzielnikiem liczby $k^2 l$. Tak może się zdarzyć jedynie wtedy, gdy $(k-l)^3 = 1$, a więc $k = l+1$. Uwzględniając tę zależność w równości (1), uzyskujemy

$$c = k^2 l = (l+1)^2 l\,.$$

Dostajemy więc

$$a = d(l+1)\,, \quad b = dl\,, \quad c = (l+1)^2 l\,. \qquad (2)$$

Z drugiej strony, jeśli d i l są dowolnymi dodatnimi liczbami całkowitymi, to trójka liczb (a,b,c) określona poprzez zależności (2) spełnia dane równanie.

Wykazaliśmy zatem, że wszystkie trójki (a,b,c) dodatnich liczb całkowitych spełniające dane równanie są opisane wzorami (2), gdzie d i l są dowolnymi dodatnimi liczbami całkowitymi.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie pary (a,b) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają równanie

$$ab = (a-b)^3\,.$$

Rozwiązanie

Zaczynamy tak samo, jak w rozwiązaniu zadania 1.

Niech $d = \mathrm{NWD}(a,b)$. Wówczas $a = dk$, $b = dl$ dla pewnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych k, l. Po podstawieniu tych zależności do danego równania uzyskujemy

$$kl = d(k-l)^3\,. \qquad (3)$$

Dokładnie tak samo, jak w rozwiązaniu poprzedniego zadania, dowodzimy, że liczby $(k-l)^3$ i kl są względnie pierwsze. Ponadto z równości (3) wynika, że $(k-l)^3$ jest dodatnim dzielnikiem liczby kl. Wobec tego $(k-l)^3 = 1$, czyli $k = l+1$. Stąd po skorzystaniu w zależności (3) uzyskujemy $d = kl = (l+1)l$. A zatem

$$a = (l+1)^2 l\,, \quad b = (l+1)l^2\,. \qquad (4)$$

Tak jak w poprzednim przykładzie sprawdzamy, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej l określone wzorami (4) pary (a,b) spełniają wyjściowe równanie.

Zobaczymy teraz, jak metodę tę można wykorzystać w przypadku jednego z najbardziej znanych równań w liczbach całkowitych.

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie *trójkąty pitagorejskie*, czyli wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych, które są długościami boków trójkąta prostokątnego.

Rozwiązanie

Jeśli przez a, b oznaczymy długości przyprostokątnych, a przez c długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, to w myśl twierdzenia Pitagorasa

$$a^2+b^2=c^2\,.$$

Chcemy wyznaczyć wszystkie rozwiązania tego równania w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c. Zaczynamy zatem tak, jak w poprzednich przykładach.

Oznaczmy $d=\mathrm{NWD}(a,b,c)$. Wówczas $a=dx$, $b=dy$, $c=dz$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x, y, z, których największy wspólny dzielnik jest równy 1. Dane równanie przybiera wtedy postać

$$x^2+y^2=z^2\,. \tag{5}$$

Zauważmy, że *każde dwie* spośród liczb x, y, z są względnie pierwsze. Istotnie, gdyby np. liczby x i y miały wspólny dzielnik pierwszy p, to na mocy równości (5) liczba z także byłaby podzielna przez p. To jednak przeczy temu, że $\mathrm{NWD}(x,y,z)=1$.

Ponadto zauważmy, że spośród liczb x, y jedna jest parzysta, a druga nieparzysta. Istotnie, gdyby obie były nieparzyste, to liczba x^2+y^2 byłaby parzysta i niepodzielna przez 4, a więc nie mogłaby być kwadratem liczby całkowitej. Z kolei obie liczby x i y nie mogą być parzyste, bo są względnie pierwsze.

Bez straty ogólności przyjmijmy zatem, że liczba x jest nieparzysta, a y — parzysta. Wtedy liczba z jest nieparzysta. W szczególności, liczby $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}(z+x)$ oraz $\frac{1}{2}(z-x)$ są całkowite.

Przepiszmy teraz równanie (5) w postaci

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{z+x}{2}\cdot\frac{z-x}{2}\,. \tag{6}$$

Zauważmy, że największy wspólny dzielnik liczb $\frac{1}{2}(z+x)$ oraz $\frac{1}{2}(z-x)$ jest równy 1. Istotnie, jeśli q jest wspólnym dzielnikiem obu tych liczb, to q dzieli zarówno ich sumę jak i ich różnicę. Wobec tego $q\,|\,x$ oraz $q\,|\,z$, a skoro liczby x i z są względnie pierwsze, to $q=1$.

Iloczyn $t\cdot u$ dwóch względnie pierwszych liczb całkowitych t i u jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy oba czynniki t i u są kwadratami liczb całkowitych (każda liczba pierwsza wchodząca w skład rozkładu na czynniki pierwsze liczby $t\cdot u$ występuje w parzystej potędze i pojawia się tylko w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby t albo liczby u). Stąd wniosek, że

$$\frac{z+x}{2}=k^2\,,\qquad \frac{z-x}{2}=l^2$$

dla pewnych dodatnich, względnie pierwszych liczb całkowitych k, l takich, że $k>l$. Dodając i odejmując stronami te zależności, otrzymujemy odpowiednio

$$z=k^2+l^2\,,\qquad x=k^2-l^2\,.$$

Z kolei ze związku (6) wynika natychmiast, że $y^2=4k^2l^2$, czyli $y=2kl$.

Liczby k, l są różnej parzystości, tzn. jedna z nich jest parzysta, a druga nieparzysta — w przeciwnym razie obie liczby x, z byłyby parzyste, a więc nie byłyby względnie pierwsze.

Zatem ostatecznie uzyskujemy

$$a=(k^2-l^2)d\,,\quad b=2kld\,,\quad c=(k^2+l^2)d\,, \tag{7}$$

gdzie d, k, l są dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym liczby k i l są względnie pierwsze, jedna z nich jest parzysta, a druga nieparzysta oraz $k>l$.

Z drugiej strony, bez trudu sprawdzamy, że trójkąt o bokach, których długości a, b, c są określone wzorami (7), jest prostokątny:

$$a^2+b^2=((k^2-l^2)^2+4k^2l^2)d^2=(k^2+l^2)^2d^2=c^2\,.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Można wykazać, że podstawiając do wzorów (7) wartości d, k, l, spełniające opisane wyżej warunki uzyskamy każdy trójkąt pitagorejski *dokładnie raz*.

Na koniec proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie pary (a,b) dodatnich liczb całkowitych, dla których $a^2b=(a-b)^4$.

Zadanie 5.

Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wyznacz wszystkie pary (a,b) dodatnich liczb całkowitych, dla których

$$\frac{a+b}{a-b}=2^n\,.$$

Zadanie 6.

Wyznacz wszystkie pary (a,b) dodatnich liczb całkowitych, dla których $a+b=(a-b)^3$.

Zadanie 7. (VI OMG, zawody I stopnia)

Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby nieparzyste a i b spełniające równanie $a^2-b^3=4$.

Waldemar Pompe

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Różnica kwadratów

12. *Odpowiedź:* 9. Pomnóż licznik i mianownik każdego z ułamków przez różnicę pierwiastków występujących w jego mianowniku.

13. *Odpowiedź:* Wszystkie trójki postaci (a,a,c) dla dodatnich liczb nieparzystych a i c. Przekształć dane równanie do postaci $a^2-b^2=c(a-b)$ i skorzystaj ze wzoru na różnicę kwadratów.

14. *Odpowiedź:* $n=2011$. Przekształć dane nierówności do postaci $2010^2<n^2-100<2011^2$ i rozwiąż każdą z nich osobno.

15. Postępuj podobnie jak w zadaniu 9.

16. *Odpowiedź:* Nie istnieją. Uzasadnij, że jeżeli liczby x i y są tej samej parzystości, to liczba x^4-y^4 jest podzielna przez 16.

Chodź, pomaluj mi płaszczyznę!

2. *Odpowiedź:* 2. Uzasadnij, że jeśli płaszczyzna jest pokolorowana trzema kolorami, to istnieje okrąg przechodzący przez co najmniej trzy różnokolorowe punkty.

3. *Odpowiedź:* Można użyć dowolnie wielu kolorów. Wybierz dowolną prostą i pokoloruj każdy jej punkt na inny kolor.

„Kwadrat” redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk.
Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omj@gmail.com Nakład: 2000 egz.