Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 1
listopad 2011

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Kilka słów wstępu

W bieżącej edycji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów wprowadzono istotną zmianę w formule zawodów stopnia pierwszego. Celem zwiększenia zainteresowania zawodami, do tradycyjnej części korespondencyjnej dołączono organizowaną w zarejestrowanych gimnazjach część testową.

Efekty znacznie przerosły oczekiwania organizatorów — w stosunku do zeszłego roku liczba uczestników wzrosła kilkunastokrotnie! W odpowiedzi na tak wielki skok popularności, środowisko OMG podjęło szereg inicjatyw mających ma celu utrzymanie tego pozytywnego trendu. Przykładem jednej z nich jest znajdująca się w Twoich rękach gazetka, w której chcielibyśmy zamieszczać ciekawostki dotyczące Olimpiady, propozycje kółek matematycznych, informacje o naukowych sukcesach uczestników OMG oraz inne artykuły związane z olimpiadą matematyczną. Będziemy wdzięczni za wszelkie uwagi, pomysły i opinie dotyczące periodyku, gdyż nic tak nie mobilizuje twórców jak pozytywny odzew Czytelników. Życzymy miłej lektury!

Redakcja

O Olimpiadzie Matematycznej

Pierwsze zawody matematyczne odbyły się na Węgrzech w 1894 roku. Kilka lat po zakończeniu II Wojny Światowej naukowe środowiska matematyczne większości krajów tzw. bloku wschodniego, w tym Polski, rozpoczęły w swoich krajach organizację corocznych olimpiad matematycznych, zaadresowanych do najbardziej uzdolnionej młodzieży szkół średnich. We wszystkich tych krajach, olimpiady osiągnęły olbrzymi sukces. Sprawił on, że idea organizacji podobnych zawodów (nie tylko matematycznych) zaczęła się bardzo szybko rozprzestrzeniać. Trudno byłoby dzisiaj wskazać kraj na świecie, w którym olimpiada matematyczna nie jest organizowana.

W Polsce Olimpiada Matematyczna (OM) odbywa się od 1949 roku i jest drugą (po węgierskiej), olimpiadą na świecie, której zasięg obejmje cały kraj oraz pierwszą olimpiadą przedmiotową w Polsce.

Od 1959 roku zwycięzcy olimpiad matematycznych w swoich krajach rywalizują na corocznej Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej (International Mathematical Olympiad). W ten sposób olimpiada matematyczna stała się ogólnoświatowym ruchem intelektualnym najzdolniejszej młodzieży szkolnej o wysokim poziomie merytorycznym. Polscy uczniowie aktywnie uczestniczą w nim od samego początku. Ich sukcesy na arenie międzynarodowej oraz starania polskich uczelni o finalistów OM potwierdzają wysoki, światowy poziom merytoryczny polskiej Olimpiady Matematycznej.

Przepaść jakościowa między zadaniami maturalnymi a zadaniami OM, jaka ukształtowała się przez lata jest — nawet przez zdolnego ucznia — trudna do pokonania bez aktywnej samodzielnej pracy, wspomaganej przez nauczyciela. Z drugiej strony, niespełna trzyletni okres nauki w szkole ponadgimnazjalnej jest dla wielu uczniów zbyt krótki, aby móc tę przepaść pokonać. Dlatego w 2005 roku powstała Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (OMG). Jej twórcy byli zdania, że czas nauki w gimnazjum może zostać efektywnie wykorzystany do wypełnienia luki pomiędzy standardami szkolnymi a standardami OM. Zaledwie kilkuletnie istnienie OMG potwierdziło to przypuszczenie: OMG dostarcza swoim uczestnikom solidne podstawy do udziału w Olimpiadzie Matematycznej już u progu nauki w szkole ponadgimnazjalnej, a niektórzy uczniowie osiągają ten poziom znacznie szybciej.

W bieżącym roku szkolnym formuła organizacyjna zawodów pierwszego stopnia Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów została rozbudowana o część testową. Przyniosło to znaczny wzrost zainteresowania OMG — co czwarte gimnazjum w Polsce bierze obecnie udział w naszej Olimpiadzie. Mamy nadzieję, że to nowe rozwiązanie przyczyni się do trwałego zwiększenia zainteresowania Olimpiadą Matematyczną Gimnazjalistów.

Komitet Główny OMG

Sześciokąty równokątne

Zadanie 8 z testu próbnego tegorocznej edycji OMG dotyczyło sześciokątów, których wszystkie kąty wewnętrzne są równe. Na pierwszy rzut oka wydawać by się mogło, że takie sześciokąty muszą być foremne. Tak jednak nie jest i aby się o tym przekonać, poczyńmy najpierw pewną obserwację.

Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem, w którym wszystkie kąty wewnętrzne są równe. Jeśli przedłużymy boki BC, DE i FA tego sześciokąta, to otrzymamy trójkąt równoboczny PQR (rys. 1). Istotnie, bowiem

$$\sphericalangle RPQ = \sphericalangle APB = 180^\circ - \sphericalangle BAP - \sphericalangle ABP = 60^\circ$$

i podobnie $\sphericalangle PQR = 60^\circ$.

Również na odwrót — każdy sześciokąt, którego wszystkie kąty wewnętrzne są równe, możemy otrzymać przez usunięcie trzech narożnych trójkątów równobocznych (byle na siebie nie zachodziły). I jeśli tylko usuwane trójkąty nie będą przystające i jednocześnie trzy razy mniejsze od wyjściowego trójkąta, to otrzymany sześciokąt nie będzie foremny.

Takie sześciokąty nazywamy *równokątnymi*. Okazuje się, że mają one wiele ciekawych własności i w dowodzeniu ich bardzo pomaga wyżej opisane „uzupełnianie” do trójkąta równobocznego. Przyjrzyjmy się zatem

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

kilku przykładom.

Zadanie 1. (VII OMG, test próbny)

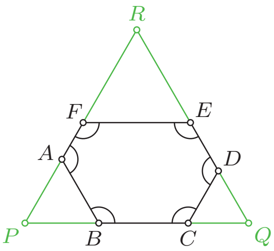
Wszystkie kąty sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ są równe. Udowodnij, że proste AB i DE są równoległe.

Rozwiązanie

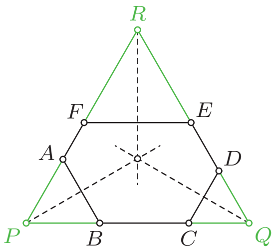
Uzupełniamy sześciokąt $ABCDEF$ do trójkąta równobocznego PQR, przedłużając boki BC, DE oraz FA (rys. 1). Wtedy

$$\sphericalangle DQC + \sphericalangle QBA = 60° + 120° = 180°,$$

zatem proste AB i DE są równoległe.



rys. 1



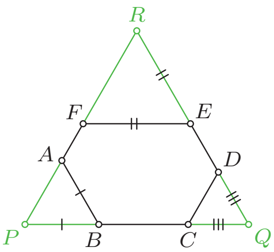
rys. 2

Zadanie 2. (II OMG, zawody stopnia drugiego)

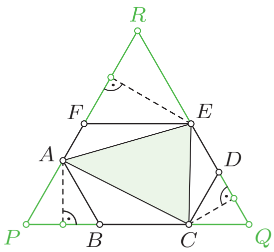
Miara każdego kąta sześciokata $ABCDEF$ jest równa 120°. Udowodnij, że symetralne odcinków AB, CD i EF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Podobnie jak poprzednio, uzupełniamy dany sześciokąt do trójkąta równobocznego PQR (rys. 2). Wtedy trójkąty ABP, CDQ, EFR są równoboczne. Zatem symetralna odcinka AB jest jednocześnie dwusieczną kąta APB trójkąta ABP, a więc również dwusieczną kąta RPQ trójkąta równobocznego PQR. Analogicznie, symetralne odcinków CD i EF są odpowiednio dwusiecznymi kątów PQR i QRP trójkąta PQR. A zatem rozpatrywane symetralne przecinają się w jednym punkcie.



rys. 3



rys. 4

Zadanie 3.

Udowodnij, że sumy długości par boków wychodzących z dwóch przeciwległych wierzchołków sześciokąta równokątnego są równe.

Rozwiązanie

Wystarczy, jeśli wykażemy, że sumy długości par boków wychodzących z wierzchołków B i E sześciokąta $ABCDEF$ są równe, gdyż dla pozostałych dwóch par postąpimy analogicznie. Podobnie, jak w poprzednim zadaniu, uzupełniamy dany sześciokąt do trójkąta równobocznego PQR (rys. 3).

Trójkąty ABP, CDQ i EFR są więc równoboczne, a zatem $BA = BP$, $EF = ER$ i $CQ = DQ$. Stąd

$$\begin{aligned} BA + BC &= BP + BC = PC = PQ - CQ = \\ &= QR - DQ = DR = ED + ER = ED + EF. \end{aligned}$$

Zadanie 4.

Wykaż, że w sześciokącie równokątnym $ABCDEF$ pola trójkątów ACE i BDF są równe.

Rozwiązanie

Ponownie posłużymy się uzupełnieniem danego sześciokąta $ABCDEF$ do trójkąta równobocznego PQR (rys. 4). Wygodnie będzie nam przedstawić pole trójkąta ACE jako różnicę pola sześciokąta $ABCDEF$ oraz pól trójkątów ABC, CDE i EFA. Podobnie pole trójkąta BDF możemy przedstawić jako różnicę pola sześciokąta $ABCDEF$ oraz pól trójkątów BCD, DEF i FAB. Wystarczy zatem wykazać, że

$$[ABC] + [CDE] + [EFA] = [BCD] + [DEF] + [FAB],$$

gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

Przyjmijmy oznaczenia: $AB = a$, $CD = b$, $EF = c$. Niech ponadto ℓ będzie długością boku trójkąta równobocznego PQR. Wtedy $BC = \ell - a - b$, $DE = \ell - b - c$ oraz $FA = \ell - c - a$.

Zauważmy, że długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka A jest równa długości wysokości trójkąta równobocznego ABP, czyli $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Stąd

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot (\ell - a - b) \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Analogicznie obliczamy:

$$[CDE] = \frac{1}{2} \cdot (\ell - b - c) \cdot b\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad [EFA] = \frac{1}{2} \cdot (\ell - c - a) \cdot c\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suma powyższych trzech wyrażeń jest więc równa

$$(1) \qquad \frac{\sqrt{3}}{4}\left((a+b+c)\ell - (a^2+b^2+c^2) - (ab+bc+ca)\right).$$

W ten sam sposób obliczamy także pola trzech trójkątów w drugiej sumie:

$$[BCD] = \frac{1}{2} \cdot (\ell - a - b) \cdot b\frac{\sqrt{3}}{2}$$

oraz analogicznie

$$[DEF] = \frac{1}{2} \cdot (\ell - b - c) \cdot c\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad [FAB] = \frac{1}{2} \cdot (\ell - c - a) \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dodając stronami powyższe trzy wyrażenia wnosimy, że suma pól $[BCD] + [DEF] + [FAB]$ również jest równa wartości wyrażenia (1). To kończy rozwiązanie zadania.

Można udowodnić, że powyższa równość pól ma miejsce także w każdym sześciokącie wypukłym o przeciwległych bokach równoległych (patrz np. zadanie 9 z Obozu Naukowego Olimpiady Matematycznej w Mszanie Dolnej w 2011 roku — jego rozwiązanie można znaleźć w broszurze z tego obozu dostępnej na stronie Olimpiady Matematycznej: `www.om.edu.pl`).

Na koniec podajemy kilka zadań dla Czytelników do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do tych zadań podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5.

Z trójkąta równobocznego o boku 1 odcięto trzy narożne trójkąty równoboczne o bokach długości a, b, c otrzymując sześciokąt równokątny.

a) Oblicz długość boku trójkąta równobocznego wyznaczonego przez trzy boki sześciokąta, które nie leżą na bokach danego trójkąta równobocznego.

b) Oblicz pole tego sześciokąta.

c) Wykaż, że suma długości jego głównych przekątnych jest nie mniejsza od $3-(a+b+c)$ (w sześciokącie $ABCDEF$ główne przekątne to AD, BE i CF).

Zadanie 6.

Udowodnij, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz sześciokąta równokątnego od prostych zawierających jego boki jest stała.

Zadanie 7.

W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ wszystkie kąty wewnętrzne mają równe miary. Wykaż, że symetralna odcinka EA, symetralna odcinka BC i dwusieczna kąta CDE przecinają się w jednym punkcie.

Michał Kieza

Pozory mylą

Najtrudniejszym problemem części testowej tegorocznej edycji OMG okazało się zadanie 14., w którym należało rozstrzygnąć, czy liczba $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$ jest wymierna. Nic dziwnego — zwiastujące niewymierność pierwiastki ścielą się w niej gęsto, skąd łatwo o błędną intuicję. Ku przykremu zaskoczeniu ponad 72% uczestników, badane wyrażenie okazuje się wymierne, co wynika z równości:

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}-\sqrt{2}=-1$$

Problemy powyższego rodzaju mogą stanowić materiał na ciekawe kółko zainteresowań, odzwyczajające ucznia od traktowania symbolu pierwiastka jako świadectwa niewymierności. Przykładowo, w sposób analogiczny do poprzedniego można stwierdzić, że wymierne są liczby:

(1) $$\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}},\quad \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

O ile wartość pierwszej z tych liczb można obliczyć podobnie jak wyżej, czyli „zwijając” do kwadratu podpierwiatkowe wyrażenia z wykorzystaniem wzoru

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\,,$$

o tyle obliczenie wartości drugiej liczby wymaga „zwinięcia” do sześcianu, przy jednoczesnym zastosowaniu bardziej zawiłej tożsamości

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3\,.$$

Przyjrzyjmy się teraz podobnym wyrażeniom, czyli:

(2) $$(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n\,,$$

gdzie n jest nieujemną liczbą całkowitą. Aby zwiększyć czytelność tekstu i zmniejszyć jego objętość, oznaczmy powyższą liczbę przez a_n. Nietrudno stwierdzić, że $a_0=2$ oraz $a_1=6$, nieco trudniejsze rachunki dowodzą równości $a_2=34$. Można nabrać słusznych podejrzeń, że wszystkie liczby a_n — pomimo pierwiastkowego znamienia — są całkowite. Spośród kilku uzasadnień tego spostrzeżenia, jedno wydaje się szczególnie ciekawe; rozpocznijmy od zanotowania poniższych równości:

$$(3+2\sqrt{2})^2=6(3+2\sqrt{2})-1$$
$$(3-2\sqrt{2})^2=6(3-2\sqrt{2})-1$$

Po pomnożeniu obustronnie górnej przez $(3+2\sqrt{2})^n$, dolnej przez $(3-2\sqrt{2})^n$ i dodaniu stronami, otrzymamy dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n równość:

$$a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n$$

Powyższy wzór to przykład tzw. *wzoru rekurencyjnego* — kolejne wyrazy ciągu wyznaczane są przy pomocy wyrazów poprzednich. Nietrudno zeń wywnioskować, że skoro liczby a_0, a_1 są całkowite, to liczba $a_2=6a_1-a_0$ również, zatem $a_3=6a_2-a_1=6\cdot 34-6=198$ podobnie, i tak dalej... . Oczywiście, w słowach „i tak dalej” przemycamy dyskretnie zasadę indukcji matematycznej, jednak o tym Gimnazjalista dowie się zapewne dopiero na dalszych etapach edukacji.

Przedstawiona metoda posiada następujące zalety: po pierwsze, dostarcza wzoru pozwalającego błyskawicznie obliczać kolejne liczby a_n, których bezpośrednie wyznaczanie ze wzoru (2) przeraziłoby największych miłośników rachowania. Po drugie, jest skuteczna i efektowna również „w drugą stronę”, czego sztandarowym przykładem jest tzw. *ciąg Fibonacciego*. Jest to jeden z najbardziej znanych ciągów liczbowych w matematyce, określony przyjemnym, rekurencyjnym wzorem $F_0=0$, $F_1=1$ oraz $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. Nieco mniej znane i przyjemne jest równanie *explicite* wyznaczające jego wyrazy:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

czyli *wzór Bineta*, o tyle zaskakujący, że na pierwszy rzut oka liczba z prawej strony nie wydaje się całkowita. Aby uzasadnić jego słuszność, wystarczy w odpowiedni sposób odwrócić przedstawione wcześniej rozumowanie.

Powróćmy jeszcze na chwilę do liczb a_n określonych wzorem (2) i zauważmy, że skoro $3-2\sqrt{2}<1$, to dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n mamy również

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)^n<1\,.$$

Jest to więc liczba, która „dopełnia” liczbę $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$ do najbliższej, większej od niej liczby całkowitej a_n. Stąd nietrudno już wywnioskować, że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n,

$$\left\{\left(3+2\sqrt{2}\right)^n\right\}=1-(3-2\sqrt{2})^n$$

gdzie przez $\{x\}$ oznaczamy część ułamkową liczby rzeczywistej, czyli różnicę między liczbą x a największą liczbą całkowitą, która liczby x nie przekracza. Powyższa formuła wygląda dość efektownie, jednak w prosty sposób wynika z poprzednich uwag.

W niniejszym artykule skoncentrowaliśmy się na liczbach postaci $a+b\sqrt{d}$, gdzie a, b, d są liczbami całkowitymi, a liczba $\sqrt{d}$ jest niewymierna. Zbiór liczb tej postaci znajduje zastosowanie przy poszukiwaniu całkowitych rozwiązań (x,y) równania $x^2-dy^2=1$ zwanego *równaniem Pella*. Jest to ciekawy temat, jednak może okazać się zbyt ambitny nawet dla najbardziej zapalonych matematycznie Gimnazjalistów — nie będziemy zatem przyglądać mu się bliżej na łamach *Kwadratu*.

Na zakończenie zaproponuję kilka zadań związanych z tematyką artykułu — może staną się inspiracją do badania podobnych, interesujących problemów? Wskazówki do poniższych zadań podane zostaną w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 1.

Wykaż, że liczby podane wzorami (1) są wymierne.

Zadanie 2.

Udowodnij, że dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n, liczbę $(3+2\sqrt{2})^n$ można przedstawić w postaci $a_n+b_n\sqrt{2}$, gdzie liczby a_n i b_n są całkowite i dodatnie. Wywnioskuj stąd, że $(3-2\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n.

Zadanie 3.

Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania wykaż, że liczby a_n, b_n spełniają równanie Pella dla $d=2$, tzn. $a_n^2-2b_n^2=1$. Wywnioskuj stąd, że któraś z liczb a_n-1, a_n+1 jest dzielnikiem liczby b_n^2.

Zadanie 4.

Korzystając z zadania 2. udowodnij, że dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n, część całkowita liczby $(3+2\sqrt{2})^n$ jest nieparzysta. (Część całkowita liczby rzeczywistej x to największa liczba całkowita, która nie przekracza x.)

Łukasz Rajkowski

Poznać kwadrat opuszkiem palca

Wśród szkół startujących w VII OMG znajduje się Gimnazjum nr 68 z Krakowa, wchodzące w skład ośrodka szkolno-wychowawczego dla dzieci niewidomych i słabowidzących. Jest to pierwsza szkoła o takiej specjalizacji, jaka kiedykolwiek wystartowała w Olimpiadzie. O specyfice nauczania dzieci z wadami wzroku oraz stawianych im wymaganiach rozmawialiśmy z wicedyrektorem placówki, panem Jackiem Jarczykiem.

Łukasz Rajkowski: Czy młodzież niewidomą charakteryzuje szczególne podejście do nauki?

Jacek Jarczyk: Z moich doświadczeń wynika, że nie. Naukę traktują podobnie jak ich rówieśnicy z innych gimnazjów i jak wszędzie można wśród nich znaleźć osoby mniej lub bardziej zainteresowane szkołą.

ŁR: Co odróżnia program nauczania dzieci z wadami wzroku od tego dla dzieci widzących?

JJ: Nic. Wymagania programowe są dokładnie te same, choć oczywiście ich zrealizowanie jest dużo bardziej czasochłonne. Poznawanie świata przez opuszek palca wymaga od ucznia wielkiej koncentracji i zaangażowania. O wiele trudniej jest naszym podopiecznym przyswoić nowe pojęcia, zwłaszcza te rodzące się ze wzrokowej obserwacji otaczającej nas rzeczywistości.

ŁR: ... co z pewnością czyni szczególne wyzwanie z nauczania na przykład geometrii.

JJ: Dokładnie. W przypadku najprostszych figur, jak trójkąt czy kwadrat, korzystamy z modeli, które dziecko może wziąć w ręce i zbadać. Przy obiektach przestrzennych posługujemy się bryłami wykonanymi z patyczków magnetycznych lub poskręcanego papieru. Ponadto możemy wykonywać obrazki na papierze puchnącym (pod wpływem obróbki termicznej uwypukla się on na elementach pokrytych tonerem – przyp. red.). Niestety, dziecko nie ma możliwości stworzenia i badania własnych rysunków, co w oczywisty sposób ogromnie utrudnia rozwiązywanie zadań z tego działu.

ŁR: Jakie formy zajęć pozalekcyjnych oferuje szkoła?

JJ: Poza zajęciami wyrównawczymi, organizowane są warsztaty z rozpoznawania przestrzeni małej (czyli tej, którą dziecko poznaje przy pomocy własnych dłoni) i dużej (związanej z chodzeniem i pokonywaniem dużych odległości). Dla osoby niewidomej są to kluczowe umiejętności na drodze do usamodzielnienia się. Każdy absolwent, któremu się to udało, jest dla nas powodem do dumy.

ŁR: A od strony bardziej naukowej? W jaki sposób szkoła motywuje uczniów do przysiadania nad książkami, co wymaga od nich szczególnego wysiłku?

JJ: W naszym gimnazjum organizujemy projekty, mające uatrakcyjnić uczniom naukę poszczególnych przedmiotów. W przypadku fizyki i chemii najczęściej polegają one na przeprowadzaniu doświadczeń ilustrujących poznawaną na lekcjach teorię. Podczas zeszłorocznego projektu z matematyki, młodzież sprawdzała poprawność modelu człowieka witruwiańskiego (studium proporcji ciała ludzkiego wykonane przez Leonarda da Vinci – przyp. red.), przykładając go do swoich kolegów i koleżanek, a także nauczycieli. Ich pomiary szczęśliwie potwierdziły prawdziwość modelu.

ŁR: Leonardo da Vinci na pewno odetchnął z ulgą. Powróćmy jeszcze na chwilę do matematyki – wiadomo, że pismo brajlowskie polega na przyporządkowaniu literom pewnych symboli. Jak to jest jednak z formułami matematycznymi? Czy dla nich również przewidziano miejsce w alfabecie Braille'a?

JJ: Oczywiście. Matematyka, jak również fizyka i chemia, posiadają własne notacje w systemie Braille'a. Ich ewentualne modyfikacje są dyskutowane i wprowadzane podczas specjalnych zebrań, w których uczestniczą dyrektorzy wszystkich dziesięciu polskich placówek uczących dzieci niewidome i słabowidzące. Ze zrozumiałych względów stosowanie Braille'a znacząco zwiększa objętość tekstów skierowanych do ucznia – podczas gdy standardowy arkusz egzaminacyjny posiada na przykład 8 stron, ten z którym musi zmierzyć się uczeń niewidomy zajmuje aż 24.

ŁR: Powiedział Pan o spotkaniach, podczas których uzgadniane są zmiany w notacji matematycznej. Czy oznacza to, że nie posiada ona charakteru międzynarodowego?

JJ: Zgadza się, brajlowska notacja matematyczna, fizyczna i chemiczna ma jedynie charakter ogólnopolski. Może się zatem zdarzyć, że napisane w innym kraju formuły matematyczne okażą się zupełnie niezrozumiałe dla niewidomego Polaka.

ŁR: W jaki sposób szkoła dowiedziała się o OMG? Skąd wzięła się inicjatywa przystąpienia?

JJ: W lipcu przeczytałem zamieszczone na stronie internetowej MEN ogłoszenie o Olimpiadzie, następnie otrzymałem informację o zawodach od organizatorów. Przekonałem naszą nauczycielkę matematyki do zostania koordynatorem i w taki sposób przystąpiliśmy do I etapu.

ŁR: Przewiduje Pan uczestnictwo w przyszłym roku?

JJ: Tak. Chwalę sobie współpracę z OMG, a każde zawody są dla uczniów dobrą okazją do przećwiczenia się w sytuacjach egzaminacyjnych. To się uczniom na pewno przyda, nie tylko w szkole.

ŁR: Cieszę się z takiej deklaracji i serdecznie dziękuję za rozmowę.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski (redaktor naczelny), Urszula Swianiewicz, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 2
grudzień 2011

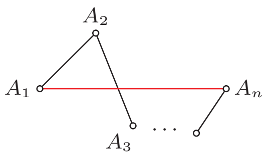
Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Nierówność trójkąta

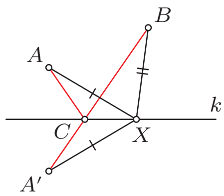
Jednym z narzędzi, które pozwala uzyskać wiele ciekawych zależności geometrycznych jest *nierówność trójkąta*. Orzeka ona, iż dla każdych trzech punktów A, B, C długość odcinka AB jest nie większa od sumy długości odcinków BC i CA. Nierówność tę można łatwo uogólnić na przypadek n punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (rys. 1):

$$(1) \qquad A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n \geqslant A_1A_n\,.$$

Podamy teraz kilka przykładów zadań, które można efektownie rozwiązać, wykorzystując powyższą nierówność.



rys. 1



rys. 2

Zadanie 1.

Dana jest prosta k oraz punkty A, B, leżące po tej samej stronie prostej k. Na prostej k wyznacz taki punkt C, aby suma długości odcinków AC i BC była najmniejsza (rys. 2).

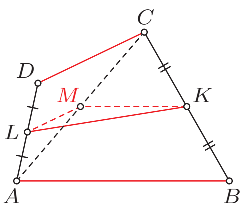
Rozwiązanie

Konstrukcja punktu C wygląda następująco. Punkt A odbijamy symetrycznie względem prostej k, uzyskując punkt A' (rys. 2). Wówczas punkt przecięcia odcinka BA' z prostą k jest szukanym punktem C.

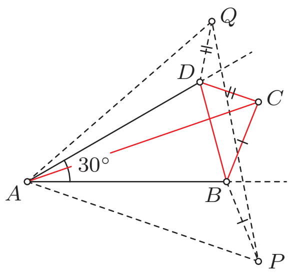
Istotnie: niech X będzie dowolnym punktem leżącym na prostej k. Z własności symetrii osiowej wynika, że $AC = A'C$ oraz $AX = A'X$. Wobec tego, na mocy nierówności trójkąta, uzyskujemy

$$AX + BX = A'X + BX \geqslant A'B = A'C + BC = AC + BC\,.$$

Zatem suma $AX + BX$ przyjmuje najmniejszą wartość dla $X = C$.



rys. 3



rys. 4

Zadanie 2.

Punkty K i L są środkami boków BC i DA czworokąta wypukłego $ABCD$ (rys. 3). Udowodnij, że

$$KL \leqslant \tfrac{1}{2}(AB + CD)\,.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez M środek przekątnej AC (rys. 3). Wówczas $KM = \frac{1}{2}AB$ oraz $LM = \frac{1}{2}CD$. Zatem, na mocy nierówności trójkąta, uzyskujemy

$$KL \leqslant KM + LM = \tfrac{1}{2}(AB + CD)\,.$$

Zadanie 3.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąt BAD ma miarę $30°$ (rys. 4). Udowodnij, że

$$BC + CD + DB \geqslant AC\,.$$

Rozwiązanie

Niech P, Q będą punktami symetrycznymi do punktu C odpowiednio względem prostych AB, AD (rys. 4). Wówczas $AP = AC = AQ$, a ponadto

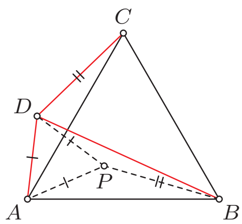
$$\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PAC + \sphericalangle QAC = 2\sphericalangle BAC + 2\sphericalangle DAC = 60°\,.$$

Zatem trójkąt PAQ jest równoboczny i jego bok ma długość równą długości odcinka AC. Wobec tego, na mocy nierówności (1), uzyskujemy

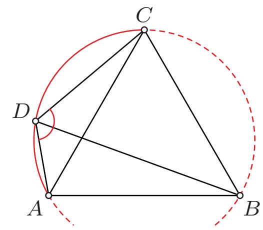
$$BC + CD + DB = BP + QD + BD \geqslant PQ = AC\,.$$

Zadanie 4.

Dany jest trójkąt równoboczny ABC (rys. 5). Udowodnij, że dla każdego punktu D spełniona jest nierówność $AD + CD \geqslant BD$.



rys. 5



rys. 6

Rozwiązanie

Trójkąt ADC obracamy wokół punktu A, w taki sposób, aby punkt C przeszedł na punkt B. Wówczas kąt obrotu wynosi $60°$, a punkt D po tym obrocie pokryje się z pewnym punktem P (rys. 5). Zatem $AP = AD$, $BP = CD$ oraz $\sphericalangle PAD = 60°$. Wobec tego trójkąt APD jest równoboczny, skąd wniosek, że $AD = DP$. Na mocy nierówności trójkąta uzyskujemy

$$AD + CD = DP + BP \geqslant BD\,.$$

Równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P leży na odcinku BD, a tak się stanie, jeżeli $\sphericalangle APB = 120°$.

Zatem $AD + CD = BD$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkt D leży na zewnątrz trójkąta ABC oraz zachodzi równość $\sphericalangle ADC = 120°$. Punkty D spełniające ten warunek to punkty krótszego łuku AC okręgu opisanego na trójkącie ABC (rys. 6).

Wiele przykładów zastosowania nierówności trójkąta można znaleźć przeglądając zadania z OMG, w tym także z bieżącej edycji (część korespondencyjna). Dla tych, którym to nie wystarczy, podamy na koniec jeszcze

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

kilka zadań. Wskazówki do nich zamieścimy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5.
Punkt P leży wewnątrz kąta ostrego. Na ramionach tego kąta wyznacz takie punkty A i B, dla których obwód trójkąta ABP jest najmniejszy.

Zadanie 6.
Dany jest kąt ostry o wierzchołku O i punkt P leżący wewnątrz tego kąta. Na ramionach tego kąta wyznacz punkty X i Y spełniające równość $OX=OY$, dla których suma $PX+PY$ jest najmniejsza.

Zadanie 7.
W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem boku AB oraz $\sphericalangle CMD=120^\circ$. Udowodnij, że

$$\tfrac{1}{2}AB+AD+BC\geqslant CD.$$

Zadanie 8.
Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $AD<AB$. Wewnątrz tego prostokąta wyznacz takie punkty P i Q, dla których suma $AP+DP+PQ+QB+QC$ przyjmuje najmniejszą wartość.

Waldemar Pompe

Wspomnienia z Obozu Naukowego OMG

Od 29 maja do 4 czerwca br. w miejscowości Perzanowo (woj. mazowieckie) odbył się Obóz Naukowy OMG, na który pojechało 20 gimnazjalistów wyłonionych spośród laureatów ubiegłorocznej edycji OMG. W trakcie tygodnia uczestnicy rozwiązywali zadania na zawodach indywidualnych, rywalizowali ze sobą podczas Meczu Matematycznego oraz brali udział w różnorodnych zajęciach poszerzających ich wiedzę matematyczną.

Wśród zadań Obozu pojawiło się kilka problemów dowcipnych i zaskakujących; w jednym z nich należało obliczyć kąt w ścianie pewnego ostrosłupa, przy czym prawidłową odpowiedzią był... dowód, że ów ostrosłup nie istnieje! Najwyraźniej zainspirowani tym zadaniem uczestnicy Meczu Matematycznego, należący do jednej z drużyn, przez większość czasu przewidzianego na rozwiązywanie zadań próbowali udowodnić, że teza jednego z nich jest nieprawdziwa. Tym razem okazało się jednak, że zadanie nie było pułapką, a przeciwna drużyna przedstawiła podczas Meczu prawidłowy dowód.

W trakcie rozwiązywania zadań jednemu zespołowi zabrakło kolorowej kredy. Nie zabrakło im jednak pomysłowości i udali się do kilkuletniej Jaśminki, rysującej kredą na asfalcie rysunki wróżek. W zamian za rysunek motylka (wykonany przez dziewczęcą część drużyny) Jaśminka zgodziła się podzielić swoją kredą i tym samym ułatwić drużynie rozwiązywanie zadań z geometrii.

Ostatnie zadanie z Obozu zostało poświęcone prawdziwej historii, która wydarzyła się w trakcie wyjazdu. Rozwiązanie odbiegało jednak od rzeczywistości, ponieważ dowodziło, że uczestnicy wyrzuceni z zajęć z powodu złego zachowania nigdy nie będą mogli na nie wrócić. Na Obozie tak źle nie było — wrócili po upływie kilku minut.

Zadania z Obozu można znaleźć na stronie internetowej OMG w zakładce `Zadania`.

Urszula Swianiewicz

Tożsamość Diofantosa

Już w III wieku naszej ery Diofantos wiedział, że jeśli liczby całkowite m i n można przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych, to iloczyn mn również posiada tę własność. Aby uzasadnić słuszność tego stwierdzenia, wystarczy przyjąć $m=a^2+b^2$, $n=c^2+d^2$ (gdzie a,b,c,d są liczbami całkowitymi) i przeprowadzić poniższy rachunek:

$$\begin{aligned}mn&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=\\&=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)=\\&=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2. \qquad (1)\end{aligned}$$

Warto zauważyć, że aby otrzymać szukane kwadraty dodaliśmy $2abcd$ do $a^2c^2+b^2d^2$, a odjęliśmy od $a^2d^2+b^2c^2$ — gdybyśmy postąpili odwrotnie, otrzymalibyśmy inny prawidłowy rozkład:

$$mn=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Przyjrzyjmy się, jak wykorzystać powyższe tożsamości w zadaniach.

Zadanie 1.
Udowodnij, że jeśli liczba n jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych, to liczba $5n$ również.

Rozwiązanie
Przyjmijmy, że $n=a^2+b^2$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi. Zauważmy, że $5=1^2+2^2$. Używając przed chwilą wyprowadzonej równości, dostajemy

$$5n=(1^2+2^2)(a^2+b^2)=(a+2b)^2+(2a-b)^2,$$

co oznacza, że $5n$ jest również sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Przy okazji otrzymaliśmy też jawne przedstawienie badanej liczby.

Możemy również rozważać iloczyny wyrażeń kwadratowych wraz ze współczynnikami, na przykład liczby postaci a^2+nb^2 dla liczb całkowitych a, b oraz dowolnej, ustalonej liczby całkowitej n. Czy iloczyn dwóch liczb tej postaci też można zapisać w ten sposób? Twierdzącej odpowiedzi dostarczają nam poniższe przekształcenia:

$$\begin{aligned}(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)&=a^2c^2+n^2b^2d^2+na^2d^2+nb^2c^2=\\&=(a^2c^2+2nabcd+n^2b^2d^2)+n(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)=\\&=(ac+nbd)^2+n(ad-bc)^2. \qquad (2)\end{aligned}$$

Podobnie jak poprzednio, do szukanej tożsamości dochodzimy poprzez odpowiednie wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia, co pozwoliłoby nam także na uzyskanie równości:

$$(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)=(ac-nbd)^2+n(ad+bc)^2. \qquad (3)$$

Zadanie 2.
Liczbę całkowitą nazwiemy *słoneczną*, jeśli można ją przedstawić w postaci a^2+5b^2, gdzie a i b są niezerowymi liczbami całkowitymi. Udowodnij, że kwadrat liczby słonecznej również jest liczbą słoneczną.

Rozwiązanie
Niech $x=k^2+5l^2$ będzie liczbą słoneczną $(k,l\neq 0)$. Łatwo zauważyć, że badając liczbę x^2 możemy zastosować wzory (2) i (3) dla $a=c=k$, $b=d=l$ i $n=5$. Zwróćmy uwagę, że choć tożsamość (2) doprowadzi nas do mało odkrywczej równości $(k^2+5l^2)(k^2+5l^2)=(k^2+5l^2)^2+0^2$, to tożsamość (3) przyjmuje bardziej użyteczną postać:

$$x^2=(k^2+5l^2)(k^2+5l^2)=(k^2-5l^2)^2+5(kl+kl)^2.$$

Dla niezerowych k, l liczba $2kl$ także jest różna od 0; aby uzasadnić że x^2 jest liczbą słoneczną pozostało nam zatem do udowodnienia, że $k^2-5l^2 \neq 0$. Jednak równość $k^2-5l^2=0$ pociągałaby za sobą $k^2/l^2=5$, co oznaczałoby, że liczba $\sqrt{5}$ jest wymierna. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba x^2 jest słoneczna.

Można nabrać podejrzeń, że jeśli pewne dwie liczby są postaci ma^2+nb^2, gdzie a i b są całkowite, a m i n ustalonymi współczynnikami, to ich iloczyn również „odziedziczy" tę własność. Okazuje się jednak, że to nie jest prawda — przykładem są liczby $11=2\cdot 2^2+3\cdot 1^2$ oraz $21=2\cdot 3^2+3\cdot 1^2$, których iloczyn (231) nie da się przedstawić jako suma $2a^2+3b^2$. Dla liczb o dowolnych współczynnikach możemy jednak udowodnić równość (4):

$$(ma^2+nb^2)(mc^2+nd^2)=(mac+nbd)^2+mn\cdot(ad-bd)^2\,.$$

Oznacza ona, że mnożąc dwie liczby postaci ma^2+nb^2 otrzymujemy liczbę postaci $a^2+mn\cdot b^2$. Ponadto, jeśli pomnożymy liczbę pierwszego rodzaju przez liczbę drugiego rodzaju, to znowu otrzymamy liczbę postaci ma^2+nb^2, co ilustruje tożsamość

$$(ma^2+nb^2)(c^2+mn\cdot d^2)=m(ac+nbd)^2+n(bc-mad)^2\,.$$

Zadanie 3.

Wykaż, że iloczyn parzystej liczby liczb postaci

$$2a^2+3b^2\,,$$

gdzie a, b są liczbami całkowitymi, da się przedstawić w postaci k^2+6l^2 dla pewnych liczb całkowitych k,l.

Rozwiązanie

Niech $x_1,x_2,\ldots,x_{2n}$ będą danymi liczbami. Dzięki równości (4) wiemy, że każdy z iloczynów $x_1x_2, x_3x_4, \ldots, x_{2n-1}x_{2n}$ można zapisać w postaci a^2+6b^2 dla pewnych liczb całkowitych a,b. Z równości (3) wnioskujemy zatem, że iloczyn liczb x_1x_2 oraz x_3x_4 można zapisać w tej postaci, dlatego iloczyn liczb $x_1x_2x_3x_4$ i x_5x_6 również. Powtarzając to rozumowanie otrzymamy w końcu, że iloczyn wszystkich początkowych liczb da się zapisać w interesujący nas sposób.

Na zakończenie dodajmy, że opisywane w artykule wyrażenia kwadratowe były intensywnie badane w matematyce. Szczególnie interesujący był problem polegający na uogólnieniu tożsamości Diofantosa na wyrażenia większej liczby zmiennych. Wiadomo na przykład, że jeśli rozważymy iloczyn dwóch wyrażeń algebraicznych, z których każde jest sumą n kwadratów, to ich iloczyn będzie pewnym wyrażeniem algebraicznym będącym sumą n kwadratów jedynie dla $n=1,2,4,8$. Uzasadnienie tego faktu daleko wykracza jednak poza program szkół średnich i dla gimnazjalisty może stanowić jedynie sympatyczną ciekawostkę.

Poniżej znajdują się zadania dotyczące tematu artykułu; wskazówki do nich zostaną zamieszczone w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4.

Udowodnij, że iloczyn dwóch liczb, będących różnicami kwadratów dwóch liczb całkowitych, można przedstawić jako różnicę kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Zadanie 5.

Udowodnij, że jeżeli liczba n jest różnicą kwadratów dwóch liczb całkowitych, to liczba $3n$ również.

Zadanie 6.

Udowodnij, że żadnej liczby postaci $4k+3$, gdzie k jest liczbą całkowitą, nie da się przedstawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Zadanie 7.

Wykaż, że liczby 231 nie można przedstawić w postaci $2a^2+3b^2$ dla liczb całkowitych a, b.

Michał Kieza

Dziesięcioro Wspaniałych

Na ponad 14 000 uczestników części testowej tegorocznej edycji OMG, jedynie dziesięciorgu z nich udało się uzyskać maksymalną liczbę punktów. Byli to:

Dominika BAKALARZ, Anna CZERWIŃSKA,
Ewa ZIELIŃSKA, Tomasz KLEINER,
Michał MADEJA, Jan MIRKIEWICZ,
Konrad MAJEWSKI, Cyprian MATACZYŃSKI,
Patryk SZCZEPAŃSKI, Piotr PAWLAK.

Gratulujemy i życzymy powodzenia przy dalszych zmaganiach z OMG!

Zwycięstwo Polaków na „MEMO 2011"

W dniach 1–7 września br. odbyły się w Chorwacji 5-te Zawody Matematyczne Europy Środkowej (*Middle European Mathematical Olympiad*, w skrócie MEMO). Uczestniczyły w nich reprezentacje następujących dziesięciu państw: Austrii, Chorwacji, Czech, Litwy, Niemiec, Polski, Słowacji, Słowenii, Szwajcarii oraz Węgier. Każdy kraj reprezentowało sześciu uczniów.

Polska delegacja została wyłoniona na podstawie wyników ubiegłorocznej edycji Olimpiady Matematycznej. W jej skład weszli:

- Grzegorz Białek – ZSO nr 6, VI LO w Bydgoszczy;
- Karol Kaszuba – Gimnazjum nr 42 w Warszawie;
- Wojciech Nadara – XIV LO w Warszawie;
- Dariusz Matlak – II LO w Krakowie;
- Kamil Rychlewicz – Publ. Gimnazjum nr 8 w Łodzi;
- Michał Zając – V LO w Krakowie.

Dnia 3 września zawodnicy zmagali się przez pięć godzin z czterema zadaniami zawodów indywidualnych. W konkurencji tej bezapelacyjnie zwyciężył nasz reprezentant Wojciech Nadara, uzyskując jako jedyny maksymalną liczbę punktów, co jest rzadkością na zawodach MEMO. Zostało to odnotowane na dyplomie Wojtka. Oprócz Wojtka złoty medal zdobyło także pięciu innych zawodników, w tym dwóch Polaków: Michał Zając i Karol Kaszuba. Nasi pozostali reprezentanci także wrócili do domu z medalami: srebrny wywalczyli Grzegorz Białek i Kamil Rychlewicz, a brązowy Dariusz Matlak.

Następnego dnia miały miejsce zawody zespołowe. Każda z reprezentacji wspólnymi siłami rozwiązywała przez pięć godzin osiem zadań. Nasza drużyna okazała się znów bezkonkurencyjna: zdobyła pierwsze miejsce uzyskując maksymalną liczbę punktów. Drugie miejsce zajęła reprezentacja Węgier, rozwiązując 6,5 zadania.

Początek zawodów MEMO sięga roku 1978, kiedy odbyły się pierwsze Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne. Zawody te trwały nieprzerwanie do roku 2006.

W 2007 roku powiększono grono uczestników i w miejsce APZM utworzono MEMO.

Warto wspomnieć, że Wojtek Nadara był dwukrotnie laureatem OMG. Laureatami OMG byli także Karol Kaszuba (trzykrotnie) i Kamil Rychlewicz (czterokrotnie!), którzy jeszcze jako gimnazjaliści dostali się do polskiej reprezentacji na MEMO. Postanowiliśmy zapytać ich o wrażenia z zawodów, plany na przyszłość i rady dla uczniów, chcących pójść ich śladami.

Łukasz Rajkowski: Medale zdobyte podczas MEMO 2011 *z pewnością sprawiają Wam wielką satysfakcję. Czy podczas zawodów udało Wam się dokonać czegoś, co jest dla Was szczególnym powodem do dumy?*

Karol Kaszuba: Ja cieszę się z tego, że wygrałem ze znajomym zakład o to, czy będę miał lepszy wynik od Kamila. *śmiech*

Kamil Rychlewicz: A ja z tego, że ten znajomy przegrał zakład. *śmiech* Ponadto cieszyłem się ze zrobienia trudnego zadania z teorii liczb na zawodach drużynowych – udało się to tylko trzem zespołom. Oprócz tego zaproponowałem metodę, którą rozwiązaliśmy zadanie z kombinatoryki z drużynowych — było to zadanie, z którego jako jedyni uzyskaliśmy maksymalną liczbę punktów.

ŁR: Czy podczas wyjazdu do Chorwacji mieliście bardzo napięty harmonogram?

KK: Poza zawodami nie było ściśle ustalonego planu. Były wspólne wycieczki, na przykład do zamku w Trakoscanie, jednak większość wolnego czasu organizowaliśmy sobie sami, grając np. w pokera, który w Chorwacji jest zupełnie legalny. Był to bardzo dobry pomysł na zawarcie międzynarodowych znajomości.

ŁR: Czy byliście najmłodszymi uczestnikami na MEMO?

KR: Wydaje mi się, że tak. Nie wytykano nas jednak palcami, więc pewności nie mam.

ŁR: Z pewnością byliście jednymi z najmłodszych, a jednocześnie jednymi z najlepszych. Aby na tym etapie edukacji dojść do olimpijskiego poziomu, zapewne musieliście zacząć interesować się matematyką odpowiednio wcześnie. W jakich okolicznościach i jaką rolę odegrali w tym Wasi nauczyciele?

KR: W pierwszej klasie szkoły podstawowej startowałem w „Kangurze" i uzyskałem dobry wynik — od tego się chyba zaczęło. Matematyka szła mi na tyle dobrze, że w IV klasie podstawówki nauczycielka matematyki zorganizowała mi indywidualny tok nauczania. Również w gimnazjum zamiast zwykłych lekcji zostawałem po zajęciach, aby rozwiązywać z moim nauczycielem odrobinę ambitniejsze zadania.

KK: Ja w podstawówce dowiedziałem się, że jest taki mistrz matematyczny jak Kamil Rychlewicz i uznałem, że nie ma mowy, aby ktoś w moim wieku cisnął mnie z matmy. *śmiech* Od początku gimnazjum większość matematycznej wiedzy zdobywałem samodzielnie, choć pomocne były na przykład kółka matematyczne dla licealistów, na które uczęszczałem.

ŁR: Gdzie było miejsce OMG na Waszej dotychczasowej ścieżce edukacyjnej?

KK: W pierwszej klasie OMG pozwoliła mi się porównać z innymi gimnazjalistami. W drugiej uświadomiła mi, że nawet jak się rozwiąże jakieś zadanie, to trzeba je jeszcze mądrze zapisać. No a w trzeciej to po prostu spotkałem się z kolegami.

KR: Dla mnie OMG dostarczało możliwości sprawdzenia się oraz wyznaczało jakiś cel do osiągnięcia, co motywowało mnie do pracy.

ŁR: W jaki sposób nauczyciel może pomóc uczniowi zdolnemu? Co powinien robić sam uczeń, chcący powtórzyć Wasze sukcesy?

KR: Nauczyciel powinien pokazywać uczniowi źródła, z których może się uczyć oraz służyć pomocą w przypadku jakichkolwiek problemów ze zrozumieniem. Odnośnie rad dla ucznia — należy robić mnóstwo zadań, nie poddawać się oraz nie brać się od razu za problemy z olimpiad międzynarodowych.

KK: Do rad Kamila dodam poznawanie ludzi, którzy też przygotowują się do Olimpiady, ponieważ duży wpływ ma środowisko.

ŁR: Jakie są Wasze plany na okres nauki w liceum?

Obaj: 3 złote medale na IMO. *śmiech* (IMO, czyli International Mathematical Olympiad — najbardziej prestiżowe zawody matematyczne na świecie dla uczniów szkół średnich; Polskę reprezentuje corocznie sześciu zwycięzców Olimpiady Matematycznej – przyp. red.)

KK: ... ja oprócz tego chciałbym zaliczyć pierwszy rok matematyki na Uniwersytecie Warszawskim, gdzie od października uczęszczam na wykłady.

ŁR: Dzięki za rozmowę, gratuluję sukcesu i życzę powodzenia w realizacji Waszych planów.

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Sześciokąty równokątne

5. a) Wyznacz długość boku tego trójkąta w zależności od a, b i c. b) Szukane pole jest różnicą pola dużego trójkąta i trzech narożnych trójkątów. c) Rozpatrz rzuty prostokątne głównych przekątnych na odpowiednie boki danego trójkąta równobocznego.

6. Uzupełnij dany sześciokąt do trójkąta równobocznego, a następnie przedstaw daną sumę w zależności od wysokości tego trójkąta i od wysokości trzech narożnych trójkątów równobocznych.

7. Niech proste CD i ED przecinają prostą AB odpowiednio w punktach P i Q. Zauważ, że symetralne odcinków BC i EA są jednocześnie dwusiecznymi kątów QPE i PQE.

Pozory mylą

1. Oblicz $(1+\sqrt{2})^2$ oraz $(1+\sqrt{2})^3$.

2. Wyznacz najpierw a_1 oraz b_1, a następnie przedstaw liczby a_{n+1}, b_{n+1} w zależności od a_n, b_n. Skorzystaj przy tym z równości

$$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(a_n+b_n\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}).$$

Wykaż z kolei, podobnie jak wyżej, że liczbę $(3-2\sqrt{2})^n$ można przedstawić w postaci $c_n-d_n\sqrt{2}$, gdzie c_n i d_n są całkowite i dodatnie, a następnie wywnioskuj, że $a_n=c_n$ oraz $b_n=d_n$.

3. Zauważ, że $a_n^2-2b_n^2=(a_n-b_n\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2})$. Ponadto, jeśli $a_n^2-2b_n^2=1$, to $(a_n-1)(a_n+1)=2b_n^2$. Uzasadnij, że obie liczby a_n-1, a_n+1 są parzyste i że każda z nich jest dzielnikiem liczby b_n^2.

4. Z artykułu wnioskujemy, że

$$(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n=[(3+2\sqrt{2})^n]+1,$$

gdzie $[x]$ to część całkowita liczby x. Korzystając z zadania 2, uzyskujemy $[(3+2\sqrt{2})^n]+1=(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n=2a_n$.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski (redaktor naczelny), Urszula Swianiewicz, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com

Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 3
luty 2012

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Refleksje po zawodach II stopnia VII OMG

W dniu 7 stycznia 2012 roku odbyły się zawody drugiego stopnia VII Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Wzięło w nich udział około 1300 gimnazjalistów z całej Polski. Jako jeden ze sprawdzających prace uczestników chciałbym podzielić się z Czytelnikami *Kwadratu* swoimi uwagami, dotyczącymi rozwiązań poszczególnych problemów.

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b, których iloczyn ab jest podzielny przez 175, a suma $a+b$ jest równa 175.

Nasuwa się następujący prosty, ale żmudny sposób rozwiązania: przejrzyjmy wszystkie 174 pary liczb całkowitych dodatnich a i b, których suma jest równa 175.

$$\begin{array}{ll} a=1,\ b=174 & \dots \\ a=2,\ b=173 & a=172,\ b=3 \\ a=3,\ b=172 & a=173,\ b=2 \\ \dots & a=174,\ b=1 \end{array}$$

Teraz dla każdej pary obliczamy iloczyn ab i sprawdzamy, czy dzieli się on przez 175. To nietrudne, ale bardzo żmudne. Czy zatem warto zastanawiać się nad takim rozwiązaniem?

Odpowiedź pozytywną zasugerowała mi praca jednego zawodnika. Napisał on, że rozpoczął od analizowania kolejnych przypadków; rzeczywiście w pracy były rozpatrzone pierwsze dwie czy trzy pary. Następnie zauważył, że jeśli liczba a nie dzieli się przez 5, to liczba b dopełniająca ją do liczby podzielnej przez 5 (czyli do 175) też nie dzieli się przez 5 i iloczyn na pewno nie będzie dzielić się przez 175. Mógł zatem ograniczyć się do takich par, w których liczba a dzieli się przez 5:

$$\begin{array}{ll} a=5,\ \ b=170 & \dots \\ a=10,\ b=165 & a=160,\ b=15 \\ a=15,\ b=160 & a=165,\ b=10 \\ \dots & a=170,\ b=5 \end{array}$$

Takich par jest tylko 34, a jeśli uwzględnimy fakt, że każda występuje dwukrotnie (jako (a,b) i jako (b,a)), wystarczy rozpatrzeć tylko 17 — wystarczająco niewiele, by zdążyć w czasie zawodów.

W podobny sposób możemy nawet bardziej ograniczyć liczbę przypadków; ponieważ $175=7\cdot 25$, to iloczyn ab dzieli się przez 7 (gdyż jest on podzielny przez 175), więc jedna z liczb a, b również dzieli się przez 7. Wśród wybranych liczb podzielnych przez 5, od 5 do 170, tylko cztery dzielą się przez 7, to znaczy 35, 70, 105 i 140. Pozostają nam zatem tylko cztery pary:

$$\begin{array}{ll} a=35,\ b=140 & a=105,\ b=70 \\ a=70,\ b=105 & a=140,\ b=35 \end{array}$$

i każda z nich spełnia warunki zadania: iloczyn ab jest liczbą podzielną przez 175, a suma równa się 175.

Okazało się, że rozwiązanie sposobem nieefektywnym, żmudnym, zasugerowało szybko pewne uproszczenia, które znacznie je przyspieszyły.

Warto zatem po rozwiązaniu zadania, tuż przed przystąpieniem do redakcji, zastanowić się przez chwilę, czy nasze rozumowanie da się uprościć. Dzięki temu możemy zaoszczędzić potem dużo czasu przy redagowaniu rozwiązania, a i nasz zapis stanie się krótszy, czytelniejszy i bardziej przejrzysty.

W przypadku wspomnianego wyżej uczestnika, niepotrzebne było mówienie o wszystkich możliwych parach. Można było od razu zauważyć, że co najmniej jedna z liczb a, b musi dzielić się przez 5, a skoro suma $a+b$ jest podzielna przez 5, to druga liczba też dzieli się przez 5. Podobnie jest z siódemką. Dalej wystarczy zauważyć, że liczby 5 i 7 są względnie pierwsze (tzn. ich największy wspólny dzielnik jest równy 1), skąd wynika, że obie liczby a i b muszą dzielić się przez $5\cdot 7=35$. To daje nam powyższe cztery pary (a,b). W ten sposób dostajemy oryginalne rozwiązanie zadania zamieszczone na stronie Olimpiady.

I takie właśnie rozwiązanie znalazło się w pracach wielu uczestników zawodów. Niektórzy jednak popełniali w swoim rozumowaniu następujący błąd: wnioskowali, że *obie* liczby a i b są podzielne przez 5 *jedynie* na podstawie podzielności iloczynu ab tych liczb przez $25=5\cdot 5$. Oczywiście tak wnioskować nie można, bo np. dla $a=1$ i $b=175$ iloczyn ab jest liczbą podzielną przez 25 (a nawet przez 175), gdy tymczasem liczba a przez 5 podzielna nie jest. Jeśli zatem chcemy udowodnić, że *obie* liczby a i b są podzielne przez 5, musimy w swoim rozumowaniu wykorzystać nie tylko to, że iloczyn ab jest podzielny przez 25, ale także to, że suma $a+b$ jest podzielna przez 5.

Zadanie 2.

W pewnym turnieju uczestniczyło 6 drużyn. Każda drużyna rozegrała z każdą inną dokładnie jeden mecz. Za zwycięstwo w meczu drużyna otrzymywała 3 punkty, za porażkę 0 punktów, a za remis 1 punkt. Po turnieju okazało się, że suma punktów zdobytych przez wszystkie drużyny wynosi 41. Wykaż, że istnieją takie cztery drużyny, z których każda co najmniej jeden raz zremisowała.

Zauważmy, że łącznie rozegrano 15 meczów; można je po prostu wypisać lub przeprowadzić rozumowanie ogólne: każda z 6 drużyn rozegrała 5 meczów, stąd iloczyn $6\cdot 5=30$. Jednak w ten sposób każdy mecz policzyliśmy dwukrotnie, dlatego liczba meczów wynosi 15. Ogólnie, gdyby w turnieju uczestniczyło n drużyn, to rozegrałyby łącznie $\frac{1}{2}n(n-1)$ meczów.

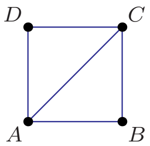
Teraz zauważmy, że jeśli mecz zakończył się wygraną którejś drużyny, to obie dostały za ten mecz łącz-

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

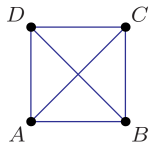
nie 3 punkty, a w przypadku remisu tylko 2 punkty, czyli o jeden punkt mniej. Gdyby zatem wszystkie mecze zakończyły się wygraną jednej z drużyn, to suma wszystkich uzyskanych punktów wyniosłaby 45. W naszym turnieju suma była o 4 punkty mniejsza, zatem 4 mecze musiały zakończyć się remisem.

Odtąd główna trudność zadania polegała na zrozumieniu, że nie pytają nas o liczbę *meczów* zakończonych remisem, ale o liczbę *drużyn*, które zremisowały. Wielu zawodników bez żadnego wyjaśnienia pisało w tym miejscu, że skoro 4 mecze zakończyły się remisem, to co najmniej 4 drużyny zremisowały. Nie jest to pełne rozwiązanie zadania. Dlaczego? Popatrzmy na kilka wariantów naszego problemu.

Gdyby suma wszystkich punktów wynosiła 40, to rozumując podobnie jak wyżej stwierdzilibyśmy, że 5 meczów zakończyło się remisem. Nie oznacza to jednak, że zremisowało co najmniej 5 drużyn. Wystarczyłyby tylko 4 takie drużyny — A, B, C i D, między którymi remisem zakończyły się mecze zaznaczone na rysunku 1.



rys. 1



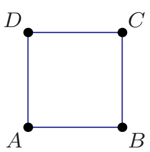
rys. 2

Gdyby suma wszystkich punktów wynosiła 39, to 6 meczów zakończyłoby się remisem, choć nadal tylko 4 drużyny mogłyby zremisować, co ilustruje z kolei rysunek 2.

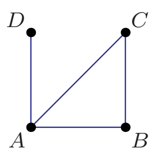
Jednakże, gdyby suma wszystkich punktów wynosiła 38, to remisów w turnieju byłoby 7 i wtedy co najmniej 5 drużyn musiałoby zremisować choć raz. Istotnie, gdyby drużyn tych było tylko 4, to — ponieważ jedynie mecze między nimi mogły zakończyć się remisem — liczba remisów nie przekroczyłaby liczby wszystkich meczów między tymi drużynami, czyli $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=6$, co przeczy temu, że remisów jest 7.

Widzimy zatem, że liczba remisów i liczba drużyn, które zremisowały, są dwiema zupełnie innymi wielkościami, które akurat dla liczby 4 są równe. Nie jest to jednak reguła i nie można bez uzasadnienia twierdzić, że 4 remisy oznaczają co najmniej 4 drużyny, które zremisowały — takie rozwiązania były uznawane za niekompletne.

Na zakończenie wspomnę o jeszcze jednej kwestii. Można uzasadnić, że są dwie sytuacje, w których dokładnie 4 drużyny zremisowały. Jeśli drużyny oznaczymy literami A, B, C i D, to remisy między nimi mogłyby wyglądać następująco (rys. 3, 4):



rys. 3



rys. 4

Powyższe sytuacje są różne; w pierwszej każda drużyna zremisowała dokładnie 2 razy, w drugiej drużyna A zremisowała 3 razy, a drużyna D tylko raz. Niektórzy zawodnicy pisali, że tylko w jednym przypadku można znaleźć cztery drużyny z czterema remisami i wskazywali jedną z tych sytuacji. Jeden zgubiony przypadek dowodzi, że nie wszystkie konfiguracje zostały rozważone i pozostaje wątpliwość, czy nie pominięto również sytuacji, w której występują tylko 3 drużyny remisujące. Jeśli więc twierdzimy, że jakaś konfiguracja jest jedyna, powinniśmy się chwilkę zastanowić, czy tak rzeczywiście jest, a przede wszystkim dlaczego tak jest. I to wyjaśnienie powinno się znaleźć w pracy.

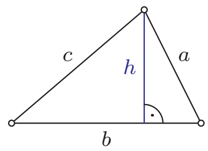
Zadanie 3.

Czy istnieje taki trójkąt o bokach długości a, b, c, którego pole jest równe $\frac{1}{4}(ab+bc)$? Odpowiedź uzasadnij.

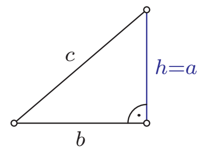
Niech h będzie wysokością trójkąta opuszczoną na bok długości b. Wówczas pole P trójkąta możemy wyrazić na dwa sposoby:

$$P=\frac{bh}{2} \quad \text{oraz} \quad P=\frac{ab+bc}{4},$$

skąd bez trudu dostajemy równość $a+c=2h$. Zauważmy jednak, że w dowolnym trójkącie zachodzi $a\geqslant h$ i $c\geqslant h$ (zob. rys. 5 dla trójkąta ostrokątnego). Zatem dodając stronami te nierówności, uzyskujemy $a+c\geqslant 2h$. Ale równość $a+c=2h$ oznaczałaby, że przed dodaniem stronami też mielibyśmy równości: $a=h$ i $c=h$. Ta sytuacja jest jednak niemożliwa, bowiem w przeciwnym razie oba kąty przy boku b tego trójkąta byłyby proste. W każdym trójkącie musi być zatem $a+c>2h$, wobec czego opisany w treści zadania trójkąt nie istnieje.



rys. 5



rys. 6

Niektórzy zawodnicy upraszczali sobie życie pisząc, że spełnione są *jednocześnie obie* nierówności $a>h$ oraz $c>h$. Wtedy zależność $a+c>2h$ dostajemy natychmiast, dodając te nierówności stronami. Tymczasem nie jest prawdą, że w *każdym* trójkącie $a>h$ oraz $c>h$. Uczestnicy, którzy tak twierdzili, pomijali w swoim rozumowaniu trójkąty prostokątne, o kącie prostym znajdującym się naprzeciwko boku a lub boku c (rys. 6). Takie rozwiązania były więc uznawane za niekompletne.

Na koniec jeszcze jedna ciekawostka. W rozwiązaniu wykorzystaliśmy wzór na pole trójkąta $P=\frac{1}{2}bh$. Lecz kto taki wzór kiedykolwiek widział? We wszystkich podręcznikach, tablicach, zbiorach zadań widnieje przecież wzór $P=\frac{1}{2}ah$. Wielu zawodników korzystało z niego, zapisując równanie

$$\frac{ah}{2}=\frac{ab+bc}{4}.$$

Mimo niezwykłej czasem pomysłowości przekształcania równości $2ah=ab+bc$, próby te nie prowadziły do sukcesu...

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb nieujemnych i nie większych od 1, dla których spełniona jest równość $a+b+c=ab+bc+ca$.

Wielu zawodników wykonało zasadniczą część rozumowania, która rozpoczyna się od przekształcenia różnicy lewej i prawej strony:

$$(a+b+c)-(ab+bc+ca)=a(1-b)+b(1-c)+c(1-a).$$

Załóżmy, że wszystkie liczby a, b i c są różne od 0 i różne od 1. Wtedy liczby a, $1-b$, b, $1-c$, c i $1-a$ są dodatnie, a więc

$$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)>0\,,$$

skąd wynika, że równość z treści zadania nie zachodzi.

Teraz należy zająć się przypadkiem, w którym przyjęte przez nas założenie: *wszystkie liczby a, b i c są różne od 0 i różne od 1*, nie jest spełnione. W tym miejscu wielu zawodników popełniło błąd logiczny.

Przyjrzyjmy się naszemu założeniu; mówi ono, że każda z trzech liczb a, b i c spełnia warunek: jest różna od zera i od jedynki. Oznaczmy ten warunek literą W. Mamy zatem zdanie: *każda* z rozważanych liczb spełnia warunek W. Zaprzeczeniem takiego zdania jest: *któraś* z rozważanych liczb nie spełnia warunku W. Wielu zawodników natomiast rozważało jako zaprzeczenie o wiele mniej ogólną sytuację: *każda* z rozważanych liczb nie spełnia warunku W, czyli *wszystkie* liczby a, b i c są równe 0 lub 1.

Niektórzy wręcz rozumieli ten ostatni warunek następująco: *wszystkie liczby są równe 0 lub wszystkie liczby są równe 1*. Ogranicza on jeszcze mocniej ogólność rozumowania. Oczywiście obie trójki $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ spełniają daną równość i okazuje się, że rzeczywiście są one jedynymi rozwiązaniami zadania.

Może się więc wydawać, że zawodnicy, którzy w taki właśnie sposób doszli do rozwiązania, rozwiązali zadanie poprawnie. Po drodze popełnili jednak poważny błąd logiczny; jego istota matematyczna sprowadza się do nieuzasadnionego wykluczenia przypadku, w którym na przykład dokładnie jedna liczba a, b lub c jest równa zeru, a pozostałe są dowolne. Pominięte przypadki nie są łatwe do przeanalizowania i stanowią istotną część pełnego rozwiązania zadania.

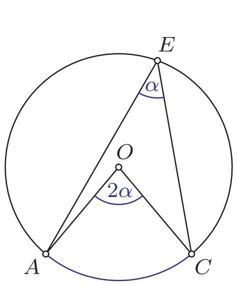
Zadanie 5.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

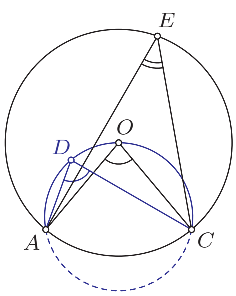
$$\sphericalangle DAB+\sphericalangle BCD=\sphericalangle ABC\,.$$

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykaż, że punkt O jest jednakowo odległy od prostych AD i CD.

Przypomnijmy najpierw twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym, w przypadku łuku krótszego od półokręgu. Przypuśćmy, że kąt AEC, wpisany w okrąg o środku O, jest oparty na łuku AC, krótszym od półokręgu (rys. 7). Na tym samym łuku oparty jest więc kąt środkowy AOC. Wówczas spełniona jest zależność $\sphericalangle AOC=2\sphericalangle AEC$.



rys. 7



rys. 8

Zapewne wielu zawodników sądziło, że prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne: jeśli punkt D leży wewnątrz danego okręgu oraz $\sphericalangle ADC=2\sphericalangle AEC$ (rys. 8), to punkt D pokrywa się ze środkiem O tego okręgu. Nie jest to prawda — dowolny punkt D leżący na łuku AOC okręgu opisanego na trójkącie ACO spełnia tę równość. Istotnie: z przytoczonego wcześniej twierdzenia wynika, że dwa kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe. Zatem stosując tę własność dla łuku AC (nie zawierającego punktu O) okręgu opisanego na trójkącie ACO, uzyskujemy

$$\sphericalangle ADC=\sphericalangle AOC=2\sphericalangle AEC\,.$$

Jednak punkt D nie pokrywa się z punktem O. Zatem twierdzenie odwrotne do twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym nie jest prawdziwe.

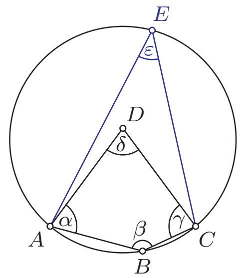
Przejdźmy teraz do treści zadania 5. Opiszmy okrąg na trójkącie ABC i wybierzmy na łuku AC (nie zawierającym punktu B) tego okręgu dowolny punkt E. Następnie oznaczmy kąty jak na rysunku 9.

Ponieważ czworokąt $ABCE$ jest wpisany w okrąg, więc $\varepsilon=180^\circ-\beta$. Następnie, zgodnie z treścią zadania mamy równość $\alpha+\gamma=\beta$. Zatem

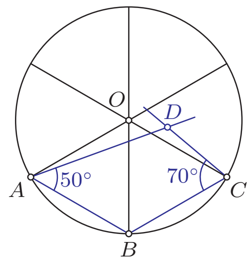
$$\delta=360^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)=360^\circ-2\beta=2\cdot(180^\circ-\beta)=2\varepsilon.$$

Teraz wielu uczestników używało fałszywego twierdzenia odwrotnego do twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym, wnioskując z powyższej równości pokrywanie się punktów D i O. Teza zadania jest wówczas oczywista.

Popełniony błąd w rozumowaniu nie jest jeszcze dowodem na to, że hipoteza „$O=D$” jest fałszywa: być może da się znaleźć inne, poprawne rozumowanie, które prowadzi do takiego wniosku. Aby się zatem przekonać, że takiego rozumowania nie ma i istotnie są czworokąty spełniające warunki zadania, w których $O\neq D$, wykonajmy starannie następującą konstrukcję.



rys. 9



rys. 10

Zacznijmy od podzielenia koła o środku O na 6 jednakowych wycinków (rys. 10). Wybierzmy następnie trzy kolejne punkty A, B i C podziału okręgu. Kąt ABC wynosi 120°. Poprowadźmy teraz półproste z punktów A i C tak, by tworzyły z odcinkami AB i CB odpowiednio kąty 50° i 70°, jak na rysunku 10. Niech punkt D będzie punktem przecięcia tych półprostych.

Czworokąt $ABCD$ spełnia warunki zadania, gdyż $\sphericalangle ABC=120^\circ$ oraz $\sphericalangle BAD+\sphericalangle BCD=50^\circ+70^\circ=120^\circ$. Jednocześnie widać, że punkty O (środek okręgu opisanego na trójkącie ABC) i D nie pokrywają się. Dzięki starannemu rysunkowi nie wpadliśmy zatem w opisaną wcześniej pułapkę.

Niedokładny rysunek może zmylić w sposób bardzo subtelny, o czym przekonamy się na przykładzie następującego rozumowania.

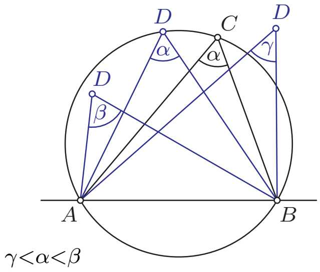
Narysujmy czworokąt $ABCD$ spełniający warunki zadania oraz okrąg opisany na trójkącie ABC i oznaczmy kąty (rys. 9):

$$\alpha=\sphericalangle BAD,\quad \beta=\sphericalangle ABC,\quad \gamma=\sphericalangle BCD,\quad \delta=\sphericalangle ADC.$$

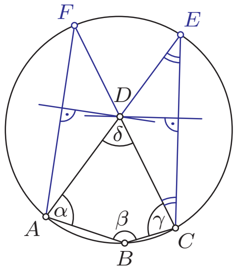
Tak jak wyżej wykazujemy, że $\delta=2\cdot(180^\circ-\beta)>180^\circ-\beta$, skąd wynika, że punkt D leży wewnątrz okręgu opisanego na trójkącie ABC. Korzystamy w tym miejscu z następującego twierdzenia, które warto znać:

Przypuśćmy, że punkty A, B i C leżą na okręgu k, a punkt D znajduje się po tej samej stronie prostej AB, co punkt C (rys. 11). Wówczas:

- *jeśli $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$, to D leży na okręgu k;*
- *jeśli $\sphericalangle ADB > \sphericalangle ACB$, to D leży wewnątrz okręgu k;*
- *jeśli $\sphericalangle ADB < \sphericalangle ACB$, to D leży na zewnątrz okręgu k.*



rys. 11



rys. 12

Wracamy do zadania 5. Przedłużmy boki AD i CD do przecięcia z okręgiem i otrzymane punkty przecięcia oznaczmy odpowiednio przez E i F (rys. 12).

Czworokąt $ABCE$ jest wpisany w okrąg, skąd uzyskujemy $\sphericalangle DEC = 180° - \beta$. Ponieważ kąt δ jest kątem zewnętrznym trójkąta CED, więc $\delta = \sphericalangle DEC + \sphericalangle DCE$. Jednocześnie $\delta = 2\cdot(180° - \beta)$, zatem $\sphericalangle DCE = 180° - \beta$. Wynika z tego, że $\sphericalangle DCE = \sphericalangle DEC$, czyli $CD = ED$. Punkt D jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego CED, a więc leży na symetralnej podstawy CE.

W ten sam sposób dowodzimy, że punkt D leży także na symetralnej odcinka AF. Punkt D jest zatem punktem przecięcia symetralnych dwóch różnych cięciw okręgu, czyli środkiem tego okręgu, a zatem punkty O i D pokrywają się.

Oczywiście, powyższy dowód musi zawierać błąd, gdyż jak wiemy teza „$O = D$" jest fałszywa. Proponuję Czytelnikom znalezienie luki i zmodyfikowanie rozumowania tak, aby otrzymać prawidłowe rozwiązanie zadania. Odpowiedź podam w następnym numerze *Kwadratu*.

Jak widzimy, niektóre zadania wymagały bardzo starannego wykończenia i przeprowadzenia rozumowania wolnego od luk, nieścisłości czy błędów. Moje refleksje mają pomóc przyszłym Olimpijczykom w takim właśnie starannym wykończeniu rozwiązań i mam nadzieję, że z każdym rokiem nieścisłości będzie mniej.

Wojciech Guzicki

Chochlik Olimpijski

Wierzymy, że podobnie jak dziennikarze mają chochlika drukarskiego, tak uczestnicy zawodów matematycznych mają złośliwego chochlika olimpijskiego, odpowiadającego za ich urocze potknięcia podczas redakcji rozwiązań. Poniżej zamieszczone są fragmenty prac z zeszłorocznej i tegorocznej edycji OMG, które wywołały szczególne rozbawienie wśród sprawdzających – mamy nadzieję, że zasłużą również na uśmiech Czytelników.

- Pola trójkątów ABC i XYZ mają jednakową długość podstawy.
- Nie może być tak, że nie ma takiej sytuacji, ponieważ nie jest możliwy taki układ wygranych/przegranych, aby nie było takiej trójki.
- Wiemy, że styczna do okręgu jest prostopadła do jednego z jego promieni.
- Kąty wierzchołkowe są równe, co wynika z równości między kątem wpisanym i dopisanym.
- Wyjąłem z pięciokąta czworościan $ABDE$.
- Trójkąty te są podobne, zatem ich podstawy również.
- Trójkąty są tworzone przez dwie przekątne i jedną ścianę.
- Korzystam z cechy przystawania: bok-kąt.
- Płaszczyzna styczna do tych kul istnieje, bowiem trzy kule dają razem sześć promieni.
- (...) więc równość nie zachodzi (to jest zachodzi, ale nie jest równością).
- Te liczby nie mogą być również pierwiastkami, ponieważ mnożąc pierwiastki uzyskujemy nowe, zaś dodając — nic z nimi nie możemy więcej zrobić.
- Jeśli suma trzech liczb dodatnich jest zerem, to każda z nich jest zerem.

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Nierówność trójkąta

5. Odbij punkt P symetrycznie względem ramion kąta, a następnie połącz odcinkiem tak otrzymane punkty. Punkty przecięcia tego odcinka z ramionami kąta są szukanymi punktami A i B.

Aby wykazać, że tak skonstruowane punkty stanowią rozwiązania zadania, wybierz dwa dowolne punkty A' i B' na ramionach tego kąta i uzasadnij, że obwód trójkąta $A'B'P$ jest większy lub równy od obwodu trójkąta ABP.

6. Niech α będzie miarą danego kąta. Obróć punkt P wokół punktu O o kąt α i połącz uzyskany punkt odcinkiem z punktem P. Punkt przecięcia tego odcinka z ramieniem kąta jest jednym z szukanych punktów X, Y. Drugi z tych punktów wyznacz w oparciu o warunek $OX = OY$.

Aby wykazać, że tak skonstruowane punkty stanowią rozwiązania zadania, wybierz na ramionach kąta dowolne dwa punkty X' i Y', dla których $OX' = OY'$ i uzasadnij, że $PX' + PY' \geqslant PX + PY$.

7. Niech A' będzie obrazem punktu A w symetrii względem prostej DM, a B' obrazem punktu B w symetrii względem prostej CM. Uzasadnij, że trójkąt $A'B'M$ jest równoboczny.

8. Niech ADK i CBL będą trójkątami równobocznymi zbudowanymi po zewnętrznej stronie danego prostokąta. Punkty przecięcia odcinka KL z okręgami opisanymi na trójkątach DAK i BCL są szukanymi punktami P i Q.

Aby wykazać, że tak skonstruowane punkty stanowią rozwiązania zadania, wybierz dowolne dwa punkty P' i Q' wewnątrz prostokąta i uzasadnij odpowiednią nierówność. W tym miejscu może okazać się przydatne zadanie 4.

Tożsamość Diofantosa

4. Wykorzystaj tożsamość (3) dla $n = -1$.

5. $3 = 2^2 - 1^2$.

6. Uzasadnij najpierw, że kwadrat liczby parzystej dzieli się przez 4, a kwadrat liczby nieparzystej przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1.

7. Uzasadnij najpierw, że gdyby $231 = 2a^2 + 3b^2$, to liczba a musiałaby być podzielna przez 3, po czym podstaw $a = 3c$, gdzie c jest pewną liczbą całkowitą. Dzieląc przez 3 otrzymasz równanie $77 = 6c^2 + b^2$. Wykorzystaj teraz fakt, że kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3 daje resztę 0 lub 1.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski (redaktor naczelny), Urszula Swianiewicz, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 4
maj 2012

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Od kuchni: ocenianie prac OMG

Do Komitetu Głównego OMG coraz częściej kierowane są pytania o to, kto i w jaki sposób ocenia rozwiązania zadań uczestników zawodów. Wychodząc zatem naprzeciw tym prośbom postanowiliśmy opisać na łamach *Kwadratu*, jak wygląda sprawdzanie prac naszej Olimpiady.

Prace zawodów drugiego i trzeciego stopnia OMG są oceniane centralnie przez specjalnie do tego celu powołaną *komisję oceniającą*. W jej skład wchodzą pracownicy wyższych uczelni i nauczyciele matematyki szkół ponadgimnazjalnych — wychowawcy wielu olimpijczyków, a także doktoranci i studenci matematyki — byli olimpijczycy, z których wielu to laureaci Olimpiady Matematycznej lub medaliści Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, najbardziej prestiżowych i znanych zawodów matematycznych na świecie.

Podobnie jak to ma miejsce w przypadku olimpiad matematycznych w innych krajach lub olimpiad międzynarodowych, podczas sprawdzania prac OMG, ocenie podlega przede wszystkim przedstawiony tok rozumowania. Jeśli go nie ma, jest niejasny, nieczytelny lub po prostu popełniane są błędy w wyciąganych wnioskach, uczeń nie otrzymuje punktów. Z kolei każde kompletne i poprawne rozwiązanie jest premiowane maksymalną liczbą punktów, niezależnie od wybranej przez ucznia metody rozwiązania.

Komisja oceniająca zbiera się po raz pierwszy natychmiast po zakończeniu zawodów, aby przedyskutować oraz ustalić kryteria oceniania dla poszczególnych zadań. Pracę rozpoczyna analiza kilkudziesięciu losowo wybranych rozwiązań każdego zadania. Rozwiązania te nie są jeszcze oceniane, a ich analiza pomaga jedynie zorientować się, jakie typowe błędy w rozumowaniu popełniali uczestnicy. Na tej podstawie ustalane są *kryteria oceniania*, które służą później jako podstawa do jednolitej oceny wszystkich prac.

Po ustaleniu kryteriów oceniania komisja oceniająca zostaje podzielona na pięć kilkuosobowych zespołów, z których każdy odpowiada za ocenę jednego, ustalonego zadania. Pracą każdego zespołu kieruje tzw. *kierownik zadania*. Kierownikiem jest na ogół nauczyciel akademicki z wieloletnim doświadczeniem w sprawdzaniu prac olimpijczyków.

Każde rozwiązanie jest czytane przez dwóch ekspertów z danego zespołu. Przydział pary sprawdzających do poszczególnych prac jest losowy i są one oceniane niezależnie. Oznacza to, że oceniający nie piszą na arkuszu zawodnika żadnych uwag. Wszystkie uwagi oraz recenzja, wraz z proponowaną oceną końcową, umieszczane są na oddzielnym formularzu, do którego inni sprawdzający nie mają wglądu aż do zakończenia sprawdzania.

Po zakończeniu sprawdzania osoby, które czytały te same prace porównują wystawione oceny. Jeśli oceny są zgodne, stają się one oceną ostateczną. Jeśli zaś oceny różnią się, obaj sprawdzający czytają dokładnie daną pracę raz jeszcze, tym razem wspólnie, po czym w dyskusji ustalają ostateczną ocenę. Zdarza się, że oceniający nie mogą dojść do porozumienia i wtedy o konsultację proszony jest kierownik zadania.

Powyższy schemat jest bardzo skrupulatnie przestrzegany, a prace są stale nadzorowane przez przewodniczącego Komitetu Głównego OMG oraz ogólnopolskiego koordynatora OMG.

Po ogłoszeniu wyników, każdy uczestnik zawodów drugiego i trzeciego stopnia ma możliwość sprawdzenia uzyskanej punktacji i złożenia odwołania. Wszystkie odwołania są starannie analizowane przez specjalnie do tego celu powołaną *komisję odwoławczą*. Jej zadaniem jest stwierdzenie, czy prace zostały ocenione zgodnie z przyjętymi kryteriami i czy nie doszło do przeoczenia pewnego istotnego fragmentu rozumowania. Każdą zmianę oceny komisja odwoławcza konsultuje z przewodniczącym Komitetu Głównego OMG. Ocena wystawiona przez komisję odwoławczą jest ostateczna.

Dodajmy, że procedura odwoławcza jest bardzo pracochłonna i długotrwała, a pomyłki przy ocenianiu prac, ze względu na staranny dobór sprawdzających, zdarzają się bardzo rzadko. Dlatego możliwość składania odwołań nie jest powszechnie przyjętą praktyką w organizacji olimpiad matematycznych w innych krajach. Wiele krajów stosuje zasadę, że ocena wystawiona przez sprawdzających jest ostateczna i nie podlega dyskusji, wskazując na podobieństwo tej sytuacji do mistrzostw w piłce nożnej: decyzje sędziego są niepodważalne; nawet jeśli przeoczy on bramkę, nie ma możliwości jakiegokolwiek odwołania.

W OMG zasada ta jest stosowana tylko w części korespondencyjnej zawodów pierwszego stopnia. Rozwiązania zadań tej części olimpiady są oceniane lokalnie w Komitetach Okręgowych. Jednak w przypadku napotkania w pracach uczniów powtarzających się typowych błędów, Komitety wymieniają między sobą opinie, starając się ujednolicić w skali całego kraju stosowane kryteria.

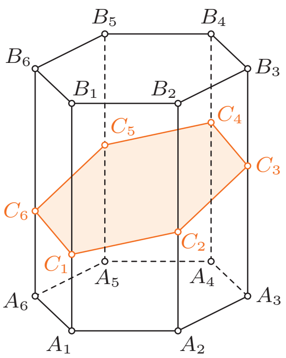
Rozwiązania zadań konkursowych OMG publikowane są w corocznych sprawozdaniach Komitetu Głównego. Zespół redagujący te opracowania dba szczególnie o to, aby prezentowane rozwiązania świeciły przykładem nie tylko pod względem merytorycznym, ale również redakcyjnym. Zachęcamy zatem gorąco do korzystania z naszych publikacji i wzorowaniu się na nich przy redakcji swoich rozwiązań, nie tylko na Olimpiadzie!

Komitet Główny OMG

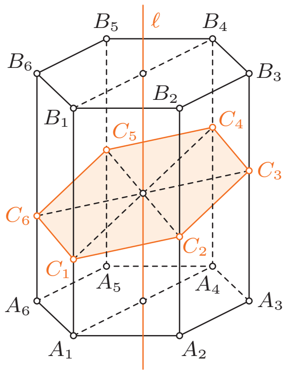
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przecinamy graniastosłup

Rozważmy graniastosłup prawidłowy sześciokątny o podstawach $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ i $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ oraz płaszczyznę, która przecina krawędź A_iB_i w punkcie C_i dla $i=1,2,\ldots,6$ (rys. 1). Okazuje się, że ta konfiguracja posiada wiele ciekawych własności, o których w niniejszym artykule opowiemy.



rys. 1



rys. 2

Zadanie 1.

Udowodnij, że w sześciokącie $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ przeciwległe boki są równoległe.

Rozwiązanie

Wykażemy, że proste C_1C_2 i C_4C_5 są równoległe (dla pozostałych par postępujemy analogicznie). Ponieważ dany graniastosłup jest prawidłowy, to płaszczyzny $A_1A_2B_2B_1$ i $A_4A_5B_5B_4$ są równoległe, a więc nie mają punktów wspólnych. Prosta C_1C_2 należy do pierwszej z tych płaszczyzn, a prosta C_4C_5 — do drugiej. Stąd wniosek, że również te dwie proste nie mają punktów wspólnych. Leżą one ponadto w jednej płaszczyźnie $C_1C_2...C_6$, a zatem muszą być równoległe.

Zadanie 2.

Udowodnij, że w sześciokącie $C_1C_2...C_6$ przekątne C_1C_4, C_2C_5 i C_3C_6 przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez ℓ prostą łączącą środki podstaw graniastosłupa (rys. 2). Niech C będzie punktem przecięcia tej prostej z płaszczyzną $C_1C_2...C_6$. Wykażemy, że punkt C jest punktem wspólnym przekątnych C_1C_4, C_2C_5 i C_3C_6.

Prosta ℓ leży w płaszczyźnie $A_1A_4B_4B_1$, a zatem punkt C także leży w tej płaszczyźnie. Punkt C leży więc na przecięciu płaszczyzn $A_1A_4B_4B_1$ i $C_1C_2...C_6$, a więc na prostej C_1C_4. Analogicznie dowodzimy, że punkt C należy do prostych C_2C_5 i C_3C_6, co kończy dowód.

W dalszej części artykułu będziemy wykorzystywać następujący użyteczny fakt dotyczący trapezu.

Zadanie 3.

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AD i BC. Punkt K jest środkiem odcinka AB (rys. 3). Prosta przechodząca przez punkt K i równoległa do podstaw trapezu przecina ramię CD w punkcie L. Wykaż, że punkt L jest środkiem odcinka CD oraz $KL=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

Rozwiązanie

Niech E będzie punktem przecięcia prostych BL i AD (rys. 3). Skoro proste KL i AD są równoległe, to na mocy twierdzenia Talesa uzyskujemy

$$\frac{BL}{EL}=\frac{BK}{AK}=1,$$

czyli $BL=EL$. Wiemy, że proste DE i BC są równoległe, a więc $\sphericalangle DEL=\sphericalangle CBL$. Zatem $\sphericalangle ELD=\sphericalangle BLC$, skąd wniosek, że trójkąty DEL i CBL są przystające (cecha kąt–bok–kąt). Wobec tego $CL=DL$, czyli punkt L jest środkiem odcinka CD. Ponadto

$$KL=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}(AD+DE)=\frac{1}{2}(AD+BC).$$

Wracamy do graniastosłupa. Wprowadźmy oznaczenie: $d_i=A_iC_i$ dla $i=1,2,\ldots,6$. Niech A będzie środkiem podstawy $A_1A_2...A_6$. Zdefiniujmy prostą ℓ i punkt C tak, jak w rozwiązaniu zadania 2. Oznaczmy jeszcze przez s długość odcinka AC.

Zadanie 4.

Udowodnij, że $d_1+d_4=d_2+d_5=d_3+d_6$.

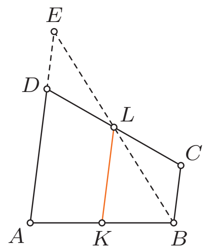
Rozwiązanie

Wystarczy, jeśli udowodnimy, że $d_1+d_4=2s$. W podobny sposób bowiem wykażemy, że $d_2+d_5=2s$ oraz $d_3+d_6=2s$, co da nam rozwiązanie zadania.

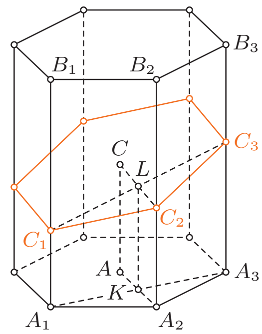
Spójrzmy na czworokąt $A_1A_4C_4C_1$ (rys. 2). Jest to trapez o podstawach A_1C_1 i A_4C_4. Ponadto prosta ℓ przechodzi przez środek ramienia A_1A_4 tego trapezu i jest równoległa do jego podstaw. Wobec tego, na mocy zadania 3, uzyskujemy

$$s=AC=\frac{1}{2}(A_1C_1+A_4C_4)=\frac{1}{2}(d_1+d_4),$$

co kończy dowód.



rys. 3



rys. 4

Zadanie 5.

Udowodnij, że $s=d_1-d_2+d_3$.

Rozwiązanie

Niech K będzie punktem przecięcia odcinków A_1A_3 i A_2A, natomiast L — punktem przecięcia odcinków C_1C_3 i C_2C (rys. 4). Udowodnimy, że

$$d_1+d_3=2\cdot KL=d_2+s,$$

co zakończy rozwiązanie zadania.

Odcinek KL należy do płaszczyzn $A_1A_3C_3C_1$ oraz A_2C_2CA. Ponieważ każda z tych płaszczyzn jest prostopadła do podstawy graniastosłupa, to również odcinek KL jest do niej prostopadły. Stąd wniosek, że odcinek KL jest równoległy do wszystkich krawędzi bocznych graniastosłupa oraz do prostej ℓ.

Spójrzmy na trapez $A_1A_3C_3C_1$ (rys. 4). Punkt K jest środkiem odcinka A_1A_3, a prosta KL jest równoległa do podstaw A_1C_1 i A_3C_3 tego trapezu. Wobec tego, wykorzystując zadanie 3, dostajemy

$$KL=\frac{1}{2}(A_1C_1+A_3C_3)=\frac{1}{2}(d_1+d_3),$$

skąd uzyskujemy pierwszą z postulowanych zależności.

Aby otrzymać drugą równość, spójrzmy na trapez A_2C_2CA. Punkt K jest środkiem odcinka AA_2 oraz prosta KL jest równoległa do podstaw A_2C_2 i AC tego trapezu. Wobec tego

$$KL = \frac{1}{2}(A_2C_2 + AC) = \frac{1}{2}(d_2 + s),$$

co daje natychmiast drugą równość.

Na koniec jak zwykle kilka zadań dla Czytelników do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do tych zadań podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 6.
Udowodnij, że w sześciokącie $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$:

a) punkt C jest jego środkiem symetrii,
b) przekątna C_1C_4 jest równoległa do boków C_2C_3 i C_5C_6,
c) przekątna C_1C_4 jest dwa razy dłuższa od każdego z boków C_2C_3 i C_5C_6,
d) przekątne C_1C_4, C_2C_5, C_3C_6 dzielą dany sześciokąt $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ na sześć trójkątów o równych polach.

Zadanie 7.
Wykaż, że $d_1 + d_3 + d_5 = d_2 + d_4 + d_6$.

Zadanie 8.
Udowodnij, że $d_1^2 + d_3^2 + d_5^2 = d_2^2 + d_4^2 + d_6^2$.

Zadanie 9. (IV OMG, zawody stopnia drugiego) Ostrosłup prawidłowy sześciokątny przecięto płaszczyzną, która przecina wszystkie jego krawędzie boczne. W przekroju otrzymano szesciokąt wypukły $ABCDEF$. Wykaż, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Michał Kieza

Zawody, zawody i po zawodach...

Zakończona w marcu VII edycja Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów wiązała się z jej istotnym rozwojem. Wprowadzenie testu do zawodów pierwszego stopnia, jako dodatkowego elementu rywalizacji, zaowocowało gwałtownym zwiększeniem liczby uczestników Olimpiady. W odpowiedzi na tak ogromny wzrost popularności, powstały inicjatywy mające podtrzymać to zainteresowanie. Ich przykładem są liczne seminaria dla nauczycieli organizowane w całej Polsce oraz powołanie do życia niniejszej gazetki. Jednocześnie zauważalnie podniósł się poziom pisanych przez uczestników prac, w stosunku do lat ubiegłych.

W tegorocznym finale tylko dwie osoby, spośród 214, uzyskało maksymalną liczbę punktów. Jedną z nich była Anna Czerwińska z Zespołu Szkół Ogólnokształcących nr 7 w Szczecinie, która ponadto rozwiązała poprawnie wszystkie zadania z testu oraz II etapu i zgodziła się udzielić nam krótkiego wywiadu.

Łukasz Rajkowski: Maksymalna liczba punktów z testu i na dwóch kolejnych etapach OMG. Jaka jest Twoja recepta na takie osiągnięcia?

Ania Czerwińska: Trudno powiedzieć... Wiele czasu spędzam rozwiązując zadania, jest to jednak bardziej przyjemność niż żmudny obowiązek. Korzystałam również z kółka prowadzonego kiedyś na stronie OMG i przerabiałam problemy z poprzednich edycji.

ŁR: Od dawna interesujesz się „królową nauk”?

AC: Zaczęłam już w szkole podstawowej, gdzie od trzeciej klasy miałam indywidualny tok nauczania. Z pewnością zawdzięczam to po części mojej ówczesnej nauczycielce, która potrafiła zaciekawić mnie przedmiotem. Ponadto moje matematyczne zmagania wspiera tata, który jest programistą.

ŁR: Jakie masz wrażenia dotyczące tegorocznej Olimpiady — czy była trudniejsza niż poprzednie? Jak zareagowałaś na wprowadzenie testu?

AC: Test był dla mnie pewnym zaskoczeniem, jednak nie przeszkadzała mi taka forma na pierwszym etapie. Odnośnie poziomu trudności, wydaje się że zadania finałowe były trudniejsze niż w zeszłym roku, natomiast zadania z drugiego etapu były chyba stosunkowo proste.

ŁR: W marcu byłaś wraz z przewodniczącym Komitetu Głównego OMG gościem programu „Kawa czy herbata?” w TVP1 (odnośnik do relacji na stronie OMG — przyp. red.). *Jak się czułaś przed kamerą? Trema była?*

AC: Trochę tremy oczywiście było, zwłasza że był to mój pierwszy raz przed kamerą. Pytania redaktorów nie były jednak podchwytliwe i jakoś wyszło. Jedyną wadą było to, że musiałam wcześnie wstać — program rozpoczyna się o szóstej, w związku z czym na nogach byłam już o 4.40...

ŁR: Pod koniec programu prowadzący spytał, czy lubisz śpiewać. Odpowiedź była twierdząca, jednak mało rozwinięta, dlatego pozwolę sobie pociągnąć ten wątek. Czy ćwiczysz śpiewanie lub grę na jakimś instrumencie?

AC: Odnośnie śpiewu, robię to dla czystej przyjemności i nie ćwiczę „zawodowo”. Kiedyś natomiast przez rok uczyłam się grać na altówce w szkole muzycznej, a następnie miałam prywatne lekcje gry na pianinie. Dzięki temu mogę od czasu do czasu zasiąść dla przyjemności przy instrumencie.

ŁR: Myślisz, że istnieje związek między muzyką a matematyką? Czy jeśli ktoś ma uzdolnienia w jednym z tych kierunków, to prawdopodobnie w drugim również?

AC: Podejrzewam, że tak. Znam wiele osób, świadczących o tym, że uzdolnienia matematyczne i muzyczne idą w parze.

ŁR: Niedawno zakończyła się pierwsza Europejska Olimpiada Matematyczna dla Dziewcząt, gdzie zwyciężyły nasze reprezentantki. Co sądzisz o pomyśle organizowania osobnych zawodów dla przedstawicielek płci pięknej?

AC: Pomysł wydaje się dość egzotyczny — ja na pewno bym na niego nie wpadła, choć jestem zaciekawiona samą inicjatywą.

ŁR: Czy w takim razie powinniśmy się spodziewać w Polsce OMD, czyli Olimpiady Matematycznej Dziewcząt?

AC: śmiech... mogłoby to się cieszyć jakimś zainteresowaniem...

ŁR: Zbliżają się pierwsze Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne na poziomie gimnazjum, na których będziesz reprezentowała Polskę wraz z piątką innych laureatów OMG. Jak idą przygotowania?

AC: Nie przygotowuję się bardziej intensywnie niż przed olimpiadami, w jakich dotychczas brałam udział. Uważam, że umiejętności nabyte w trakcie uczestniczenia w OMG w zupełności wystarczą.

ŁR: Jakie rady dałabyś uczniowi, który chciałby osiągnąć sukces w olimpiadzie matematycznej?

AC: Musi się wziąć do pracy, gdyż na pewno to samo nie przyjdzie. Powinien się rozwijać w wybranym przez siebie kierunku poprzez rozwiązywanie zadań, czy uczęszczanie na kółko. Nigdy nie jest tak, że ktoś jest dobry sam z siebie, zawsze jest to również kwestia włożonego wysiłku. Ponadto oczywiście musi mu to wszystko sprawiać przyjemność.

ŁR: A w jaki sposób nauczyciel może takiemu uczniowi pomóc?

AC: Sposobów jest wiele — może zorganizować kółko, dać dodatkowe zadania, pokazać ciekawe zagadnienia czy polecić dobrą książkę. Z pewnością nauczyciel pełni tutaj ogromną rolę.

ŁR: Serdecznie dziękuję za rozmowę i trzymam kciuki za wynik najbliższych zawodów!

Kolejne zwycięstwo Polaków

W dniach 3–7 listopada 2011 r. w Niemczech odbyły się 22. Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich (*Baltic Way*), w których udział wzięły reprezentacje następujących 11 krajów: Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Litwy, Łotwy, Niemiec, Norwegii, Szwecji, Polski oraz — na specjalne zaproszenie organizatorów — Republiki Południowej Afryki. Każda reprezentacja liczyła 5 uczniów.

Polska delegacja została wybrana w kwietniu 2011 r. na podstawie wyników ubiegłorocznej edycji Olimpiady Matematycznej. W jej skład weszli:

- Dominik Burek – III LO w Tarnowie;
- Grzegorz Głuch – III LO we Wrocławiu;
- Igor Kotrasiński – XIV LO w Warszawie;
- Janusz Schmude – IV LO w Toruniu;
- Anna Siennicka – XIV LO w Warszawie.

Wszyscy ci uczniowie byli laureatami OMG w 2009 r. lub w 2010 r.

Zawody odbyły się dnia 5 listopada i miały charakter zespołowy: każda drużyna pracowała wspólnie w jednej sali, mając 4,5 godziny na rozwiązanie 20 zadań. Za każde zadanie można było otrzymać od 0 do 5 punktów. Drużyna polska odniosła zdecydowane zwycięstwo, osiągając wynik 94 punktów. Drugie i trzecie miejsce zajęły odpowiednio Łotwa z wynikiem 80 punktów oraz Niemcy z wynikiem 78 punktów.

Nasi zawodnicy oddali 19 rozwiązań — wszystkie oceniono na 5 punktów, z jednym wyjątkiem ocenionym na 4. Nie poradzili sobie z jednym z zadań zaproponowanym na zawody przez Polskę.

Nie pierwszy zresztą raz polskiej drużynie nie udało się rozwiązać zadania zgłoszonego przez własny kraj: również w zawodach *Baltic Way* w 2010 r. jedno z 2 nierozwiązanych przez naszą reprezentację zadań pochodziło właśnie z Polski. Mimo to również wtedy Polacy zdecydowanie wygrali zawody, podobnie jak w wielu poprzednich edycjach. Zadania proponowane przez nasz kraj na *Baltic Way* cieszą się zresztą sporym uznaniem: w 2011 r. do zestawu 20 zadań konkursowych wybrano ich 4, a w 2010 r. aż 6.

Nazwa *Baltic Way* związana jest z wydarzeniem historycznym o tej samej nazwie, które miało miejsce 23 sierpnia 1989 r. W dniu tym niemal dwa miliony mieszkańców trzech republik nadbałtyckich — wchodzących jeszcze w skład Związku Radzieckiego — utworzyło łańcuch ludzi o długości ponad 600 km, trzymających się nawzajem za ręce. Demonstracja ta przyspieszyła odzyskanie niepodległości przez Litwę, Łotwę i Estonię. Na pamiątkę tego wydarzenia zorganizowane zostały w 1990 r. pierwsze zawody matematyczne pod nazwą *Baltic Way*. Wtedy udział wzięły jedynie Litwa, Łotwa i Estonia, ale w kolejnych edycjach do zawodów stopniowo dołączyły pozostałe kraje mające dostęp do Morza Bałtyckiego. Stałym uczestnikiem jest również Islandia — kraj, który jako pierwszy na świecie oficjalnie uznał niepodległość Litwy, Łotwy i Estonii.

Organizatorzy mają ponadto prawo do zaproszenia jednego dodatkowego kraju do jednorazowego, gościnnego udziału w zawodach. Trzeba uczciwie przyznać, że Niemcom nie wychodzi korzystanie z tego prawa: kiedy w 2001 r. zaprosili drużynę z Izraela, zakończyła ona pracę ponad godzinę przed upływem regulaminowego czasu i osiągnęła wynik maksymalny 100 punktów (drugi wynik wynosił 82 punkty). Tym razem zaproszenie Niemców otrzymała reprezentacja RPA, która zajęła ostatnie miejsce...

Niemieccy organizatorzy zapewnili liczne atrakcje, z których najciekawszą była wizyta w Instytucie Fizyki Plazmowej im. Maxa Plancka w Greifswaldzie, gdzie powstaje reaktor fuzji plazmowych. Miejscowi naukowcy mają nadzieję, że będzie on całkowicie bezpieczną alternatywą dla dzisiejszych elektrowni jądrowych. Dzięki temu, że urządzenie było w trakcie budowy, udało się zajrzeć do wnętrza głównego reaktora. Bez problemu pozwalano robić zdjęcia. Warto to porównać z wizytą w elektrowni Bełchatów, którą finaliści LVII Olimpiady Matematycznej zwiedzali w kwietniu 2006 r., gdzie próba wyjęcia aparatów fotograficznych spotkała się z alergiczną wręcz reakcją pracowników...

Zawody *Baltic Way* odbyły się w Polsce dwukrotnie: w 1998 r. w Warszawie oraz w 2008 r. w Gdańsku. Następne zawody odbędą się w listopadzie br. w Estonii.

Przewodniczący delegacji polskiej — Kamil Duszenko

Komentarz do zadania z poprzedniego numeru

Zaprezentowane w poprzednim numerze *Kwadratu* fałszywe rozwiązanie zadania 5. zakończyło się stwierdzeniem, że punkt leżący na symetralnych dwóch cięciw okręgu jest środkiem tego okręgu. Jest to prawda jedynie w sytuacji, gdy rozważane cięciwy *nie są równoległe*. Tymczasem okazuje się, że cięciwy CE i AF są równoległe, co wynika natychmiast z równości: $\sphericalangle AFC = \sphericalangle AEC = \sphericalangle FCE$. W takim przypadku symetralne odcinków CE i AF *pokrywają się* i jednocześnie zawierają dwusieczną kąta CDE. Wobec tego punkt O leży na tej prostej i w konsekwencji jest on jadnakowo odległy od prostych AD i CD.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski (redaktor naczelny), Urszula Swianiewicz, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 5
czerwiec 2012

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Sztuczka z iloczynem

W teorii liczb często poszukuje się rozwiązań równania w zbiorze liczb całkowitych (innymi słowy, rozwiązuje się *równanie diofantyczne*). Istnieje wiele metod wykorzystywanych w tym celu — jedną z nich przedstawię w niniejszym artykule. Polega ona na sprowadzeniu rozważanej równości do postaci

$$(\ldots)(\ldots)=k, \tag{1}$$

gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Wówczas wszystkie możliwe rozkłady liczby k na iloczyn dwóch liczb całkowitych wyznaczają nam serię układów równań, których rozwiązanie pozwala rozwikłać problem. Powstaje pytanie, jak i kiedy można doprowadzić równanie do takiej postaci? W niektórych przypadkach warto pamiętać prostą tożsamość

$$(x+a)(y+b)=xy+bx+ay+ab, \tag{2}$$

gdyż zdarza się, że równanie ma bardzo zbliżoną postać do prawej strony powyższej zależności i korzystając z niej możemy „zwinąć” pewne wyrażenia, jak w równości (1). Zazwyczaj rolę x i y grają zmienne niewiadome, natomiast rolę a i b — pewne konkretne liczby. Popatrzmy na kilka przykładów.

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie $xy+1=x+y$.

Rozwiązanie

Przenosząc x i y na lewą stronę, uzyskujemy

$$xy-x-y+1=0.$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy postać prawej strony tożsamości (2) dla $a=b=-1$. Zatem możemy zapisać rozpatrywane równanie w postaci

$$(x-1)(y-1)=0.$$

Lewa strona jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno wyrażenie w nawiasach jest równe 0. To ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x=1$ lub $y=1$. Wobec tego wszystkie rozwiązania (x,y) danego równania są postaci $(1,s)$ lub $(t,1)$, gdzie s i t są dowolnymi liczbami całkowitymi.

W powyższym przykładzie wystarczyło uporządkować wyrazy, aby dostać wyrażenie z równości (2). Zazwyczaj jednak po takim wstępnym przekształceniu nie dostajemy całej prawej strony tej tożsamości. Wówczas należy do obu stron równania dodać brakującą część, co ilustruje nasz kolejny przykład.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie $xy=x+y$.

Rozwiązanie

Przenosząc wszystko na lewą stronę, dostajemy

$$xy-x-y=0.$$

W odróżnieniu od poprzedniego przykładu, w tym brakuje jedynki, która posłużyłaby nam do zapisania lewej strony jako iloczynu dwóch wyrażeń algebraicznych. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, aby tę jedynkę dodać do obu stron, otrzymując:

$$xy-x-y+1=1.$$

Teraz możemy „zwinąć” wyrażenie po lewej stronie:

$$(x-1)(y-1)=1.$$

Iloczyn dwóch liczb całkowitych wynosi 1 wtedy i tylko wtedy, gdy oba czynniki tego iloczynu są równe 1 lub oba są równe -1. To prowadzi do dwóch możliwych układów równań

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x-1=-1 \\ y-1=-1. \end{cases}$$

Stąd $(x,y)=(2,2)$ lub $(x,y)=(0,0)$.

Uzyskaliśmy zatem następujący sposób postępowania: najpierw sprowadzamy badane równanie do postaci

$$xy+bx+ay=c.$$

Następnie zapisujemy je w formie:

$$xy+bx+ay+ab=c+ab,$$

którą, zgodnie z równością (2), możemy zapisać jako

$$(x+a)(y+b)=c+ab.$$

Teraz możliwe rozkłady liczby $c+ab$ na iloczyn dwóch liczb całkowitych dają nam układy równań. Po ich rozwiązaniu uzyskujemy wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające dane równanie.

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie $2xy+3x+y=-1$.

Rozwiązanie

W tym przykładzie pojawił się współczynnik — różny od 1 — przy wyrazie xy, co uniemożliwia nam skorzystanie z tożsamości (2). Powinniśmy zatem zmodyfikować poprzednie rozumowanie.

Zauważmy, że do samego przedstawienia wyrażenia jako iloczynu dwóch innych wyrażeń nie potrzebowaliśmy tego, by liczby a i b były całkowite. Innymi słowy, tożsamość (2) jest słuszna dla *dowolnych* liczb a i b, niekoniecznie całkowitych.

Zapiszmy zatem dane równanie w postaci

$$xy+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y=-\frac{1}{2}.$$

Wyrażenie po lewej stronie posiada już znaną nam postać, możemy więc skorzystać z wcześniejszych przeksz-

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

tałceń:

$$xy+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\,.$$

Mnożąc teraz obie strony równania przez 4 w celu usunięcia ułamków, dostajemy:

$$(2x+1)(2y+3)=1,$$

a to już potrafimy rozwiązać poznanymi wcześniej metodami. Ostatecznie otrzymujemy dwa rozwiązania wyjściowego równania: $(x,y)=(0,-1)$ oraz $(x,y)=(-1,-2)$.

Na koniec jak zwykle kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie

a) $xy=x+2y$,
b) $xy=3x+5y+7$,
c) $3xy-x+2y=1$,
d) $2xy=x+y$.

Zadanie 5.

Dana jest liczba pierwsza p. Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}.$$

Michał Kieza

Pierwsze koty za płoty ;)

W dniach 20–23 maja 2012 r. w Mszanie Dolnej odbyły się I Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów (*CPS Juniorów*). Uczestniczyło w nich po sześciu zawodników w wieku gimnazjalnym z Czech, Polski i Słowacji. Polska delegacja została wyłoniona na podstawie wyników tegorocznej edycji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. W jej skład weszli:

- Anna Czerwińska (ZSO nr 7 w Szczecinie),
- Konrad Majewski (Gimnazjum nr 42 w Warszawie),
- Marcin Michorzewski (ZSO nr 7 w Szczecinie),
- Konrad Paluszek (Gimnazjum nr 42 w Warszawie),
- Oskar Szymański (Katolickie Gimnazjum im. św. Stanisława Kostki w Kielcach),
- Jan Tabaszewski (ZS nr 51 w Warszawie).

W poniedziałek 21 maja miały miejsce zawody indywidualne. W czasie 3,5 godziny zawodnicy rozwiązywali 5 zadań. Każde z nich oceniane było w skali od 0 do 5 punktów. Zwyciężył Konrad Majewski, rozwiązując bezbłędnie wszystkie zadania i zdobywając maksymalną liczbę punktów.

We wtorek 22 maja odbyły się zawody drużynowe. Zawodnicy zostali podzieleni na trzyosobowe zespoły — po jednym uczniu z każdego kraju. Drużyny wybrano metodą losowania. Każda z nich w ciągu 5 godzin rozwiązywała 6 zadań. Dodatkową trudność stanowił fakt, że treści zadań napisane były w różnych językach: dwa po czesku, dwa po polsku i dwa po słowacku. Ponadto rozwiązania zadań, których treść napisana była po czesku, należało zredagować w języku słowackim itd. Zawodnicy poradzili sobie z tym bardzo dobrze. Zwyciężyła drużyna w składzie: Ema Krakovská (Słowacja), Viktor Něměček (Czechy) i Konrad Majewski (Polska), zdobywając 29 punktów na 30 możliwych.

Każdego dnia po zawodach odbywało się wspólne omówienie zadań. Zawodnicy prezentowali przy tablicy swoje rozwiązania we własnym języku, co nie stanowiło istotnej bariery dla uczestników z innych krajów. Po omówieniu zadań uczniowie mieli okazję spędzić wspólnie czas i lepiej się poznać, grając w siatkówkę i bilard.

Chociaż Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów odbyły się w tym roku po raz pierwszy, to tradycja rywalizacji matematycznej naszych trzech krajów jest znacznie dłuższa. Sięga ona czerwca 2001 roku. Czesi postanowili wówczas zaprosić Polaków do udziału we wspólnych zawodach, które dotychczas odbywały się jedynie między drużynami czeską a słowacką. W ten sposób zainicjowane zostały Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne. Uczestniczą w nich każdego roku uczniowie szkół ponadgimnazjalnych, którzy kilka tygodni później będą reprezentować swoje kraje na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej.

Kolejne zawody *CPS Juniorów* znów odbędą się w Mszanie Dolnej. Wezmą w nich udział najlepsi zawodnicy przyszłorocznej edycji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

Joanna Ochremiak — przewodnicząca delegacji polskiej

O n kolejnych liczbach

Wśród n kolejnych liczb całkowitych istnieje taka, która dzieli się przez n. Ta prosta obserwacja ma całkiem interesujące konsekwencje. W szczególności, iloczyn n kolejnych liczb całkowitych dzieli się przez n. Przyjrzyjmy się kilku przykładom.

Zadanie 1.

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n, liczba n^2-n jest parzysta.

Rozwiązanie

Zapiszmy dane wyrażenie w postaci $n(n-1)$. Ponieważ wśród dwóch kolejnych liczb całkowitych któraś dzieli się przez 2, to dana liczba jest parzysta.

Zadanie 2.

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n, liczba n^3-n jest podzielna przez 6.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$n^3-n=n(n^2-1)=(n-1)n(n+1)\,.$$

Otrzymaliśmy tym razem iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych. Jedna z nich dzieli się przez 3, a zatem cały iloczyn również.

Ponieważ największy wspólny dzielnik liczb 2 i 3 równa się 1 (innymi słowy: liczby 2 i 3 są *względnie pierwsze*), więc pozostaje dowieść, że dana liczba jest podzielna przez 2. Jednak z poprzedniego zadania wiemy już, że liczba $n(n-1)$ dzieli się przez 2 — tym bardziej liczba $(n-1)n(n+1)$.

Kolejny przykład, choć wygląda podobnie, jest nieco trudniejszy.

Zadanie 3.

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n, liczba n^5-n jest podzielna przez 30.

Rozwiązanie

Ponieważ

$$n^5-n=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)=$$
$$=(n-1)n(n+1)(n^2+1),$$

to z poprzedniego zadania wynika, że dana liczba jest podzielna przez 6. Ponieważ liczby 5 i 6 są względnie pierwsze, więc aby rozwiązać zadanie, pozostaje uzasadnić podzielność badanego wyrażenia przez 5.

Wyrażenie w ostatnim nawiasie utrudnia nam napisanie n^5-n w postaci iloczynu pięciu kolejnych liczb całkowitych. Możemy jednak przekształcić je w następujący sposób:

$$n^2+1=n^2-4+5=(n-2)(n+2)+5.$$

Dzięki temu otrzymujemy

$$n^5-n=(n-1)n(n+1)\big((n-2)(n+2)+5\big)=$$
$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1).$$

Pierwszy składnik powyższego wyrażenia jest podzielny przez 5, bowiem jest to iloczyn pięciu kolejnych liczb całkowitych. Drugi składnik jest także podzielny przez 5, a zatem całe wyrażenie również.

Kolejne zadanie można rozwiązać, analizując reszty z dzielenia liczby n przez 3. Poniżej przedstawimy inne rozumowanie, nawiązujące do omawianej metody.

Zadanie 4. (V OMG, zawody stopnia drugiego)

Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby

$$n^2+n+1 \quad \text{oraz} \quad n^2+n+3$$

są pierwsze.

Rozwiązanie

Dla $n=1$ otrzymujemy

$$n^2+n+1=3 \quad \text{oraz} \quad n^2+n+3=5,$$

zatem obie liczby są pierwsze. Udowodnimy, że $n=1$ jest jedyną liczbą, spełniającą warunki zadania.

W tym celu wykażemy, że jeśli $n>1$, to któraś z rozważanych liczb jest podzielna przez 3. A ponieważ

$$n^2+n+3>n^2+n+1>3,$$

więc któraś z powyższych dwóch liczb nie może być liczbą pierwszą.

Zauważmy, że wśród trzech kolejnych liczb

$$n^2+n+1, \quad n^2+n+2, \quad n^2+n+3$$

któraś dzieli się przez 3. Wystarczy zatem wykazać, że dla żadnej liczby całkowitej $n>1$, liczba n^2+n+2 nie dzieli się przez 3.

Wśród trzech kolejnych liczb całkowitych n, $n+1$ oraz $n+2$, dokładnie jedna dzieli się przez 3. Jeśli jest nią n lub $n+1$, to liczba

$$n^2+n+2=n(n+1)+2$$

nie może dzielić się przez 3. Jeśli zaś podzielna przez 3 jest liczba $n+2$, to liczba n, a co za tym idzie także liczba n^2, nie jest podzielna przez 3. Wtedy również liczba

$$n^2+n+2=n^2+(n+2)$$

nie może być podzielna przez 3.

Na koniec jak zwykle kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5.

Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n, co najmniej jedna z liczb n^4-8n, n^4+8n jest podzielna przez 3.

Zadanie 6.

Udowodnij, że dla żadnej liczby całkowitej n, liczba $(n+1)^3-n$ nie dzieli się przez 6.

Zadanie 7.

Wykorzystując równości

$$n^2+n+1=(n-2)(n+3)+7,$$
$$n^2-n+1=(n+2)(n-3)+7,$$

wykaż, że dla każdej liczby całkowitej n, liczba n^7-n jest podzielna przez 7.

Uwaga

Niektóre z powyższych zadań są szczególnymi przypadkami tzw. *małego twierdzenia Fermata: Jeśli p jest liczbą pierwszą, to dla każdej liczby całkowitej n, liczba n^p-n jest podzielna przez p.*

Michał Kieza

Reprezentacja Polski znów zwycięża!

W dniach 10–16 kwietnia 2012 r. w Cambridge w Wielkiej Brytanii odbyła się I Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt (European Girls' Mathematical Olympiad, EGMO). W skład delegacji polskiej, wyłonionej na podstawie wyników zeszłorocznej Olimpiady Matematycznej, weszły:

- Agata Latacz (V LO w Krakowie),
- Barbara Mroczek (XIV LO w Warszawie),
- Anna Olech (XIV LO w Warszawie),
- Anna Siennicka (XIV LO w Warszawie).

Wszystkie nasze reprezentantki były w przeszłości laureatkami Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów.

Polki, z wynikiem 122 punktów, zwyciężyły w klasyfikacji drużynowej zawodów. Dziewczyny świetnie poradziły sobie także w rywalizacji indywidualnej. Basia wywalczyła złoty medal, a obie Anie i Agata – srebro.

Polskiej delegacji udało się pokonać reprezentacje 18 krajów, wśród nich Rumunię, która z wynikiem 121 punktów uplasowała się na drugim miejscu, Ukrainę (117 punktów) i Stany Zjednoczone (110 punktów). W zawodach wzięły ponadto udział delegacje z Arabii Saudyjskiej, Belgii, Bułgarii, Finlandii, Holandii, Indonezji, Irlandii, Luksemburga, Łotwy, Serbii, Szwajcarii, Turcji, Węgier, Wielkiej Brytanii oraz Włoch.

Sukces naszych dziewcząt opisała *Gazeta Wyborcza* na portalu `wyborcza.pl`. Minister Edukacji Narodowej Krystyna Szumilas oraz podsekretarz stanu w MEN Joanna Berdzik zaprosiły zwyciężczynie do swoich gabinetów, aby im osobiście pogratulować. Dziewczyny opowiadały o swoich wrażeniach z zawodów również w porannym programie *Kawa czy herbata?* w TVP1.

Jest to już trzecie z kolei zwycięstwo uzdolnionej matematycznie polskiej młodzieży w ostatnim czasie, po wygranej na Środkowoeuropejskiej Olimpiadzie Matematycznej (MEMO 2011) oraz Olimpiadzie Matematycznej Państw Bałtyckich (*Baltic Way* 2011).

Olimpiada EGMO odbyła się w Murray Edwards College, który stanowi część Uniwersytetu Cambridge. Same zawody miały miejsce 12 i 13 kwietnia. Każdego dnia zawodniczki w ciągu 4,5 godziny rozwiązywały 4 zadania. Za każde z zadań można było otrzymać od 0 do 7 punktów.

Czas poza zawodami wypełniały zapewnione przez organizatorów atrakcje. Dziewczyny miały okazję popływać łodziami, wziąć udział w zawodach sportowych oraz nauczyć się tradycyjnego tańca – Ceilidh. Szczególnie interesujący okazał się spacer po miejscach w Cambridge związanych z matematyką. Jednym z takich miejsc jest Instytut Matematyczny Izaaka Newtona (Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences), gdzie tablice oraz kreda do rozwiązywania problemów matematycznych znajdują się nawet w toaletach.

Ostatniego dnia uczestniczki Olimpiady udały się na wycieczkę do Bletchley Park — posiadłości ziemskiej, w której podczas II Wojny Światowej miała swoją siedzibę Rządowa Szkoła Kodów i Szyfrów (Government Code and Cypher School). Pracujący przed laty w Bletchley Park zespół matematyków i kryptologów — wśród których był także „ojciec komputerów" Alan Turing — zajmował się odczytywaniem wiadomości kodowanych przy pomocy Enigmy oraz innych niemieckich maszyn szyfrujących. Miłą niespodziankę sprawiły nam osoby oprowadzające po kompleksie, wielokrotnie podkreślając rolę polskich matematyków w złamaniu szyfru Enigmy.

Obecnie dużą część Bletchley Park stanowi Muzeum Komputerów, gdzie podziwiać można zarówno pierwsze programowalne maszyny cyfrowe, pochodzące z lat czterdziestych XX wieku, jak i najnowsze osiągnięcia techniki komputerowej.

Zawody EGMO odbyły się w tym roku po raz pierwszy. Inicjatywa ich organizacji wyszła od osób skupionych wokół Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, czemu zawody zawdzięczają swój prestiż i wysoki poziom zadań. Pomimo, iż olimpiada adresowana jest do uczennic z krajów europejskich, to spotkała się z zainteresowaniem daleko poza granicami Europy. Dowodzi tego udział w zawodach krajów spoza starego kontynentu. Interesujący jest fakt, że pomysł organizacji olimpiady dla dziewcząt zaczerpnięty został z Chin, gdzie podobne zawody mają już dziesięcioletnią tradycję.

W przyszłym roku Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt odbędzie się w Luksemburgu. Organizatorzy mają nadzieję, że dzięki innowacyjnej formule (rywalizacja samych dziewcząt) oraz wysokiemu poziomowi merytorycznemu, zawody te wpiszą się na stałe w kalendarz najbardziej prestiżowych międzynarodowych zawodów matematycznych.

Joanna Ochremiak
— wiceprzewodnicząca delegacji polskiej

A niechaj narodowie wżdy postronni znają...

Czytelnikom, którzy uznali sztukę pięknego wysławiania się za umarłą, chcielibyśmy zaprezentować treści dwóch odwołań, jakie wpłynęły po zawodach stopnia trzeciego bieżącej edycji Olimpiady. Ich autorem jest **Jacek Rutkowski**, uczeń klasy trzeciej Publicznego Gimnazjum im. ks. Piotra Skargi w Warszawie, laureat tegorocznej OMG.

Odwołanie 1.

Zali Szanowny Sprawdzacz tegoż zadania jeno na pierwszą stronę jego baczył (to jest, rozwiązania)? Albowiem niestety, wprzódy zaledwie błądziłem, iżby rozwiązania tajniki poznać (błądzi wszak człowiek póki dąży!), co nie udawało mi się przez czasu przeciąg długości niebagatelnej, wszelako następniem, jak się zdaje, zadanie rozwiązał, alibo choć w połowie. Wersja druga (dla matematyków, nieradych ksiąg wieków minionych czytujących): Czy naprawdę należy mi się zaledwie zero punktów za zadanie o numerze trzecim? Oczywiście przepraszam, jeśli okazać by się miało, żem bez podstaw list nadesłał!

Odwołanie 2.

Cóż się Waćpaństwu w moim rozwiązaniu zadania czwartego nie podoba? Azalim nie zawarł w tymże treści istotnych, które przyczynić się winny do punktów większej ilości mi przydania? Jeśli wszelakom błąd jakiś uczynił w istocie, przepraszam bardzo za listu owego nadesłanie, wszak tysiące podobnych muszą Szanowni Państwo rozpatrywać. Wersja druga (dla matematyków, nieradych ksiąg wieków minionych czytujących): Czy na pewno mam tylko do połowy zadanie 4?

Jacek, spytany o zgodę na publikację treści powyższych odwołań, napisał:

Słowa nadesłane ku mnie doprawdy wielką mi chlubą! Pozwolenia udzielam, jakżebym inaczej miał uczynić, zważywszy na mą z Olimpiadą zażyłość, spowodowaną równie laureata tytułem honornym uzyskania, jak i radością niepojętą z matematycznego poznania, objawiającego się śród zadań intrygujących nader rozwiązywania, oraz na miłość własną, która woła jakoby z wnętrza duszy mojej, aby sławy słodkie znamiona stały się mojem udziałem, którą to poskromić pragnąwszy, czekam wciąż na czasy ku temu stosowniejsze.

Serdecznie pozdrawiam, odpisujący tak, jako przykazane człekowi, którego odwołanie pragnie się zamieścić przez wzgląd na treść jego urodną.

Z otuchą dla spragnionych barwnej polszczyzny serc oraz nadzieją na lepsze językowe jutro, żegnamy się z naszymi Czytelnikami na okres wakacyjny, życząc przyjemnego wypoczywania!

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Przecinamy graniastosłup

6. a) Uzasadnij, że punkt C jest środkiem każdej z przekątnych C_1C_4, C_2C_5 i C_3C_6.

6. b) Zauważ, że płaszczyzny $A_2A_3B_3B_2$, $A_1A_4B_4B_1$ oraz $A_6A_5B_5B_6$ są równoległe.

6. c) Udowodnij najpierw, że każdy z czworokątów $C_1C_2C_3C$ oraz $CC_2C_3C_4$ jest równoległobokiem.

6. d) Czworokąt $C_1C_2C_3C$ jest równoległobokiem, więc pola trójkątów C_1C_2C i C_3C_2C są równe.

7. Wykorzystaj zadanie 5 z artykułu.

8. Przekształć tezę do postaci

$$(d_1-d_4)(d_1+d_4)+(d_3-d_6)(d_3+d_6)+(d_5-d_2)(d_5+d_2)=0,$$

a następnie wykorzystaj niektóre zadania omówione w artykule.

9. Rozumowanie jest analogiczne do rozwiązania zadania 2 z artykułu.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski (redaktor naczelny), Urszula Swianiewicz, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: `kwadrat.omg@gmail.com`

Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 6

wrzesień 2012

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Do siego roku (szkolnego)!

Minął już (jak zwykle zbyt prędko) słodki okres wakacyjnej laby i beztroski. W nowym roku szkolnym życzymy uczniom wytrwałości w realizacji swoich szkolnych planów i zamierzeń, a nauczycielom cierpliwości w niesieniu swoim podopiecznym kaganka oświaty, który to kaganek nie zawsze jest chętnie przyjmowany.

Przypominamy również o rozpoczynającej się właśnie VIII edycji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Mamy nadzieję, że lektura naszej gazetki będzie zachętą do udziału w zawodach oraz pomocą w przygotowaniach do matematycznych zmagań.

Redakcja

Szufladki i reszty z dzielenia

Zasada szufladkowa Dirichleta głosi, że *jeśli umieszczamy przedmioty w szufladkach i dysponujemy większą liczbą przedmiotów, niż szufladek, to w pewnej szufladce znajdą się co najmniej dwa przedmioty.* Tę bardzo naturalną obserwację można zastosować m.in. do wielu zadań dotyczących reszt z dzielenia.

Zadanie 1.

Wykaż, że wśród dowolnie wybranych 11 liczb naturalnych znajdą się dwie, których cyfry jedności są równe.

Rozwiązanie

Mamy 10 możliwych cyfr jedności (od 0 do 9), niech to będą nasze szufladki. Rozmieszczamy w nich 11 danych liczb. Wówczas, z zasady szufladkowej Dirichleta, do pewnej szufladki trafią przynajmniej dwie liczby, a to właśnie było do udowodnienia.

Zamiast mówić o cyfrach jedności, można sformułować to samo zadanie w nieco inny sposób:

Zadanie 1'.

Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych 11 liczb naturalnych znajdą się dwie, które dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 10.

Korzyścią z takiego przeformułowania jest możliwość uogólnienia naszego rozwiązania także na reszty z dzielenia przez inne liczby. W tym celu warto zauważyć, że *przy dzieleniu przez dodatnią liczbę całkowitą n, jest n możliwych reszt:* $0,1,2,\ldots,n-1$.

Zadanie 2.

Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, wśród dowolnie wybranych $n+1$ liczb naturalnych znajdą się dwie, które dają tę samą resztę przy dzieleniu przez n.

Rozwiązanie

Mamy n możliwych reszt z dzielenia przez n (od 0 do $n-1$), niech to będą nasze szufladki. Rozmieszczamy w nich $n+1$ danych liczb. Zatem w którejś szufladce znajdą się co najmniej dwie liczby, co kończy dowód.

Jeśli mamy dane liczby całkowite a i b, przy czym $a \geqslant b$, oraz dodatnią liczbę całkowitą n, to warunek, iż

- *liczby a i b dają tę samą resztę przy dzieleniu przez n*

równoważny jest warunkowi, że

- *różnica $a-b$ dzieli się przez n.*

Z pierwszego warunku wynika drugi, ponieważ jeśli $a=kn+r$ oraz $b=ln+r$ dla pewnych liczb całkowitych k, l, r, przy czym $0 \leqslant r \leqslant n-1$, to liczba $a-b=(k-l)n$ dzieli się przez n.

Także na odwrót, z drugiego warunku wynika pierwszy, bo jeżeli $a-b=mn$ oraz $b=ln+r$ dla pewnych liczb całkowitych m, l, r, przy czym $0 \leqslant r \leqslant n-1$, to $a=(m+l)n+r$, czyli a daje tę samą resztę przy dzieleniu przez n, co b.

Zadanie 3.

Dany jest pewien zbiór 2012 liczb naturalnych. Wykaż, że można z tego zbioru wybrać takie trzy liczby a, b, c, aby liczba $(a-b)c$ była podzielna przez 2012.

Rozwiązanie

Każda z danych 2012 liczb daje przy dzieleniu przez 2012 jedną z 2012 możliwych reszt.

Jeśli istnieje w danym zbiorze liczba, która daje resztę 0, czyli dzieli się przez 2012, to wybierzmy tę właśnie liczbę jako c oraz dowolne inne liczby jako a i b. Wówczas iloczyn $(a-b)c$ jest podzielny przez 2012, ponieważ czynnik c jest podzielny przez 2012.

Jeżeli z kolei żadna z danych liczb nie daje reszty 0, to każda daje jedną z 2011 niezerowych reszt (od 1 do 2011). Skoro liczb jest 2012, to pewne dwie spośród nich dają tę samą resztę, nazwijmy te liczby a i b tak, aby $a \geqslant b$. Wtedy różnica $a-b$ jest podzielna przez 2012. Przyjmijmy wówczas za c dowolną z pozostałych liczb. Iloczyn $(a-b)c$ jest podzielny przez 2012, bo czynnik $a-b$ jest podzielny przez 2012. To kończy dowód.

Zasadę szufladkową Dirichleta można uogólnić: *jeśli umieszczamy przedmioty w szufladkach i dysponujemy większą liczbą przedmiotów, niż k-krotność liczby szufladek, to w pewnej szufladce znajdzie się co najmniej $k+1$ przedmiotów.*

Gdyby bowiem w każdej z szufladek miało znaleźć się najwyżej k przedmiotów, to łącznie moglibyśmy rozmieścić co najwyżej tyle przedmiotów, ile wynosi k-krotność liczby szufladek. Tymczasem z założenia przedmiotów mamy więcej!

Zadanie 4.

Danych jest 1001 liczb naturalnych. Udowodnij, że istnieje wśród nich 501 liczb parzystych lub 501 nieparzystych.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie

Rozmieszczamy dane liczby w dwóch szufladkach: *parzyste* i *nieparzyste*. Ponieważ mamy więcej niż $500\cdot 2$ liczb, to w pewnej szufladce znajdzie się co najmniej $500+1$ z nich.

Zadanie 5. (I OMG, zawody II stopnia)

Danych jest 111 dodatnich liczb całkowitych. Wykaż, że spośród nich można wybrać 11 takich liczb, których suma jest podzielna przez 11.

Rozwiązanie

Przy dzieleniu przez 11 mamy 11 możliwych reszt, niech to będą nasze szufladki. Rozmieszczamy w nich więcej niż $10\cdot 11=110$ liczb, więc z uogólnionej zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że pewnych 11 liczb trafi do jednej szufladki. Liczby te dają więc tę samę resztę r przy dzieleniu przez 11, wobec czego są one postaci: $11a_1+r, 11a_2+r, 11a_3+r, \ldots, 11a_{11}+r$, przy czym liczby $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{11}$ są całkowite. Wówczas suma

$$(11a_1+r)+(11a_2+r)+(11a_3+r)+\ldots+(11a_{11}+r)=$$
$$=11(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{11}+r)$$

dzieli się przez 11, co kończy dowód.

Zadanie 6.

Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej istnieje taka jej wielokrotność, którą można zapisać w systemie dziesiętnym używając wyłącznie cyfr 0 i 1.

Rozwiązanie

Niech n będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Rozważmy reszty z dzielenia przez n liczb $1, 11, 111, \ldots$ W myśl zasady szufladkowej Dirichleta, spośród pierwszych $n+1$ z nich, pewne dwie muszą dawać tę samą resztę z dzielenia przez n. Powiedzmy, że są to liczby $\underbrace{111\ldots1}_{k}$ oraz $\underbrace{111\ldots1}_{l}$, przy czym $k>l$. Wówczas ich różnica dzieli się przez n oraz jest postaci $\underbrace{111\ldots1}_{k-l}\underbrace{000\ldots0}_{l}$.

Zadanie 7.

Na okręgu umieszczonych jest 101 dodatnich liczb całkowitych o sumie równej 300. Udowodnij, że istnieje taki łuk okręgu, że suma umieszczonych na nim liczb jest równa 200.

Rozwiązanie

Oznaczmy dane liczby przez $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{101}$, numerując je wokół okręgu. Rozważmy następujące sumy:

$$\begin{array}{l} a_1,\\ a_1+a_2,\\ a_1+a_2+a_3,\\ \vdots\\ a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{100}. \end{array}$$

Każda z nich jest całkowita dodatnia (bo takie są dane liczby) oraz mniejsza od 300 (bo taka jest suma wszystkich 101 liczb). Jeśli którakolwiek z rozważanych sum równa jest 200, to wyznacza poszukiwany łuk. Jeśli któraś z sum równa jest 100, to łuk zawierający wszystkie pozostałe liczby spełnia warunki zadania.

Załóżmy zatem, że żadna z rozważanych sum nie jest równa 200 ani 100. Wówczas każda z nich przy dzieleniu przez 100 daje jedną z 99 niezerowych reszt. Stąd pewne dwie z tych sum, powiedzmy $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k$ oraz $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_l$ (przy czym $k>l$) dają taką samą resztę przy dzieleniu przez 100. Wtedy ich różnica, czyli liczba $a_{l+1}+a_{l+2}+a_{l+3}+\ldots+a_k$, dzieli się przez 100, jest więc równa 200 lub 100. Podobnie jak powyżej, w pierwszym przypadku wyznacza ona poszukiwany łuk, w drugim zaś przypadku poszukiwany łuk zawiera wszystkie pozostałe z danych 101 liczb.

Na zakończenie kilka zadań do samodzielnego rozwiązania (wskazówki w następnym numerze).

Zadanie 8. (VII OMG, test)

Czy wśród każdych pięciu różnych liczb całkowitych istnieją takie dwie, których różnica jest podzielna przez 4?

Zadanie 9.

Danych jest 12 różnych dwucyfrowych liczb naturalnych. Udowodnij, że można tak wybrać pewne dwie z nich, aby ich różnica była liczbą postaci $\overline{aa}$ (gdzie a jest cyfrą).

Zadanie 10.

Wykaż, że w dowolnym ciągu 2012 liczb naturalnych można wskazać pewną liczbę kolejnych wyrazów, których suma jest podzielna przez 2012.

Zadanie 11. (XLIII OM, zawody I stopnia)

Wykaż, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.

Zadanie 12. (Liga zadaniowa OMG, III seria)

Dana jest liczba pierwsza p oraz pewien zbiór złożony z $p-1$ różnych dodatnich liczb całkowitych niepodzielnych przez p. Udowodnij, że z tego zbioru można wybrać niepusty podzbiór liczb o iloczynie dającym przy dzieleniu przez p resztę 1.

Zadanie 13. (XL OM, zawody II stopnia)

Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Wykaż, że istnieją takie liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$, nie wszystkie równe 0, z których każda jest równa -1, 0 lub 1 oraz liczba

$$x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_{11}a_{11}$$

jest podzielna przez 1989.

Joanna Jaszuńska

Oblicz dwoma sposobami

Gdy chcemy wykazać, że pewna sytuacja nie jest możliwa, często warto obliczyć pewną wielkość na dwa sposoby. Jeśli otrzymamy dwa różne wyniki, będzie to oznaczało, że rozważana sytuacja nie może mieć miejsca. Oto kilka przykładów.

Zadanie 1.

Czy liczby $1, 2, \ldots, 20$ można podzielić na cztery rozłączne grupy w taki sposób, aby sumy liczb we wszystkich grupach były równe?

Rozwiązanie

Nie można. Gdyby bowiem istniał taki podział, to suma liczb w każdej grupie byłaby równa pewnej dodatniej liczbie całkowitej a. W takim razie suma wszystkich liczb byłaby równa $4a$.

Z drugiej strony suma wszystkich liczb jest równa

$$1+2+\ldots+20=\frac{20\cdot 21}{2}=2\cdot 105,$$

a więc nie dzieli się przez 4. Wobec tego taki podział nie może istnieć.

Zadanie 2. (LXII OM, zawody I stopnia)

Krawędzie dwunastościanu foremnego chcemy ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 30$, używając każdej z nich dokładnie raz. Rozstrzygnij, czy można to uczynić tak, aby suma numerów krawędzi wychodzących z dowolnego wierzchołka była podzielna przez 4.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że żądane ponumerowanie jest możliwe. Wówczas suma numerów na trzech krawędziach schodzących się w każdym wierzchołku jest podzielna przez 4. Dodając owe sumy dla wszystkich wierzchołków otrzymamy liczbę S podzielną przez 4.

Jednocześnie, ponieważ każda krawędź posiada dwa końce, więc w badanej sumie S każda krawędź liczona jest dwukrotnie. Oznacza to, że obliczona suma S jest równa podwojonej sumie numerów na wszystkich krawędziach, a zatem

$$S = 2 \cdot (1+2+\ldots+30) = 30 \cdot 31.$$

Jednakże otrzymana po prawej stronie liczba nie dzieli się przez 4. Sprzeczność oznacza, że takie ponumerowanie nie jest możliwe.

Zadanie 3. (IV OMG, zawody II stopnia)

W turnieju tenisa stołowego wzięło udział 50 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów?

Rozwiązanie

Taka sytuacja nie jest możliwa. Przypuśćmy przeciwnie, że każdy zawodnik wygrał k meczów, gdzie k jest pewną dodatnią liczbą całkowitą. Liczba wszystkich rozegranych meczów jest równa liczbie wszystkich meczów wygranych, a więc wynosi $50k$.

Z drugiej strony, każdy zawodnik przegrał dokładnie $49-k$ meczów. Wobec tego liczba wszystkich meczów przegranych, a więc i rozegranych w turnieju, wynosi $50 \cdot (49-k)$. Zatem otrzymujemy

$$50k = 50 \cdot (49-k),$$

skąd wniosek, że $k = 49/2$. Uzyskaliśmy sprzeczność, bowiem liczba k musi być liczbą całkowitą.

Zadanie 4. (VII OMG, zawody I stopnia)

Każda spośród pewnych 99 liczb naturalnych ma w zapisie dziesiętnym 10 jedynek, 20 dwójek oraz pewną liczbę zer. Udowodnij, że liczb tych nie można rozdzielić na dwie grupy w taki sposób, aby iloczyn liczb z pierwszej grupy był równy iloczynowi liczb z drugiej grupy.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje podział opisany w treści zadania. Można więc podzielić dane liczby na takie dwie grupy $x_1, x_2, \ldots, x_k$ oraz $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{99}$, że

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_{99}.$$

Wówczas

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{99} = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k)^2.$$

Ponieważ suma cyfr każdej z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{99}$ jest równa 50, więc każda z tych liczb daje resztę 2 z dzielenia przez 3. W takim razie

$$x_1 \equiv x_2 \equiv \ldots \equiv x_{99} \equiv 2 \equiv -1 \pmod 3.$$

Stąd wynika, że

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{99} \equiv (-1)^{99} = -1 \pmod 3.$$

Z drugiej zaś strony

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k)^2 \equiv (-1)^{2k} = 1 \pmod 3,$$

skąd $-1 \equiv 1 \pmod 3$. Sprzeczność ta kończy dowód.

Na koniec podajemy kilka zadań dla Czytelników do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do tych zadań podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5. (Koło Matematyczne OMG, zestaw 8)

Każdą z liczb $1, 2, \ldots, 33$ zapisano na oddzielnej kartce. Czy można tak rozłożyć te kartki w jedenastu pudełkach, aby w każdym pudełku znalazły się 3 kartki i aby w każdym pudełku suma liczb napisanych na dwóch kartkach była równa liczbie napisanej na trzeciej kartce?

Zadanie 6. (XLI OM, zawody I stopnia)

Udowodnij, że krawędzi sześcianu nie da się ponumerować liczbami od 1 do 12, używając każdej z nich dokładnie raz, tak, by suma numerów krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka była taka sama.

Zadanie 7.

Każda ściana pewnego wielościanu wypukłego ma liczbę krawędzi podzielną przez 4. Wykaż, że wielościan ten ma parzystą liczbę krawędzi.

Zadanie 8. (*Baltic Way* 2001)

Liczby $1, 2, \ldots, 49$ rozmieszczono w tablicy 7×7, po czym obliczono sumę liczb w każdym wierszu i każdej kolumnie. Niektóre z tych 14 sum są nieparzyste, a pozostałe są parzyste. Niech A oznacza sumę wszystkich nieparzystych sum, a B sumę wszystkich parzystych sum. Czy jest możliwe takie rozmieszczenie liczb, że $A = B$?

Michał Kieza

Trójkąty równoramienne w wielokątach

W maju br. w Mszanie Dolnej odbyły się pierwsze Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów. Podczas indywidualnej części zawodów należało rozwiązać 5 zadań. Jedno z nich zaproponowane zostało przez opiekuna czeskiej reprezentacji — autora niniejszego artykułu i brzmiało następująco:

Zadanie

Udowodnij, że spośród dowolnych 51 wierzchołków 101-kąta foremnego można wybrać trzy, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Większość prawidłowych rozwiązań tego problemu opierała się na zastosowaniu tzw. zasady szufladkowej Dirichleta. Jest to jedno z najprostszych, a jednocześnie najbardziej skutecznych narzędzi w kombinatoryce; w najbardziej podstawowym sformułowaniu orzeka, że jeśli włożymy $n+1$ skarpet do n szufladek (zapewne stąd wzięła się zagadkowa nazwa), to znajdziemy szufladkę, wewnątrz której będą co najmniej dwie skarpety. Przyjrzyjmy się, w jaki sposób można wykorzystać tę zasadę do badania naszego problemu.

W celu oswojenia się z treścią zadania, zastąpmy liczbę 51 parametrem k. Otrzymamy wtedy następujące

Stwierdzenie

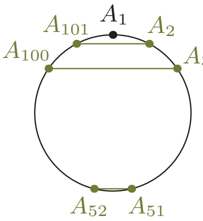
Spośród dowolnych k wierzchołków 101-kąta foremnego można wybrać trzy, które są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

To, czy powyższe stwierdzenie jest prawdziwe zależy oczywiście od parametru k. Jeśli liczba k jest odpowiednio mała, np. $k=3$, $k=4$ lub $k=5$, to stwierdzenie jest fałszywe — zachęcamy Czytelnika do podania odpowiednich kontrprzykładów. Z drugiej strony, nietrudno zauważyć, że jeśli dla pewnego $k<101$ stwierdzenie jest prawdziwe, to jest ono słuszne także dla wszystkich parametrów k' większych od k $(k<k'\leqslant 101)$.

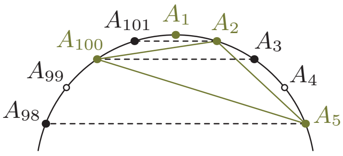
Wykażemy teraz, że stwierdzenie jest prawdziwe dla $k=52$. Oznaczmy kolejne wierzchołki naszego 101-kąta przez $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ i w dowolny sposób wybierzmy 52 z nich. Nie tracąc ogólności rozumowania, możemy przyjąć, że wśród wybranych wierzchołków znajduje się A_1. Pozostałe punkty $A_2, A_3, \ldots, A_{101}$ łączymy w następujące pary (rys. 1):

(1) $\quad \{A_2, A_{101}\},\ \{A_3, A_{100}\},\ \ldots,\ \{A_{51}, A_{52}\}\,.$

Spośród punktów znajdujących się w tych 50 parach wybrano 51. Wobec tego, w myśl zasady szufladkowej, zostały wybrane dwa punkty należące do jednej pary. Punkty te wraz z A_1 są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. To kończy dowód naszego stwierdzenia dla $k=52$.



rys. 1



rys. 2

Chociaż skorzystaliśmy z zasady szufladkowej w tak prosty sposób, udało się nam udowodnić stwierdzenie dla wszystkich $k\geqslant 52$. Powstaje więc pytanie, czy można wykorzystać pary (1) także do dowodu stwierdzenia dla $k=51$. Z tym właśnie przypadkiem zmagali się uczestnicy zawodów w Mszanie Dolnej. Jasnym jest, że mogli oni ograniczyć swoją uwagę do sytuacji, w której wśród 51 wybranych wierzchołków znajduje się A_1 oraz po jednym punkcie z każdej z 50 par (1). Dla tego przypadku zawodnicy przeprowadzali rozumowanie różnymi sposobami, przedstawię teraz jeden z nich.

Przypuśćmy, że wśród wybranych 51 punktów żadne trzy nie są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Zgodnie z przyjętymi wyżej założeniami, dokładnie jeden z punktów pary $\{A_2, A_{101}\}$ jest wśród wybranych przez nas wierzchołków. Nie tracąc ogólności, możemy przyjąć, że wybraliśmy A_2, a zostawiliśmy A_{101} (rys. 2). Trójkąt $A_1A_2A_3$ jest równoramienny, więc nie wybraliśmy A_3 i dlatego musieliśmy wybrać A_{100} (ze względu na parę $\{A_3, A_{100}\}$ w (1)). Podobnie, trójkąt $A_1A_{98}A_{100}$ jest równoramienny, więc nie wybraliśmy A_{98} i dlatego musieliśmy wybrać A_5. Wobec tego wśród wybranych punktów znajdują się A_2, A_{100}, A_5 i są to wierzchołki trójkąta równoramiennego. Dowód naszego stwierdzenia dla $k=51$ został więc zakończony.

Tylko jednemu uczestnikowi zawodów w Mszanie, mianowicie *Pavlowi Turkowi* z Czech, udało się na tyle zręcznie zastosować zasadę szufladkową, by od razu rozwiązywała ona problem dla $k=51$; zaprezentuję teraz jego ciekawe rozumowanie.

Ponownie wybieramy 51 punktów spośród wierzchołków 101-kąta foremnego. Zauważmy, że istnieje dokładnie $\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 51=1275$ odcinków o końcach w wybranych punktach. Ponadto każdy z tych odcinków ma taką samą długość, jak jeden z 50 odcinków $A_1A_2, A_1A_3, \ldots, A_1A_{51}$. Mamy zatem 1275 *skarpetek* (odcinków) rozłożonych w 50 *szufladkach* (możliwych długościach odcinków); oznacza to, że w którejś *szufladce* znalazło się nie mniej niż $1275:50=25\frac{1}{2}$ *skarpetek*, tzn. wśród odcinków o końcach w wybranych przez nas punktach istnieje 26 o równych długościach. Ponieważ wybranych punktów było tylko 51, więc pewne dwa spośród tych 26 odcinków muszą mieć wspólny koniec. Te dwa odcinki są bokami trójkąta równoramiennego o wierzchołkach w wybranych punktach, co kończy dowód.

Oznaczmy przez $k(101)$ największą taką liczbę k, dla której nasze stwierdzenie jest *fałszywe*. Ogólnie, zastępując liczbę 101 przez n, niech $k(n)$ będzie największą możliwą do wybrania liczbą wierzchołków n-kąta foremnego, aby żadne trzy wybrane punkty nie były wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Wykazaliśmy zatem, że $k(101)<51$, jednak dokładna wartość liczby $k(101)$ nie jest znana autorowi. Wartości $k(n)$ dla $n\leqslant 71$ zostały obliczone przy pomocy komputera przez *Bohuslava Zmeka*, studenta Uniwersytetu Masaryka w Brnie. Przedstawia je następująca tabela.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k(n)$	2	2	2	4	3	4	4	4	4	4	4	6	4	6

n	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$k(n)$	5	8	6	8	6	8	6	8	7	8	8	8	8	8

n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
$k(n)$	8	9	8	10	9	10	10	12	10	11	9	12	9	12

n	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
$k(n)$	10	12	10	13	10	14	11	14	11	16	11	16	12	16

n	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
$k(n)$	12	16	13	16	13	16	14	16	13	16	16	18	14	?

Jak widzicie, liczby $k(n)$ układają się w dość nieregularny sposób. Spełniona jest jednak pewna ciekawa zależność:

$$k(4n+2)=2\cdot k(2n+1)$$

dla wszystkich n. Czy potraficie ją udowodnić?

Jaromír Šimša

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Sztuczka z iloczynem

4. Postępuj analogicznie jak w rozwiązaniach zadań 2 i 3.

5. Doprowadź dane równanie do postaci $xy-px-py=0$.

O n kolejnych liczbach

5. Wykorzystaj tożsamości

$$n^4-8n=n(n^3-8)=n(n-2)(n^2+2n+4)\,,$$
$$n^4+8n=n(n^3+8)=n(n+2)(n^2-2n+4)\,.$$

6. Zauważ, że $(n+1)^3-n=(n+1)^3-(n+1)+1$.

7. Przekształćmy: $n^7-n=n(n^6-1)=n(n^3-1)(n^3+1)=$
$=n(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)$.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Urszula Swianiewicz, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 7
grudzień 2012

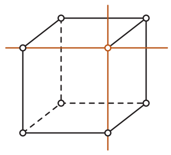
Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

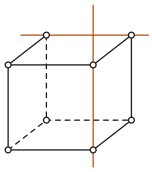
Czy istnieje taki wielościan...?

W niektórych zadaniach olimpijskich pojawia się pytanie o to, czy istnieje wielościan spełniający określone warunki. W jaki sposób należy postąpić, jeśli chcemy uzasadnić, że taką bryłę da się zbudować?

Naturalnym pomysłem, który się narzuca, jest narysowanie odpowiedniego przykładu. Wiążą się z tym jednak pewne trudności. Po pierwsze rysunek na płaszczyźnie nie zawsze oddaje wiernie to, co ma miejsce w trzech wymiarach. Na przykład, patrząc na rysunek 1, który przedstawia dwie proste znajdujące się w przestrzeni, nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy te proste mają punkt wspólny (rys. 2), czy też nie (rys. 3).


rys. 1

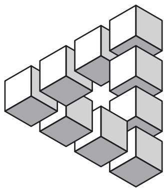

rys. 2

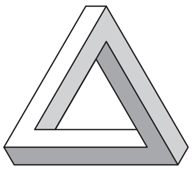

rys. 3

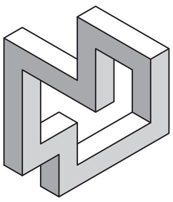
Druga trudność polega na tym, że próbując narysować nietypowy wielościan, często otrzymujemy rysunek czegoś, co w trzech wymiarach nie jest wielościanem! Tak się może stać nawet wtedy, gdy nasz rysunek wygląda całkiem realnie, a nam wydaje się, że widzimy na nim przestrzenną bryłę, której wygląd jesteśmy w stanie opisać.

W niniejszym artykule zobaczymy przykłady takich sytuacji oraz zastanowimy się nad tym, jak powinno wyglądać poprawne uzasadnienie istnienia wielościanu spełniającego określone warunki.

Pierwsze rysunki nieistniejących brył (lub nieistniejących konfiguracji przestrzennych znanych brył) pochodzą z książki holenderskiego popularyzatora matematyki Bruno Ernsta *Adventures with impossible figures*. Motyw dziewięciu sześcianów na rysunku 4 został po raz pierwszy wykorzystany w grafice *Hommage à Bruno Ernst, perspective japonaise n° 293a* szwedzkiego grafika Oscara Reutersvärda w roku 1934. Wzorowany na nim rysunek 5 nieistniejącego wielościanu był wykorzystywany wielokrotnie przez różnych grafików.

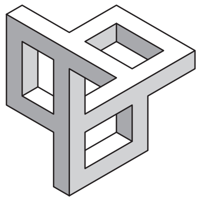

rys. 4

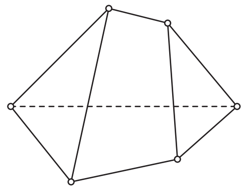

rys. 5


rys. 6

Następne dwa rysunki (rys. 6, 7) są niewielkimi modyfikacjami rysunków pochodzących od Reutersvärda i Ernsta i znajdujących się we wspomnianej książce.

To, że wielościany takie (lub ich konfiguracje) w rzeczywistości nie istnieją, powinno być widoczne dla każdego. Przyjrzyjmy się teraz mniej oczywistym przykładom. Zaczniemy od pewnego zadania.


rys. 7


rys. 8

Zadanie 1.

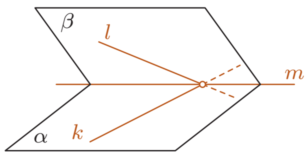
Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma pięć ścian — dwie trójkątne i trzy czworokątne — oraz żadna ściana czworokątna nie jest trapezem?

Odpowiedź brzmi: „tak, istnieje", a uzasadnienie wydaje się bardzo proste: wystarczy spojrzeć na rysunek 8, aby dostrzec na nim bryłę spełniającą warunki zadania. Z przodu, z tyłu i na dole znajdują się ściany czworokątne, a po bokach trójkątne. Widzimy także nierównoległe krawędzie, co przekonuje nas, że żadna ściana czworokątna nie jest trapezem (rysunek dwóch równoległych prostych znajdujących się w przestrzeni przedstawiałby proste równoległe). Wszystkie wymagania, jakie nakładają na nas warunki zadania zostały więc spełnione.

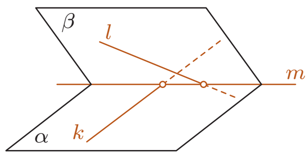
Mając jednak świeżo w pamięci poprzednie rysunki nieistniejących wielościanów, można się zaniepokoić i zapytać: czy rysunek 8 przedstawia istniejącą bryłę? Poddajmy zatem rysunek ten dokładniejszej analizie. Użyteczne okaże się następujące

Spostrzeżenie

Prosta k leży w płaszczyźnie α, a prosta l w płaszczyźnie β (rys. 9). Ponadto prosta m jest częścią wspólną płaszczyzn α i β. Wówczas jeśli proste k i l mają w przestrzeni punkt wspólny, to leży on na prostej m.



rys. 9



rys. 10

Uzasadnienie spostrzeżenia: wszystkie punkty prostej k leżą w płaszczyźnie α, a wszystkie punkty prostej l — w płaszczyźnie β, a zatem jedynym „miejscem", gdzie obie te proste mogą się „spotkać" jest część wspólna płaszczyzn α i β, czyli prosta m.

Z powyższego spostrzeżenia wynika, że jeśli proste k i l, leżące odpowiednio w płaszczyznach α i β, przecinają wspólną prostą obu płaszczyzn w *różnych* punktach, to proste k i l nie mają punktów wspólnych w przestrzeni (rys. 10).

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI · Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej · MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ · ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji · UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

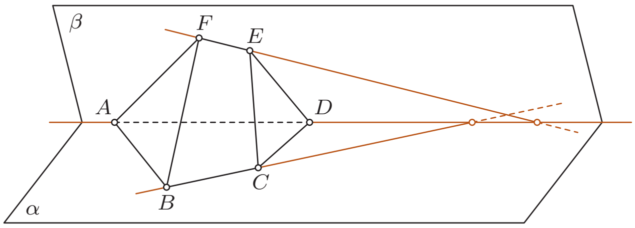
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przejdźmy teraz do analizy rysunku 8. Przypuśćmy, że przedstawia on istniejący wielościan i oznaczmy jego wierzchołki tak, jak pokazano na rysunku 11.

Oznaczmy ponadto przez α płaszczyznę zawierającą ścianę $ABCD$, a przez β płaszczyznę zawierającą ścianę $ADEF$. Częścią wspólną obu tych płaszczyzn jest prosta AD. Proste BC i EF przecinają prostą AD w dwóch różnych punktach (rys. 11). Stąd wniosek, że proste te nie mają w przestrzeni punktów wspólnych.

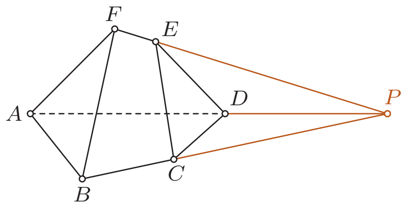
Tymczasem proste BC i EF leżą w jednej płaszczyźnie (zawierającej ścianę $BCEF$) i nie są równoległe (gdyż czworokąt $BCEF$ nie jest trapezem). Wobec tego proste te przecinają się w przestrzeni (w pewnym punkcie płaszczyzny $BCEF$).

Otrzymaliśmy sprzeczność, z której wynika, że rysunek 8 w istocie przedstawia nieistniejący wielościan!



rys. 11

Jak zatem opisać bryłę, która spełnia warunki zadania, skoro rysunek nie jest dostatecznym argumentem dla dowodu jej istnienia? W tym celu należy przeprowadzić odpowiednią konstrukcję *w przestrzeni*.



rys. 12

Rozpatrzmy dowolny czworościan $ABFP$ (rys. 12). Na krawędziach BP, AP i FP wybieramy odpowiednio punkty C, D i E w taki sposób, aby prosta CD nie była równoległa do prostej AB, prosta DE nie była równoległa do prostej AF, a także prosta EC nie była równoległa do prostej BF. Innymi słowy, punkty C, D i E wybieramy w taki sposób, aby płaszczyzna CDE nie była równoległa do żadnej z krawędzi AB, BF i AF. Następnie przecinamy czworościan $ABFP$ płaszczyzną przechodzącą przez punkty C, D i E i odrzucamy od niego czworościan $CDEP$.

Otrzymujemy w ten sposób wielościan spełniający warunki zadania.

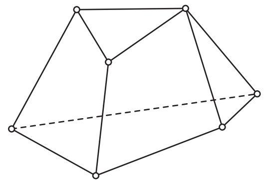
Zadanie 2.

Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma sześć ścian — dwie trójkątne i cztery czworokątne — oraz żadna ściana czworokątna nie jest trapezem?

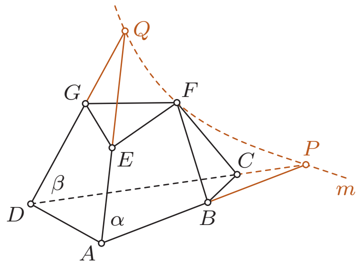
Przykład takiej bryły widzimy na rysunku 13: ma ona dwie ściany trójkątne (na górze i z prawej strony) oraz cztery czworokątne (z przodu, z tyłu, na dole i z lewej strony). Ponadto żadna ściana czworokątna nie jest trapezem. Pozostaje pytanie: czy rysunek 13 przedstawia wielościan?

Przypuśćmy, że tak jest i oznaczmy wierzchołki tego wielościanu jak na rysunku 14. Niech ponadto α będzie płaszczyzną zawierającą ścianę $ABFE$, a β — płaszczyzną zawierającą ścianę $CDGF$. Płaszczyzny te nie są równoległe, bowiem do obu należy punkt F. A zatem częścią wspólną tych płaszczyzn jest pewna prosta m przechodząca przez punkt F.

Proste AB i CD leżą w jednej płaszczyźnie (zawierającej ścianę $ABCD$) i nie są równoległe. Wobec tego istnieje w przestrzeni punkt wspólny P obu tych prostych. Ponadto prosta AB leży w płaszczyźnie α, a prosta CD w płaszczyźnie β, więc ich punkt wspólny P leży na prostej wspólnej płaszczyzn α i β, czyli na prostej m.



rys. 13



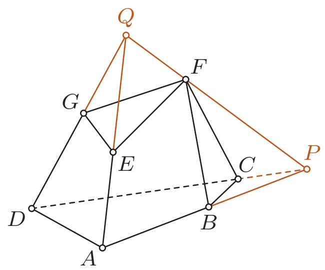
rys. 14

Analogicznie uzasadniamy, że proste AE i DG mają w przestrzeni punkt wspólny Q leżący na prostej m. Stąd wniosek, że punkty F, P i Q leżą na jednej prostej wbrew temu, co przedstawia rysunek 14. A zatem rysunek ten obrazuje w istocie nieistniejący wielościan!

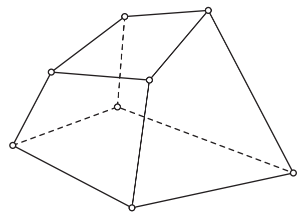
Aby więc uzasadnić istnienie bryły spełniającej warunki zadania 2, powinniśmy przeprowadzić jej *przestrzenną* konstrukcję.

W tym celu weźmy pod uwagę dowolny czworościan $DAPQ$ i wybierzmy jakikolwiek punkt F na krawędzi PQ, różny od P i Q (rys. 15). Następnie zaznaczmy na krawędziach AP i DP odpowiednio punkty B i C w taki sposób, aby płaszczyzna BCF nie była równoległa do żadnej z prostych DA, AQ i QD. Podobnie, na krawędziach AQ i DQ obierzmy odpowiednio punkty E i G w taki sposób, aby płaszczyzna EFG nie była równoległa do żadnej z prostych AP, PD i DA.

Poprowadźmy teraz płaszczyzny BCF i EFG, odcinając od czworościanu $DAPQ$ czworościany $BCFP$ oraz $EFGQ$. W efekcie uzyskujemy wielościan, który spełnia warunki zadania.



rys. 15



rys. 16

Na koniec kilka zadań dla Czytelników. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 3.

Rysunek 16 przedstawia bryłę, która ma sześć ścian — wszystkie czworokątne, z których żadna nie jest trapezem. Czy jest to rysunek istniejącej bryły? Podaj przestrzenną konstrukcję bryły spełniającej warunki zadania.

Zadanie 4. (IV OMG, zawody III stopnia)

Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana ma parzystą liczbę boków? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5. (V OMG, zawody III stopnia)

Czy istnieje wielościan wypukły mający dokładnie 100 ścian, z których przynajmniej jedna jest 99-kątem i taki, że w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie? Odpowiedź uzasadnij.

Wojciech Guzicki, Waldemar Pompe

Teraz (znowu) Polska!

Mamy przyjemność zakomunikować, że podczas tegorocznej Olimpiady Matematycznej Krajów Europy Środkowej (*Middle European Mathematical Olympiad*, MEMO), która odbyła się we wrześniu 2012 r. w Solothurn w Szwajcarii, Polacy ponownie osiągnęli podwójne zwycięstwo. Nasza reprezentacja w składzie:

- Sławomir Kubicki, I LO w Koszalinie,
- Barbara Mroczek, XIV LO w Warszawie,
- Paweł Nałęcz-Jawecki, XIV LO w Warszawie,
- Konrad Jan Paluszek, XIV LO w Warszawie,
- Kamil Rychlewicz, I LO w Łodzi,
- Bartłomiej Żak, XIV LO w Warszawie,

która została wyłoniona na podstawie wyników zeszłorocznej edycji Olimpiady Matematycznej, w zawodach drużynowych zajęła pierwsze miejsce, osiągając wynik 56 punktów. Druga była ekipa Węgier, która uzyskała 46 punktów, a trzecie miejsce zajęła reprezentacja Chorwacji (45 punktów).

Ponadto Kamil Rychlewicz zdobył złoty medal oraz zwyciężył w rywalizacji indywidualnej. Na dodatkowe wyróżnienie na łamach naszej gazetki zasługuje również Konrad Jan Paluszek, który w zawodach MEMO wywalczył brązowy medal i był najmłodszym reprezentantem Polski, świeżo upieczonym absolwentem Gimnazjum nr 42 w Warszawie oraz zeszłorocznym laureatem OMG. Serdecznie gratulujemy całemu zespołowi!

Więcej informacji o zawodach MEMO można znaleźć w *Kwadracie* nr 2 (grudzień 2011).

Kwadraty, liczby pierwsze i reszta

Czasami w zadaniach olimpijskich pojawia się problem rozstrzygnięcia, czy liczba, którą można zapisać w postaci danego wyrażenia, może być kwadratem pewnej liczby całkowitej. Zwykle odpowiedź okazuje się przecząca, a stoi za tym fakt, że przy dzieleniu przez określone liczby kwadraty wcale nie muszą dawać wszystkich możliwych reszt.

Do zapisu reszty z dzielenia szalenie przydatne okazują się *kongruencje*, czyli wyrażenia typu

$$a \equiv b \pmod{n},$$

które oznaczają tyle, że *liczby a i b dają jednakowe reszty przy dzieleniu przez n*. Główną użyteczną cechą kongruencji jest to, że można je dodawać, mnożyć, a w konsekwencji także potęgować stronami, prawie jak zwykłe równości. Więcej informacji o kongruencjach, ich własności oraz jak się nimi posługiwać, Czytelnik odnajdzie w broszurze *I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2009.

Na początku wykażemy, że kwadraty liczb całkowitych przy dzieleniu przez 3 nie mogą dawać reszty 2.

Każda liczba całkowita n daje z dzielenia przez 3 jedną z trzech możliwych reszt, co możemy zapisać jako:

$$n \equiv 0 \pmod{3}, \quad n \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{lub} \quad n \equiv 2 \pmod{3}.$$

Podnosząc powyższe kongruencje stronami do kwadratu, dostajemy odpowiednio

$$n^2 \equiv 0 \pmod{3}, \ \ n^2 \equiv 1 \pmod{3} \ \ \text{lub} \ \ n^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}.$$

Teraz już widzimy, że 2 jako reszta nie występuje w żadnym przypadku.

W podobny sposób można wykazać na przykład, że kwadraty liczb całkowitych przy dzieleniu przez

- 4 mogą dawać jedynie reszty 0 lub 1,
- 5 mogą dawać jedynie reszty 0, 1 lub 4,
- 8 mogą dawać jedynie reszty 0, 1 lub 4.

Dowody, analogiczne do powyższego, pozostawiamy dla Czytelnika.

Często zadania dotyczące reszt, które dają kwadraty liczb całkowitych przy dzieleniu przez określone liczby, są połączone z rozważaniami dotyczącymi liczb pierwszych. Zaskakująco istotne jest oczywiste spostrzeżenie, że *jedyną liczbą pierwszą podzielną przez liczbę pierwszą p jest p*. Oto przykład.

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, dla których liczba p^2+2 także jest pierwsza.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeżeli liczba p nie dzieli się przez 3, to $p \equiv 1 \pmod{3}$ lub $p \equiv 2 \pmod{3}$. Stąd w obu przypadkach dostajemy $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$. A zatem

$$p^2+2 \equiv 0 \pmod{3},$$

co oznacza, że liczba p^2+2 jest podzielna przez 3. Ponadto liczba p^2+2 jest większa od 3, gdyż p — jako liczba pierwsza — jest nie mniejsza od 2. Wobec tego liczba p^2+2 musi być złożona.

Jeśli z kolei liczba p dzieli się przez 3, to musi być równa 3, gdyż jest to liczba pierwsza. Wtedy $3^2+2=11$ również jest liczbą pierwszą. Wobec tego jedyną liczbą p spełniającą warunki zadania jest $p=3$.

Do rozwiązania kolejnego zadania przyda się następujące spostrzeżenie: *jeżeli kwadrat liczby całkowitej jest podzielny przez pewną liczbę pierwszą p, to jest też podzielny przez liczbę p^2*. Rzeczywiście, jeżeli n^2 jest liczbą podzielną przez p, to również n musi być liczbą podzielną przez p, czyli $n=kp$ dla pewnej liczby całkowitej k. Wówczas $n^2=k^2p^2$, skąd oczywiście wynika, że liczba n^2 jest podzielną przez p^2.

Zadanie 2. (I CPS Juniorów, 2012 r.)

Wykaż, że jeśli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba $2(n^2+1)-n$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Zastanówmy się, jakie reszty z dzielenia przez 3 może dawać liczba $2(n^2+1)-n$.

Jeżeli $n \equiv 0 \pmod{3}$, to

$$2(n^2+1)-n \equiv 2(0^2+1)-0 = 2 \pmod{3},$$

więc liczba ta nie może być kwadratem liczby całkowitej. Podobnie jeśli $n \equiv 2 \pmod{3}$, to otrzymujemy

$$2(n^2+1)-n \equiv 2(2^2+1)-2 = 8 \equiv 2 \pmod{3}.$$

To oznacza, że jeśli liczba $2(n^2+1)-n$ miałaby być kwadratem liczby całkowitej, to n musi dawać resztę 1 przy dzieleniu przez 3.

W takim razie liczba n daje resztę 1, 4 lub 7 przy dzieleniu przez 9. Jednak w każdym z tych trzech przypadków uzyskujemy

$$2(n^2+1)-n \equiv 3 \pmod 9.$$

To zaś oznacza, że liczba $2(n^2+1)-n$ jest podzielna przez 3, ale niepodzielna przez 9. Liczba o tej własności nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. (Koło Matematyczne OMG, zestaw 8)

Rozstrzygnij, czy istnieje pięć kolejnych liczb całkowitych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Popatrzmy na reszty, jakie daje pięć kolejnych liczb całkowitych przy dzieleniu przez 4. Każda z możliwych reszt 0, 1, 2, 3 pojawia się dokładnie raz pośród czterech kolejnych liczb całkowitych. Skoro liczb jest pięć, to pewna z tych czterech reszt, powiedzmy r, pojawia się dwa razy. Tym samym suma kwadratów pięciu kolejnych liczb całkowitych daje przy dzieleniu przez 4 tę samą resztę, co liczba $0^2+1^2+2^2+3^2+r^2$, a wtedy

$$0^2+1^2+2^2+3^2+r^2 = 14+r^2 \equiv 2+r^2 \pmod 4.$$

Liczba r^2, jako kwadrat liczby całkowitej, może dawać tylko resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 4, a zatem liczba $2+r^2$ daje resztę 2 lub 3. Stąd wniosek, że suma kwadratów pięciu kolejnych liczb całkowitych daje przy dzieleniu przez 4 jedną z reszt 2 lub 3 i wobec tego nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Na koniec jeszcze kilka zadań, na pierwszy rzut oka różniących się nieco od zaprezentowanych powyżej, które wykorzystują w rozwiązaniach omówioną metodę. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4.

Wykaż, że łączna liczba ścian, wierzchołków i krawędzi w (a) graniastosłupie, (b) ostrosłupie, nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 5. (VII OM, zawody III stopnia)

Wykaż, że jeżeli liczby całkowite a, b, c spełniają równanie $a^2+b^2=c^2$, to:

(a) co najmniej jedna z liczb a i b dzieli się przez 3,

(b) co najmniej jedna z liczb a i b dzieli się przez 4,

(c) co najmniej jedna z liczb a, b, c dzieli się przez 5.

Zadanie 6. (XVI OM, zawody II stopnia)

Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że $4p^2+1$ i $6p^2+1$ są również liczbami pierwszymi.

Zadanie 7. (LXIII OM, zawody I stopnia)

Znajdź wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (x,y), że liczba 2^x+5^y jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 8.

Udowodnij, że jeżeli liczba $1+3^n+5^n$ jest pierwsza, to liczba n jest podzielna przez 12.

Łukasz Bożyk

... i żyli długo i szczęśliwie

Miło nam ogłosić, że 22 września 2012 r. nasza redakcyjna koleżanka Urszula Swianiewicz wyszła za mąż za Lecha Pastwę, stając się naszą redakcyjną koleżanką Urszulą Pastwą. Tłumaczy to zmianę w stopce redakcyjnej i daje nam powód, abyśmy na zakończenie tego wydania *Kwadratu* życzyli parze młodej mnóstwo szczęścia na nowej drodze życia. :)

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Szufladki i reszty z dzielenia

8. Tak. Każda liczba całkowita daje jedną z czterech możliwych reszt z dzielenia przez 4, a danych mamy pięć liczb. Stąd pewne dwie spośród nich muszą dawać tę samą resztę z dzielenia przez 4. Rozważ ich różnicę.

9. Wśród danych 12 liczb pewne dwie muszą dawać tę samą resztę z dzielenia przez 11, więc ich różnica dzieli się przez 11. Uzasadnij, że jest ona żądanej postaci.

10. Rozważ reszty z dzielenia przez 2012 kolejnych sum skonstruowanych analogicznie, jak w zadaniu 7.

11. Jeśli pewne dwie z danych $n+2$ liczb dają tę samą resztę z dzielenia przez $2n$, to ich różnica dzieli się przez $2n$. Załóżmy więc, że każda z liczb daje inną resztę. Wykaż, że wtedy suma reszt pewnych dwóch z danych $n+2$ liczb jest równa $2n$. Rozważ w tym celu następujący podział zbioru możliwych reszt:

$$\{0\}, \{1, 2n-1\}, \{2, 2n-2\}, \{3, 2n-3\}, \ldots, \{n-1, n+1\}, \{n\}.$$

12. Rozważ kolejne iloczyny skonstruowane podobnie, jak sumy w zadaniu 7. Takich iloczynów jest $p-1$, żaden z nich nie dzieli się przez p. Uzasadnij, że któryś z nich daje resztę 1 lub pewne dwa z nich dają tę samą resztę z dzielenia przez p. W drugim przypadku, rozważ różnicę tych iloczynów.

13. Uzasadnij, że wyrażeń postaci $x_1a_1+x_2a_2+\ldots+x_{11}a_{11}$, gdzie każda z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ wynosi 0 lub 1, jest $2^{11}=2048>1989$. Wobec tego pewne dwie z tak wyrażonych liczb dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 1989. Rozważ ich różnicę.

Oblicz dwoma sposobami

5. Zauważ, że suma trzech liczb w każdym pudełku jest parzysta.

6. Przeprowadź podobne rozumowanie jak w zadaniu 2. Zauważ, że skoro sześcian ma 8 wierzchołków, to podwojona suma numerów na krawędziach dzieli się przez 8.

7. Rozumując podobnie jak w zadaniu 2 wykaż, że dwukrotność liczby krawędzi dzieli się przez 4.

8. Zauważ, że podwojona suma wszystkich liczb w tablicy jest równa $A+B$.

Trójkąty równoramienne w wielokątach

Dowód równości $k(4n+2)=2\cdot k(2n+1)$ rozbijemy na dwa kroki. W pierwszym kroku wykażemy, że $k(4n+2)\leqslant 2\cdot k(2n+1)$, natomiast w drugim, że $k(4n+2)\geqslant 2\cdot k(2n+1)$.

Krok pierwszy. Udowodnimy ogólniejszą nierówność, a mianowicie $k(2n)\leqslant 2\cdot k(n)$. W tym celu wyróżnijmy co drugi wierzchołek danego $(2n)$-kąta foremnego, rozbijając go w ten sposób na dwa n-kąty foremne. Jeśli wybierzemy więcej niż $2\cdot k(n)$ wierzchołków, to w myśl zasady szufladkowej, w którymś z tych dwóch n-kątów wyróżnimy więcej niż $k(n)$ wierzchołków, a wtedy wśród nich znajdą się trzy będące wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Stąd $k(2n)\leqslant 2\cdot k(n)$.

Krok drugi. Podobnie jak wyżej, wyróżniamy co drugi wierzchołek danego $(4n+2)$-kąta, uzyskując w ten sposób dwa $(2n+1)$-kąty foremne. W jednym z tych $(2n+1)$-kątów wybieramy $k(2n+1)$ wierzchołków, z których żadne trzy nie tworzą trójkąta równoramiennego i odbijamy te punkty symetrycznie względem środka wielokąta. Dostajemy w ten sposób $k(2n+1)$ punktów w drugim wielokącie, czyli łącznie $2\cdot k(2n+1)$ punktów. Pozostaje uzasadnić, że wśród tak wybranych $2\cdot k(2n+1)$ punktów żadne trzy nie są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Stąd $k(4n+2)\geqslant 2\cdot k(2n+1)$.

Redaguje zespół w składzie: Urszula Pastwa, Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com

Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 8
marzec 2013

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Maksymalny, ale czy największy?

W zawodach drugiego stopnia tegorocznej edycji OMG wiele kłopotów sprawiło zawodnikom zadanie 4. Przypomnijmy jego treść:

Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny?

Wiele rozwiązań zawierało pewne powtarzające się błędy. Oto jedno z błędnych rozumowań, które można było znaleźć w pracach uczestników.

Na początku kolorujemy płaszczyznę *trzema* kolorami w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Można to zrobić na wiele sposobów, na przykład tak: najpierw malujemy całą płaszczyznę jednym kolorem (powiedzmy niebieskim), następnie jedną wybraną prostą ℓ przemalowujemy na drugi kolor (zielony) i wreszcie na tej prostej wybieramy punkt i malujemy go trzecim kolorem (czerwonym).

Wykażemy teraz, że nie da się pomalować płaszczyzny *czterema* kolorami w sposób opisany w treści zadania. Zauważmy, że przemalowując w opisanym kolorowaniu dowolny punkt (oprócz punktu czerwonego) na czwarty kolor (na przykład żółty), otrzymamy kolorowanie, które nie spełnia warunków zadania. Istotnie, jeśli pomalujemy na żółto którykolwiek punkt zielony, to prosta ℓ będzie trzykolorowa (będą na niej pozostałe punkty zielone oraz punkt czerwony i żółty). Jeśli natomiast pomalujemy na kolor żółty którykolwiek punkt niebieski, to prosta przechodząca przez punkty czerwony i żółty będzie trzykolorowa (będą bowiem na niej punkty niebieskie oraz punkt czerwony i żółty). Z kolei przemalowanie czerwonego punktu na kolor żółty nic nie zmienia: płaszczyzna w dalszym ciągu jest pomalowana trzema kolorami. W ten sposób wykazaliśmy, że największą możliwą liczbą kolorów jest 3.

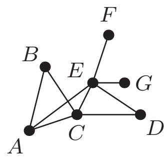
Na czym polegają błędy w tym rozumowaniu? Po pierwsze na tym, że próbujemy przemalować tylko jeden punkt. W taki sam sposób moglibyśmy także „udowodnić”, że największą możliwą liczbą kolorów jest 2. Rozpatrzmy bowiem następujące kolorowanie: jeden punkt malujemy na czerwono, a pozostałe na niebiesko. Teraz zauważmy, że żadnego punktu płaszczyzny nie można przemalować na żółto, aby w dalszym ciągu każda prosta zawierała punkty co najwyżej dwóch kolorów i jednocześnie były wykorzystane wszystkie trzy kolory. Przemalowując punkt czerwony, płaszczyzna pozostaje pomalowana dwoma kolorami, natomiast zmieniając kolor któregokolwiek punktu niebieskiego, dostajemy trzykolorową prostą: prosta przechodząca przez punkty czerwony i żółty przechodzi również przez punkty niebieskie.

Ale możemy przecież przemalować więcej punktów, na przykład całą prostą przechodzącą przez punkt czerwony (z wyjątkiem samego punktu czerwonego). W ten sposób nasze kolorowanie dwoma kolorami zostało rozszerzone do kolorowania trzema kolorami, ale musieliśmy w tym celu przemalować więcej niż jeden punkt jednocześnie.

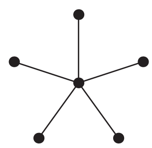
To był pierwszy błąd, ale nie jedyny. Istotna luka polegała na tym, że z obserwacji, że pewne *konkretne* pokolorowanie trzema kolorami nie dało się rozszerzyć przy użyciu czwartego koloru wnioskowaliśmy, że czterech kolorów użyć się w ogóle nie da. Tak rozumować nie można, bo przecież może się okazać, że jakieś inne kolorowanie trzema kolorami da się rozszerzyć używając czwartego koloru! Popatrzmy na zadania, które ilustrują podobną sytuację.

Te zadania dotyczą grafów. Musimy zatem najpierw powiedzieć, co to jest graf. Otóż *graf* jest to figura geometryczna składająca się z punktów płaszczyzny (na rysunku 1 oznaczonych dużymi kropkami) oraz linii łączących niektóre z tych punktów (na rysunku 1 te linie są odcinkami, ale mogą to też być linie krzywe).

Punkty oznaczone kropkami nazywamy *wierzchołkami* grafu; łączące je linie nazywamy *krawędziami*. Krawędzie mogą się na rysunku przecinać (tak jak krawędzie AE i BC na rysunku 1), jednak jeśli punkt przecięcia nie jest zaznaczony kropką, to nie jest on wierzchołkiem grafu.



rys. 1


rys. 2

W dalszym ciągu będziemy zajmować się szczególnym rodzajem grafów: grafami bez trójkątów. *Trójkątem* w grafie nazywamy trzy wierzchołki połączone krawędziami każdy z każdym. Na przykład na rysunku 1 ABC, ACE i CDE są trójkątami, natomiast BCE nie jest trójkątem, gdyż wierzchołki B i E nie są połączone krawędzią.

Powiemy, że graf jest *grafem bez trójkątów*, jeśli nie ma w nim ani jednego trójkąta, tzn. dla dowolnych trzech jego wierzchołków A, B i C co najmniej jedna para AB, AC lub BC nie jest połączona krawędzią. Możemy teraz sformułować pierwsze zadanie.

Zadanie 1.

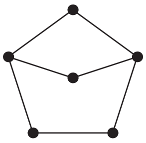
Rozważamy wszystkie grafy bez trójkątów mające 6 wierzchołków. Ile wynosi największa możliwa liczba krawędzi takiego grafu?

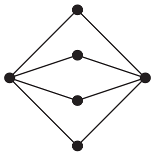
Przeprowadźmy najpierw rozumowanie, jak w przypadku zadania z kolorowaniem płaszczyzny. Na początku

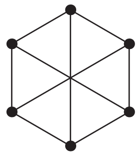
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

wskazujemy graf znajdujący się na rysunku 2. Graf ten nie zawiera trójkąta oraz ma własność, że dodając do niego dowolną krawędź, trójkąt powstanie. Możemy zatem powiedzieć, że graf z rysunku 2 jest *maksymalny*: poprzez dodanie krawędzi nie da się go rozszerzyć do grafu bez trójkątów. Czy wobec tego tą największą możliwą liczbą krawędzi jest 5?

Okazuje się, że nie. Mamy bowiem inny przykład. Graf na rysunku 3 też nie ma trójkątów, a dodanie dowolnej krawędzi utworzy trójkąt. Graf ten jest więc też maksymalny i ma 7 krawędzi. Może wobec tego tą największą możliwą liczbą krawędzi jest 7?


rys. 3


rys. 4


rys. 5

Znów nie! Mamy następny przykład. Graf na rysunku 4 też nie ma trójkątów, jest maksymalny i ma 8 krawędzi.

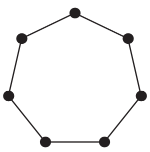
Okazuje się, że to jeszcze nie koniec. Mamy bowiem jeszcze jeden przykład, z rysunku 5 (punkt przecięcia przekątnych sześciokąta na tym rysunku nie jest wierzchołkiem grafu), który ma 9 krawędzi. Czy jest to już największa liczba? Czytelnicy, którzy pamiętają zadanie 3 z zawodów drugiego stopnia II OMG (2006/2007), znają odpowiedź: każdy graf mający 6 wierzchołków i 10 krawędzi zawiera co najmniej jeden trójkąt.

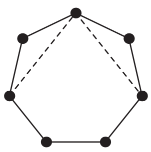
Zadanie 2.

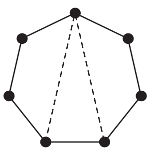
Rozważamy wszystkie grafy bez trójkątów mające 7 wierzchołków. Ile wynosi największa możliwa liczba krawędzi takiego grafu?

Poszukajmy najpierw grafu maksymalnego wśród grafów zawierających *cykl* złożony ze wszystkich siedmiu wierzchołków, czyli wśród grafów zawierających wszystkie krawędzie zaznaczone na rysunku 6.

Zastanówmy się najpierw, ile krawędzi może wychodzić z jednego wierzchołka, aby graf taki nie zawierał żadnego trójkąta. Dwie już widzimy; są to krawędzie cyklu. Żadna z dwóch przekątnych narysowanych linią przerywaną na rysunku 7 nie może być krawędzią grafu, bo powstałby trójkąt. Z kolei spośród dwóch przekątnych narysowanych linią przerywaną na rysunku 8 tylko jedna może być krawędzią grafu.

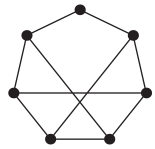

rys. 6

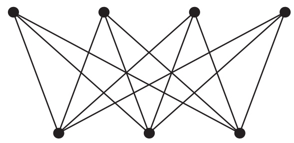

rys. 7


rys. 8

Stąd wynika, że z każdego wierzchołka mogą wychodzić co najwyżej 3 krawędzie. Ile zatem najwięcej krawędzi może mieć taki graf? Policzmy końce krawędzi. Mamy 7 wierzchołków, w każdym schodzą się co najwyżej 3 końce; zatem liczba końców krawędzi jest równa co najwyżej $3 \cdot 7 = 21$. Ponieważ liczba krawędzi jest całkowita, więc taki graf ma co najwyżej 10 krawędzi. I rzeczywiście graf bez trójkątów mający 10 krawędzi istnieje (rys. 9) i jest on maksymalny.

Czy zatem szukaną największą liczbą krawędzi jest w tym przypadku 10? Okazuje się, że nie! Mamy bowiem przykład grafu (rys. 10), który ma 12 krawędzi i także jest maksymalny.


rys. 9


rys. 10

Czy zatem 12 jest tą największą możliwą liczbą krawędzi? Nadszedł czas, by udzielić odpowiedzi na wszystkie nasze pytania i rozwiązać zadanie ogólne.

Zadanie 3.

Rozważamy wszystkie grafy bez trójkątów mające n wierzchołków. Ile wynosi największa możliwa liczba krawędzi takiego grafu?

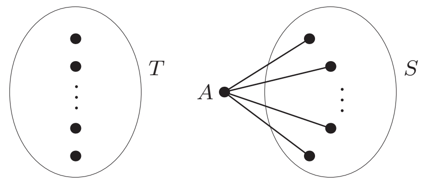
Rozwiązanie zadania 3 zaczniemy od udowodnienia następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Graf bez trójkątów mający n wierzchołków ma co najwyżej $\frac{1}{4}n^2$ krawędzi.

Dowód

Niech G będzie dowolnym grafem bez trójkątów mającym n wierzchołków. Niech A będzie takim wierzchołkiem grafu G, z którego wychodzi najwięcej krawędzi, oznaczmy tę liczbę krawędzi przez k (jeśli takich wierzchołków jest kilka, bierzemy którykolwiek z nich). Niech następnie S będzie zbiorem tych wierzchołków, które są połączone krawędzią z wierzchołkiem A i niech T będzie zbiorem wierzchołków różnych od A i niepołączonych krawędzią z A. Oczywiście zbiór S ma k elementów, a zbiór T ma $n-k-1$ elementów.



rys. 11

Żadne dwa wierzchołki zbioru S nie są połączone krawędzią, bowiem wraz z wierzchołkiem A utworzyłyby trójkąt. Wobec tego każda krawędź grafu G ma jeden koniec w wierzchołku A lub w którymś wierzchołku zbioru T. Ponadto z każdego wierzchołka grafu G wychodzi co najwyżej k krawędzi. Zatem łączna liczba krawędzi jest równa co najwyżej

$$k + (n-k-1) \cdot k$$

(jest k krawędzi wychodzących z A i co najwyżej k krawędzi wychodzących z każdego z $n-k-1$ wierzchołków zbioru T). Mamy więc udowodnić nierówność

$$k + (n-k-1) \cdot k \leqslant \frac{n^2}{4},$$

którą po kilku równoważnych przekształceniach sprowadzamy do postaci $0 \leqslant n^2 - 4nk + 4k^2$, czyli $0 \leqslant (n-2k)^2$. Ostatnia nierówność jest prawdziwa, a więc dowodzona nierówność też jest prawdziwa. To kończy dowód twierdzenia.

Z powyższego twierdzenia wynika, że jeśli n jest liczbą parzystą, na przykład $n = 2m$, to liczba krawędzi w grafie bez trójkątów nie przekracza $\frac{n^2}{4}=m^2$. Z kolei graf bez trójkątów mający m^2 krawędzi istnieje. Rozpatrzmy bowiem dwa zbiory wierzchołków S i T mające po m elementów i połączmy krawędzią każdy wierzchołek zbioru S z każdym wierzchołkiem zbioru T. Taki graf ma właśnie m^2 krawędzi i nie ma trójkątów.

Jeśli natomiast n jest liczbą nieparzystą, na przykład $n=2m+1$, to liczba krawędzi w grafie bez trójkątów nie przekracza

$$\frac{n^2}{4}=\frac{(2m+1)^2}{4}=\frac{4m^2+4m+1}{4}=m^2+m+\frac{1}{4}.$$

Ale liczba krawędzi jest liczbą całkowitą, więc jest równa co najwyżej $m^2+m=m(m+1)$. Graf bez trójkątów mający tyle krawędzi także istnieje: wystarczy zmodyfikować powyższy przykład przyjmując, że zbiór T ma $m+1$ elementów, a zbiór S ma m elementów.

Podsumowując: największa liczba krawędzi w grafie bez trójkątów jest równa m^2, jeśli $n=2m$ oraz równa $m(m+1)$, jeśli $n=2m+1$. To kończy rozwiązanie zadania 3.

Zauważmy, że rozwiązanie zadania 3 składało się z dwóch niezależnych części. Najpierw udowodniliśmy twierdzenie pokazujące, ile *co najwyżej* krawędzi ma graf bez trójkątów, a następnie wskazaliśmy przykłady grafów mające taką właśnie największą możliwą liczbę krawędzi. W podobny sposób należało rozwiązać zadanie olimpijskie. W rozwiązaniu konieczny jest przykład kolorowania płaszczyzny trzema kolorami i konieczny jest dowód, że czterema kolorami w taki sposób płaszczyzny pokolorować nie można. Wskazanie przykładu „maksymalnego” nie jest dowodem — tak jak żaden przykład grafu maksymalnego nie był dowoden w naszych zadaniach o grafach bez trójkątów.

Zobaczmy jeszcze jedno zadanie podobnego typu. Tym razem będziemy kolorować ciągi kółek dwoma kolorami: białym i czarnym. Kolorowanie nazwiemy *prawidłowym*, jeśli nie istnieją trzy kółka tego samego koloru w takich samych odstępach od siebie. Popatrzmy na przykłady.

○ ○ ● ● ○ ● ● ● ○ ●

rys. 12

Na rysunku 12 widzimy kolorowanie nieprawidłowe, bowiem istnieją w nim ciągi kółek tego samego koloru w jednakowych odstępach:

1) trzy białe kółka na miejscach 1, 5 i 9,
2) trzy czarne kółka na miejscach 6, 7 i 8,
3) trzy czarne kółka na miejscach 4, 7 i 10.

Z kolei na rysunkach 13 i 14 znajdują się kolorowania prawidłowe.

○ ● ○ ● ● ○ ●

rys. 13

○ ● ○ ○ ● ●

rys. 14

Zauważmy przy tym, że kolorowania z rysunku 14 nie można przedłużyć do kolorowania prawidłowego, dorysowując z jego prawej strony kółko dowolnego koloru: dorysowanie kółka białego da trójkę białą na miejscach 1, 4 i 7; dorysowanie kółka czarnego da trójkę czarną na miejscach 5, 6, i 7. Takie kolorowanie prawidłowe, którego nie można rozszerzyć do kolorowania prawidłowego dorysowując na jego końcu kółko białe lub czarne, nazwiemy kolorowaniem *maksymalnym*.

Zadanie 4.

Ile wynosi największa możliwa liczba kółek w kolorowaniu prawidłowym dwoma kolorami?

Wiemy już, że wskazanie kolorowania maksymalnego nie stanowi rozwiązania zadania. Mamy bowiem przykład kolorowania maksymalnego długości 6 (rys. 14) oraz kolorowania prawidłowego długości większej od 6 (rys. 13). Zauważmy też, że kolorowanie z rysunku 13 nie jest maksymalne: można je przedłużyć do kolorowania maksymalnego dorysowując kółko białe

○ ● ○ ● ● ○ ● ○

rys. 15

i otrzymując w ten sposób nowe kolorowanie maksymalne o długości 8. Czy istnieje zatem kolorowanie prawidłowe o długości większej niż 8? Okazuje się, że nie. Można na przykład rozważyć wszystkie możliwe przypadki i wypisać wszystkie możliwe prawidłowe kolorowania maksymalne. Ponadto istnieje tylko 12 prawidłowych kolorowań maksymalnych zaczynających się od kółka białego i tyle samo zaczynających się od kółka czarnego (powstających z poprzednich przez zamianę kolorów). Polecam Czytelnikom sprawdzenie tego.

Trudniej natomiast jest odpowiedzieć na pytanie, ile wynosi największa możliwa liczba kółek w kolorowaniu prawidłowym trzema kolorami. Okazuje się, że ta największa możliwa liczba kółek to 26, jednak uzasadnienie tego stwierdzenia wykorzystuje obliczenia komputerowe.

Wiadomo także, że najdłuższe prawidłowe kolorowanie za pomocą czterech kolorów składa się z 75 kółek. Nie znamy natomiast odpowiedzi na pytania, jakie są najdłuższe kolorowania prawidłowe pięcioma i sześcioma kolorami (dla 5 kolorów wiemy, że najdłuższe kolorowanie prawidłowe ma długość co najmniej 170, a dla sześciu kolorów co najmniej 223). Wiadomo także, że długość każdego prawidłowego kolorowania dla r kolorów nie przekracza

$$2^{2^{r^{2^{2^{12}}}}}.$$

Jak widać odpowiedzi na niektóre pytania o maksymalność są niezwykle trudne do uzyskania. W pewnych sytuacjach umiemy udowodnić twierdzenie ogólne i wskazać odpowiedni przykład maksymalny, w innych próbujemy przeszukać wszystkie możliwe przypadki, by znaleźć w ten sposób najdłuższy przykład maksymalny.

Wojciech Guzicki

Polacy znów na podium

W dniach 8–12 listopada 2012 r. w Estonii odbyły się 23. Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich (*Baltic Way*), w których udział wzięło 11 reprezentacji: z Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Litwy, Łotwy, Niemiec, Norwegii, Polski, Szwecji oraz Sankt Petersburga. Każda reprezentacja liczyła 5 uczniów.

Polska drużyna, wybrana w kwietniu 2012 r. na podstawie wyników LXIII Olimpiady Matematycznej, miała następujący skład:

- Grzegorz Adamski – I LO w Szamotułach;
- Anna Olech – XIV LO w Warszawie;
- Kajetan Ożarowski – XIV LO we Wrocławiu;

- Krzysztof Pszeniczny – LO Sióstr Prezentek w Rzeszowie;
- Michał Ziobro – V LO w Krakowie.

Zawody odbyły się dnia 10 listopada i miały charakter zespołowy. Każda drużyna pracowała wspólnie w jednej sali, mając 4,5 godziny na rozwiązanie 20 zadań. Za każde zadanie można było otrzymać od 0 do 5 punktów. Pierwsze miejsce zajęli uczniowie z Sankt Petersburga z wynikiem 88 punktów. Drużyna polska zdobyła 75 punktów i zajęła drugie miejsce, a trzecia była ekipa z Litwy z wynikiem 63 punktów. Warto tu przypomnieć, że pierwsze miejsca Polski w zawodach *Baltic Way* w latach 2010 i 2011 zostały osiągnięte przy nieobecności drużyny petersburskiej. Tym razem Rosjanie przyjechali i zabrali puchar przechodni do siebie. Liczymy więc, że przyjadą też na przyszłoroczne zawody...

Wśród zadań, z którymi zmagali się uczniowie, znalazły się następujące dwa, doskonale ilustrujące metody opisane w artykule *Kwadraty, liczby pierwsze i reszta* (*Kwadrat* nr 7, grudzień 2012).

Zadanie 1. (*Baltic Way* 2012, zadanie nr 18)

Wyznaczyć wszystkie trójki (a,b,c) liczb całkowitych spełniających równanie
$$a^2+b^2+c^2=20122012.$$

Rozwiązanie

Prawa strona rozważanego równania jest podzielna przez 4. Zastanówmy się więc nad resztą, jaką mogą dawać składniki lewej strony przy dzieleniu przez 4. Jak wiemy, kwadrat liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 4 resztę 0 lub 1. Wynika stąd, że suma trzech takich kwadratów może być podzielna przez 4 jedynie wtedy, gdy wszystkie te kwadraty są podzielne przez 4. A to oznacza, że jeżeli trójka (a,b,c) jest rozwiązaniem danego równania, to liczby a, b i c są parzyste.

Możemy zatem napisać $a=2x$, $b=2y$ i $c=2z$, gdzie liczby x, y i z są całkowite. Po podstawieniu tych zależności do naszego równania i obustronnym podzieleniu przez 4, otrzymujemy równanie
$$(*)\qquad x^2+y^2+z^2=5030503.$$

Przyjrzyjmy się teraz resztom, jakie obie strony równania $(*)$ dają przy dzieleniu przez 8. Bez trudu obliczamy, że prawa strona daje resztę 7. Natomiast kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0, 1 lub 4. Stąd wnioskujemy, że suma trzech kwadratów nie może dawać reszty 7. W konsekwencji równanie $(*)$ — a w ślad za tym także równanie dane w treści zadania — nie ma żadnych rozwiązań.

Zadanie 2. (*Baltic Way* 2012, zadanie nr 19)

Wykazać, że liczba $n^n+(n+1)^{n+1}$ jest złożona dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że dla nieskończenie wielu wartości n liczba $n^n+(n+1)^{n+1}$ jest podzielna przez 3, a więc złożona (gdyż dla każdego $n\geqslant 1$ jest ona większa od 3).

W tym celu zastanówmy się nad resztą, jaką w zależności od k daje liczba k^k przy dzieleniu przez 3. Jeżeli liczba k jest podzielna przez 3, to liczba k^k również. A jeżeli liczba k nie jest podzielna przez 3? Wtedy istotna staje się parzystość liczby k. Jeżeli liczba k jest parzysta, to wykładnik potęgi k^k jest parzysty, czyli liczba k^k jest kwadratem, i to kwadratem niepodzielnym przez 3. Zatem $k^k\equiv 1 \pmod 3$. Jeżeli natomiast liczba k jest nieparzysta, to podobnie stwierdzamy, że liczba k^{k-1} jest kwadratem niepodzielnym przez 3, skąd otrzymujemy
$$k^k=k^{k-1}\cdot k\equiv 1\cdot k=k \pmod 3.$$

Podsumowując:
$$\begin{aligned}
k^k &\equiv 0 \pmod 3, && \text{jeśli } k\equiv 0 \pmod 3,\\
k^k &\equiv 1 \pmod 3, && \text{jeśli } k\not\equiv 0 \pmod 3 \text{ i } k\equiv 0 \pmod 2,\\
k^k &\equiv k \pmod 3, && \text{jeśli } k\not\equiv 0 \pmod 3 \text{ i } k\not\equiv 0 \pmod 2.
\end{aligned}$$

Uzyskane wyniki najprościej przedstawić w zależności od reszty z dzielenia liczby k przez 6:

$k \pmod 6$	0	1	2	3	4	5
$k \pmod 2$	0	1	0	1	0	1
$k \pmod 3$	0	1	2	0	1	2
$k^k \pmod 3$	0	1	1	0	1	2

Stąd prosty wniosek: dla $n\equiv 4 \pmod 6$ prawdziwe są zależności $n^n\equiv 1 \pmod 3$ oraz $(n+1)^{n+1}\equiv 2 \pmod 3$, czyli suma $n^n+(n+1)^{n+1}$ jest podzielna przez 3. Zatem wszystkie liczby n dające resztę 4 z dzielenia przez 6 spełniają warunki zadania, co kończy rozwiązanie.

Wypada jeszcze dodać słowo o... kurczakach. Co mają wspólnego kurczaki z zawodami *Baltic Way* 2012 ? Otóż uroczystość zakończenia zawodów wraz z bankietem pożegnalnym została zorganizowana w centrum nauki AHHAA w Tartu. Można tam było obserwować różne eksperymenty fizyczne (i nie tylko), jednak zamiast wirów wodnych czy labiryntu z luster największym zainteresowaniem — zwłaszcza wśród uczniów mieszkających od urodzenia w dużych miastach — cieszył się szklany inkubator przeznaczony do wylęgu jaj kurzych. Można go było obserwować z sali bankietowej, a stan umieszczonych w nim jaj zmienił się nieco podczas wieczoru...

Więcej informacji na temat historii zawodów *Baltic Way* można znaleźć w *Kwadracie* nr 4 (maj 2012).

Kamil Duszenko

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Czy istnieje taki wielościan...?

3. Zaznacz na rysunku punkty wspólne płaszczyzn zawierających górną i dolną ścianę i sprawdź, czy leżą one na jednej prostej. Szukaną bryłę można uzyskać, przecinając odpowiednio jeden ze skonstruowanych w artykule wielościanów.

4. Przetnij odpowiednio graniastosłup sześciokątny.

5. Przetnij odpowiednio graniastosłup o podstawie 99-kąta.

Kwadraty, liczby pierwsze i reszta

4. Ile wynosi łączna liczba ścian, wierzchołków i krawędzi w graniastosłupie o podstawie n-kąta? A w ostrosłupie?

5. W przypadku (a) porównaj reszty z dzielenia obu stron danego równania przez 3, w przypadku (c) przez 5, natomiast w przypadku (b) przez 4 i przez 8.

6. Rozważ możliwe reszty z dzielenia p przez 5.

7. Rozważ osobno przypadki, gdy x jest liczbą parzystą i nieparzystą (popatrz na resztę z dzielenia przez 5). Następnie rozważ reszty z dzielenia przez 3 i przez 8.

8. Popatrz na reszty z dzielenia liczby $1+3^n+5^n$ kolejno przez 3, 5 i 7. *Uwaga.* Dla $n=12$ liczba $1+3^n+5^n$ jest pierwsza!

Redaguje zespół w składzie: Urszula Pastwa, Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Nr 9
czerwiec 2013
ISSN 2300-0708

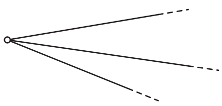
Jak znaleźć wielościan?

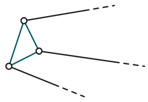
O tym, w jakie pułapki można wpaść, próbując podać przykłady wielościanów spełniających określone warunki, można przeczytać w *Kwadracie nr 7* (grudzień 2012). W tym artykule skupimy się na omówieniu metod przydatnych w szukaniu poprawnych przykładów. Zobrazujemy je na bazie następującego zadania, które pojawiło się na finale tegorocznej, VIII edycji OMG.

Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę ścian i w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi?

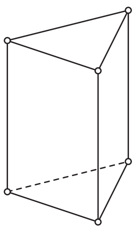
Taki wielościan istnieje (i to niejeden), a jego konstrukcję *warto zacząć od dobrze znanej bryły*, takiej jak sześcian, graniastosłup czy ostrosłup, a następnie coś do niej *dobudować*, albo coś od niej *odciąć*. Czynności te można powtarzać wielokrotnie i na wiele sposobów.

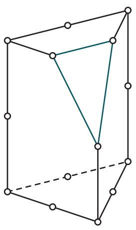
Wprowadźmy najpierw pojęcia, którymi będziemy się posługiwać w artykule.

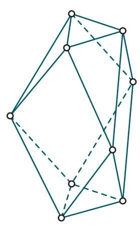

rys. 1


rys. 2

Narożem n-kątnym wielościanu nazwiemy taki jego wierzchołek, w którym schodzi się n krawędzi (rys. 1 przedstawia naroże trójkątne). Natomiast *odcięciem* naroża nazwiemy przecięcie bryły płaszczyzną blisko wierzchołka, a następnie *usunięcie* tej części, która zawiera dany wierzchołek (rys. 2 przedstawia odcięcie naroża trójkątnego z rys. 1).


rys. 3


rys. 4


rys. 5

Przy doklejaniu ostrosłupa do pewnej ściany wielościanu (jako na podstawie), ostrosłup powinien być na tyle niski, aby żadna jego ściana boczna nie leżała w płaszczyźnie żadnej ze ścian wielościanu oraz aby uzyskana nowa bryła pozostała wypukła. Taki sposób doklejenia nazwiemy *przyzwoitym*.

Przechodzimy do konstrukcji wielościanów spełniających warunki zadania.

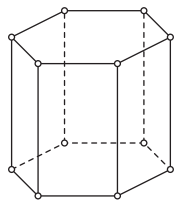
Sposób I

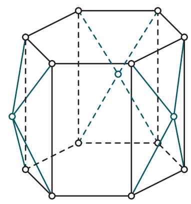
Rozważmy *graniastosłup* o podstawie $(2n+1)$-kąta (rys. 3 przedstawia przypadek $n=1$). Na każdej krawędzi wybierzmy po jednym punkcie (mogą to być na przykład środki krawędzi), a następnie *odetnijmy* naroża graniastosłupa płaszczyznami przechodzącymi przez punkty wybrane na tych krawędziach, które schodzą się w danym wierzchołku (rys. 4 przedstawia jedno z takich odcięć).

Wykonując $4n+2$ odcięć naroży, dostajemy bryłę, której wszystkie wierzchołki są wybranymi przez nas wcześniej punktami na krawędziach i w każdym z nich schodzą się 4 krawędzie (rys. 5. przedstawia otrzymany wielościan dla $n=1$). Każde odcięcie naroża zwiększa liczbę ścian o 1, a zatem skoro na początku mieliśmy $2n+3$ ściany, to liczba ścian końcowego wielościanu będzie równa liczbie nieparzystej $6n+5$.

Sposób II

Tym razem zacznijmy od *graniastosłupa*, którego podstawą jest $(4n+2)$-kąt (na rys. 6 przyjmujemy $n=1$). Następnie na co drugiej ścianie bocznej, jako na podstawie, doklejmy *w przyzwoity sposób* ostrosłupy czworokątne (rys. 7). Otrzymana bryła ma wtedy $10n+7$, czyli nieparzystą liczbę ścian, a w jej każdym wierzchołku schodzą się dokładnie 4 krawędzie.

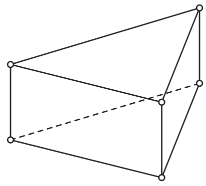

rys. 6

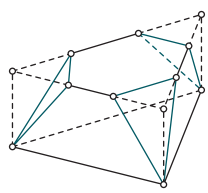

rys. 7

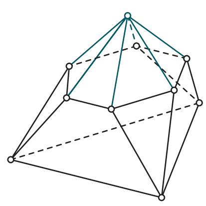
Sposób III

Rozpoczniemy od *graniastosłupa*, którego podstawą jest n-kąt, przy czym $n \geqslant 3$ (rys. 8 obrazuje przypadek $n=3$).

Nazwijmy podstawy *dolną* i *górną*. Na każdej krawędzi górnej podstawy wybierzmy po 2 punkty, na przykład tak, aby były one wierzchołkami $2n$-kąta foremnego. *Odetnijmy* wszystkie naroża przy górnej podstawie płaszczyznami przechodzącymi przez pary wybranych punktów oraz odpowiednie wierzchołki dolnej podstawy (rys. 9). Następnie do $2n$-kąta, który został wycięty z górnej podstawy, doklejmy *w przyzwoity sposób* ostrosłup $2n$-kątny (rys. 10).


rys. 8

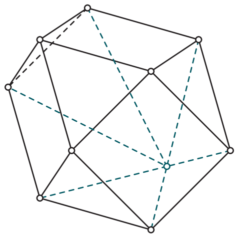

rys. 9

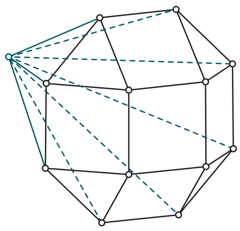

rys. 10

Otrzymaliśmy wielościan, który ma $4n+1$ — czyli nieparzystą liczbę — ścian, a w każdym wierzchołku schodzą się 4 krawędzie lub $2n$ krawędzi.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Jeśli dla $n=3$ lub $n=4$ wyjściowy graniastosłup n-kątny zastąpimy ściętym ostrosłupem n-kątnym o dolnej podstawie mniejszej od górnej, to otrzymamy wielościany przedstawione na rysunkach 11 i 12 (nieco obrócone w stosunku do wyjściowych konfiguracji).


rys. 11


rys. 12

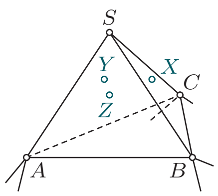
W celu ułatwienia dalszego zapisu każdy wielościan wypukły spełniający warunki zadania nazwiemy *dobrym*.

Opiszemy teraz dwie metody modyfikowania znalezionych przykładów dobrych wielościanów. Pozwoli nam to uzyskać wielościany dobre o *dowolnej*, większej od 9, nieparzystej liczbie ścian.

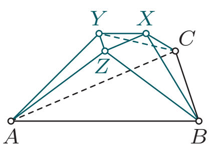
Metoda I

Niech $ABCS$ będzie ostrosłupem trójkątnym o podstawie ABC (rys. 13). Na ścianach BCS, CAS i ABS wybierzmy (dowolnie) odpowiednio punkty X, Y i Z, a następnie *obetnijmy* ostrosłup $ABCS$ w taki sposób, aby otrzymać ośmiościan $ABCXYZ$ (rys. 14). Ośmiościan taki uzyskamy, tnąc czworościan kolejno płaszczyznami AYZ, BZX, CXY, XYZ i pozostawiając po każdym cięciu tę część, która nie zawiera punktu S.

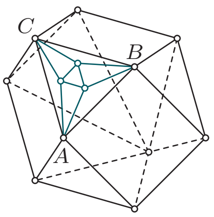
Załóżmy teraz, że pewien dobry wielościan ma przynajmniej jedną ścianę trójkątną. Wówczas możemy *dokleić* do tej ściany ośmiościan $ABCXYZ$, oczywiście *w przyzwoity sposób*, czyli tak, aby wyjściowy ostrosłup $ABCS$ był odpowiednio niski.



rys. 13



rys. 14



rys. 15

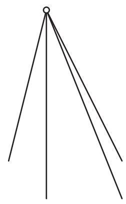
Liczba ścian otrzymanego wielościanu jest o 6 większa od liczby ścian wyjściowego wielościanu dobrego, czyli jest nieparzysta. Ponadto we wszystkich wierzchołkach schodzi się w dalszym ciągu parzysta liczba krawędzi, a więc otrzymany wielościan jest dobry.

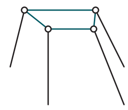
Rysunek 15 przedstawia dobry wielościan o 19 ścianach otrzymany z wielościanu pokazanego na rysunku 11.

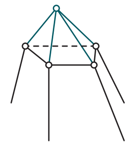
Metoda II

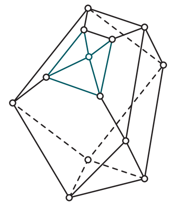
Załóżmy, że dobry wielościan posiada co najmniej jedno naroże $2n$-kątne (rys. 16). *Odetnijmy* je od naszego wielościanu (rys. 17), a na powstałym w przekroju $2n$-kącie, jako na podstawie, doklejmy ostrosłup, jak zwykle *przyzwoicie* (rys. 18).

Otrzymana bryła ma o $2n$ ścian więcej od wyjściowego dobrego wielościanu i w każdym z wierzchołków schodzi się nadal parzysta liczba krawędzi. Rysunek 19 przedstawia dobry wielościan o 15 ścianach otrzymany z wielościanu pokazanego na rysunku 5.


rys. 16


rys. 17

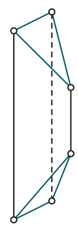

rys. 18

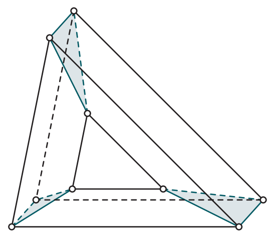

rys. 19

Na bazie skonstruowanych już przykładów można uzasadnić, że istnieje dobry wielościan o dowolnej, większej od 9, liczbie ścian. Rzeczywiście, w sposobie III liczba ścian dobrego wielościanu jest postaci $4n+1$, gdzie $n\geqslant 3$. Z kolei wybierając dowolną ścianę trójkątną w tym wielościanie i stosując metodę I, dostajemy dobry wielościan o liczbie ścian równej $4n+7$ dla $n\geqslant 3$. Brakujące (powyżej 9) nieparzyste liczby ścian 11 i 15 posiadają wielościany odpowiednio na rysunkach 5 i 19.

Warunki zadania nakładają na nas poszukiwania przykładów wśród brył wypukłych. Pomijając to wymaganie, można znaleźć *niewypukły* wielościan o 9 ścianach, który spełnia pozostałe warunki zadania (rys. 21). Powstaje on ze sklejenia ze sobą ścianami trójkątnymi trzech brył widocznych na rysunku 20.

Proponujemy Czytelnikowi rozstrzygnięcie, czy istnieje dobry, a więc także *wypukły*, wielościan o mniejszej od 11 liczbie ścian.


rys. 20


rys. 21

Na koniec kilka problemów do samodzielnego rozważenia przez Czytelnika. Wskazówki podamy w następnym numerze.

Zadanie 1.

Rysunek 21 przedstawia niewypukłą bryłę, która ma 9 ścian. Czy istnieje wielościan niewypukły, który ma mniej niż 9 ścian?

Zadanie 2.

Czy istnieje wielościan wypukły o dziewięciu ścianach, który ma trzy ściany trójkątne, trzy czworokątne i trzy pięciokątne?

Zadanie 3.

Czy istnieje dobry wielościan, w którym dokładnie jedna ściana ma parzystą liczbę boków?

Zadanie 4.

Czy istnieje wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi, a w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi?

Łukasz Bożyk

Kolejne medale Polek

W dniach 8–14 kwietnia 2013 r. odbyła się w mieście Luksemburg, stolicy kraju o tej samej nazwie, II Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt (European

Girls' Mathematical Olympiad, EGMO). W skład polskiej reprezentacji, wyłonionej na podstawie wyników zeszłorocznej Olimpiady Matematycznej, weszły Basia oraz aż trzy Anie:

- Anna Czerwińska (XIII LO w Szczecinie),
- Anna Hoduń (V LO w Krakowie),
- Barbara Mroczek (XIV LO w Warszawie),
- Anna Olech (XIV LO w Warszawie).

Każda z dziewcząt była w przeszłości laureatką OMG.

Chociaż zawody EGMO odbywały się dopiero po raz drugi, to można już zaobserwować ich rosnącą popularność. Wzięły w nich udział delegacje 22 krajów (o 3 więcej niż w roku ubiegłym), łącznie 87 uczennic (o 17 więcej niż rok temu).

Pierwszego dnia po przyjeździe do Luksemburga zawodniczki uczestniczyły w uroczystej ceremonii otwarcia Olimpiady. Same zawody odbyły się 10 i 11 kwietnia. Każdego z tych dni dziewczęta miały 4,5 godziny na samodzielne rozwiązanie 3 zadań wybranych uprzednio przez komisję spośród propozycji nadesłanych przez uczestniczące kraje (wśród wybranych zadań znalazło się jedno zaproponowane przez Polskę). Za każde z zadań można było otrzymać od 0 do 7 punktów.

Żadnej z zawodniczek nie udało się zdobyć maksymalnej liczby 42 punktów. Zwyciężczyni Olimpiady — Danielle Wang z USA — ukończyła zawody z wynikiem 38 punktów. Danielle, mimo że ma dopiero 15 lat i była jedną z młodszych uczestniczek, wygrała EGMO już po raz drugi.

Polki wypadły znakomicie — wszystkie wróciły do kraju z medalami. Szczególne wyrazy uznania należą się Basi Mroczek, która ze wspaniałym wynikiem 29 punktów ukończyła zawody na czwartym miejscu w klasyfikacji indywidualnej. Złoty medal odebrała z rąk premiera Luksemburga Jean-Claude Junckera. Pozostałe dziewczęta również uzyskały bardzo dobre rezultaty: Ania Hoduń wywalczyła srebrny, a Ania Czerwińska oraz Ania Olech — brązowe medale. Gratulujemy!

Pierwsze miejsce w klasyfikacji drużynowej zajęły ex aequo 3 kraje: Białoruś, Serbia i USA, zdobywając po 99 punktów. Czwarte miejsce przypadło Bułgarii (90 punktów), natomiast piąte Polkom (89 punktów).

Pobyt w Luksemburgu trwał cały tydzień. Było więc mnóstwo czasu na zwiedzanie, integrację z reprezentacjami innych krajów oraz zapewnione przez organizatorów atrakcje. Zakwaterowanie w schronisku młodzieżowym w pobliżu malowniczego centrum umożliwiało częste spacery po przepięknych zakątkach miasta. Ostatniego dnia uczestniczki Olimpiady udały się pociągiem na całodniową wycieczkę do miasteczka Clervaux na północy kraju. Dziewczęta miały okazję zwiedzić opactwo benedyktyńskie oraz kilka zabytkowych zamków i kościołów, a także pospacerować po górzystym terenie wokół miasteczka.

Udział naszego kraju w zawodach EGMO cieszy się niegasnącym zainteresowaniem Telewizji Polskiej. Podobnie jak w zeszłym roku, reprezentacja gościła w porannym programie *Kawa czy herbata?* w TVP1. Link do nagrania rozmowy z dziewczętami można znaleźć na naszej stronie internetowej: `www.omg.edu.pl/media`.

W przyszłym roku Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt odbędzie się w Turcji. Plotka głosi, że swój udział zapowiada ponad czterdzieści krajów europejskich i nie tylko! Wygląda więc na to, że spełniają się nadzieje organizatorów — zawody EGMO zyskują coraz większą renomę i ugruntowują swoją pozycję na arenie najbardziej prestiżowych międzynarodowych imprez matematycznych.

Więcej o zawodach EGMO można dowiedzieć się ze strony internetowej Olimpiady: `www.egmo.org`.

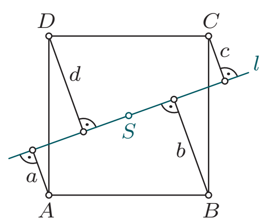
Joanna Ochremiak
wiceprzewodnicząca delegacji polskiej

Urok zbioru „mi”

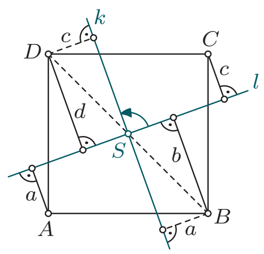
Praca „Urok zbioru μ”, którą napisałem w 2010 roku na XXXII Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki czasopisma *Delta*, została zainspirowana następującym zadaniem pochodzącym z OMG.

Zadanie 1. (IV OMG, zawody I stopnia)

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1 oraz prosta l przechodząca przez jego środek S. Niech a, b, c, d oznaczają odpowiednio odległości punktów A, B, C, D od prostej l. Wykaż, że $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ (rys. 22).



rys. 22



rys. 23

Rozwiązanie

Oznaczmy przez $d(X,m)$ odległość punktu X od prostej m.

Obróćmy prostą l wokół punktu S o $90°$ (rys. 23). W efekcie uzyskamy prostą k, która przechodzi przez punkt S i jest prostopadła do prostej l. Ponieważ w wyniku tego obrotu punkt A przechodzi na B, a punkt C na D, więc $d(B,k)=d(A,l)=a$ oraz $d(D,k)=d(C,l)=c$. Wobec tego na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $a^2+b^2=BS^2$ oraz $c^2+d^2=DS^2$. Stąd

$$a^2+b^2+c^2+d^2=BS^2+DS^2=1\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Wykazaliśmy zatem, że suma kwadratów odległości punktów A, B, C, D od prostej l *nie zależy od wyboru prostej l przechodzącej przez punkt S*. Tę szczególną własność punktu S wyróżnimy za pomocą następującej definicji.

Definicja

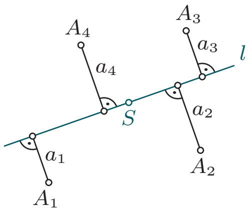
Punkt S nazwiemy *μ-punktem układu punktów* $A_1,A_2,\ldots,A_n$, jeśli posiada on następującą własność: suma kwadratów odległości punktów $A_1,A_2,\ldots,A_n$ od dowolnie obranej prostej l przechodzącej przez punkt S nie zależy od wyboru prostej l (rys. 24).

W świetle powyższego, przytoczone zadanie z OMG można wyrazić krótko: środek S kwadratu jest μ-punktem jego wierzchołków A, B, C, D.

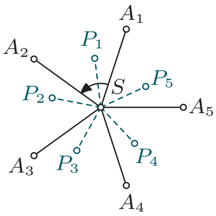
Jednym z wyników, jaki uzyskałem w pracy, jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.
Każdy układ punktów na płaszczyźnie posiada dokładnie jeden lub dokładnie dwa μ-punkty.

Opierając się na tym twierdzeniu, można łatwo rozwiązać nieco ogólniejsze zadanie.



rys. 24



rys. 25

Zadanie 2.
Niech $A_1A_2\ldots A_n$ $(n\geqslant 3)$ będzie n-kątem foremnym o środku S. Wykaż, że S jest jedynym μ-punktem wierzchołków $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Rozwiązanie
Niech P_1 będzie μ-punktem danego układu punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (zob. rys. 25 dla $n=5$). Przypuśćmy, że $P_1 \neq S$.

Ponieważ obrót wokół punktu S o kąt $\frac{1}{n}\cdot 360^\circ$ pozostawia w miejscu nasz wielokąt foremny, więc punkt P_2, będący obrazem punktu P_1 przy tym obrocie, również jest μ-punktem danego układu punktów $A_1, A_2 \ldots, A_n$. Poprzez powtarzanie obrotu otrzymamy kolejno n różnych μ-punktów $P_1, P_2, \ldots, P_n$. To stoi w sprzeczności z twierdzeniem, że μ-punkty są najwyżej dwa.

Dowiedliśmy w ten sposób, że żaden punkt różny od S nie może być μ-punktem, a ponieważ wiemy, że μ-punkt istnieje, więc musi być nim punkt S. To kończy rozwiązanie zadania.

Wykazaliśmy zatem, że *dla każdej prostej l przechodzącej przez środek wielokąta foremnego, suma kwadratów odległości wierzchołków wielokąta od prostej l nie zależy od wyboru tej prostej*. Dowiedliśmy także, że środek wielokąta jest *jedynym* punktem o tej własności.

W celu sprawdzenia, czy punkt S jest μ-punktem układu punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definicja nakazuje obliczyć sumę kwadratów odległości danych punktów od *każdej* możliwej prostej przechodzącej przez S. Okazuje się, że wystarczające jest rozpatrzenie zaledwie trzech prostych. Udowodniłem mianowicie w pracy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.
Jeśli suma kwadratów odległości danych punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ od każdej spośród trzech różnych prostych przechodzących przez pewien punkt S przyjmuje tę samą wartość, to punkt S jest μ-punktem układu punktów A_1, $A_2, \ldots, A_n$.

Twierdzenie to można wykorzystać do rozwiązania zadania 2 innym sposobem. Szczegóły pozostawiam Czytelnikom.

W pracy scharakteryzowałem także μ-punkty dla dowolnego trójkąta oraz badałem własności μ-punktów dla układów w przestrzeni trójwymiarowej.

Zacytowane przeze mnie wyniki zostały uzyskane przy pomocy narzędzi geometrii analitycznej i ich dowody wykraczają poza ramy tego artykułu. Ze względu na prostotę samych wyników można jednak przypuszczać, że da się je uzyskać elementarnymi metodami. Gorąco zachęcam Czytelników do znalezienia takich dowodów.

Kończąc, chciałbym zaproponować dwa zadania dla Czytelników. Wskazówki do nich znajdą się w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 3.
Wyznacz μ-punkty układu dwóch punktów A, B.

Zadanie 4.
Wykaż, że jeśli środek ciężkości S trójkąta ABC jest μ-punktem wierzchołków A, B, C, to trójkąt ABC jest równoboczny.

Michał Miśkiewicz

Dopisek od redakcji

Autor powyższego artykułu, laureat II edycji OMG, skromnie nie napisał, że jego praca zdobyła złoty medal podczas wspomnianego na początku XXXII Konkursu Prac Uczniowskich z Matematyki, a w 2011 roku medal brązowy na XXIII Konkursie Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej.

Jak widać zadania OMG stanowią doskonałą inspirację do stawiania dalszych pytań i rozwiązywania ciekawych problemów. Gratulujemy Michałowi pierwszych sukcesów naukowych i czekamy na osoby, które pójdą w jego ślady.

Pracę Michała Miśkiewicza można pobrać z naszej strony internetowej: `www.omg.edu.pl/gazetka-omg`.

Chochlik wakacyjny

Rosnący poziom przygotowania uczestników OMG znacząco utrudnił w tym roku dobór tekstów do rubryczki „Chochlik Olimpijski”. Rozwiązania zadań konkursowych zdają się cechować coraz większą dojrzałością redakcyjną. Szczęśliwie dla „Chochlika”, źródłem prawdziwych perełek pozostają problemy kombinatoryczne, których rozwiązania wyzwalają ogromny potencjał twórczy zawodników. Poniższe trzy obserwacje dotyczące zadania 4 zawodów stopnia II świadczą o wielkiej przenikliwości umysłów młodych matematyków:

- (obserwacja poznawcza) *Ograniczeniem liczby kolorów jest jedynie ich ilość znana człowiekowi.*
- (obserwacja warunkowa) *Zależy, jaką nam dano płaszczyznę.*
- (obserwacja praktyczna) *Możemy pomalować płaszczyznę wzdłuż i wszerz.*

A oto przykład trudności, jaką napotkał jeden z rozwiązujących:

- *Wszystko jest w porządku, gdy patrzymy na obrazek pionowo. Problem zaczyna się, gdy patrzymy poziomo.*

Tym humorystycznym akcentem żegnamy się z Czytelnikami w tym roku szkolnym, życząc udanych wakacji i pionowego (czyt. beztroskiego) wypoczynku. ;)

Redaguje zespół w składzie: Urszula Pastwa, Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: `kwadrat.omg@gmail.com`

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 10
wrzesień 2013
ISSN 2300-0708

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Tradycyjny wstęp

Z chwilą wybrzmienia upragnionego przez uczniów pierwszego dzwonka rozpoczynamy kolejny rok działalności gazetki Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów *Kwadrat*. Jest to już rok trzeci, wydaje nam się więc, że zasłużyliśmy na zdania rozpoczynające się od „Tradycyjnie... ”, a zatem...

Tradycyjnie przeczytacie u nas ciekawe artykuły matematyczne inspirowane zadaniami z OMG, rozwijające te problemy i przygotowujące do zawodów. Tradycyjnie zamieszczać będziemy informacje o sukcesach młodych adeptów matematyki, z których większość (a prawdopodobnie nawet wszyscy) było swego czasu laureatami naszej Olimpiady.

I tradycyjnie zachęcamy uczniów do wzięcia udziału w tegorocznej edycji Olimpiady, a nauczycieli zachęcamy do zachęcania uczniów razem z nami. Warto, gdyż OMG skutecznie uczy, jak stawiać czoła niestandardowym wyzwaniom, a laureaci kontynuują naukę w dowolnie wybranej szkole ponadgimnazjalnej.

Tradycyjnie polecamy także regularne odwiedzanie naszej strony internetowej `www.omg.edu.pl`, profilu OMG na Facebooku oraz przypominamy o adresie mailowym `kwadrat.omg@gmail.com`, gdzie czekamy na wszelkie uwagi i sugestie dotyczące naszej gazetki. Tradycyjnie życzymy miłej lektury! :)

Rady na układy

Jedna z metod rozwiązywania układów dwóch równań z dwiema niewiadomymi — tzw. *metoda podstawiania* — polega na wyznaczeniu wybranej niewiadomej z jednego równania i podstawieniu do drugiego. W ten sposób układ równań sprowadzamy do równania. Zdarza się jednak, że tak otrzymane równanie jest skomplikowane i nie umiemy go rozwiązać. Przyjrzyjmy się następującemu przykładowi.

Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = 2y-1 \\ y^2 = 2x-1\,. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Wyznaczając niewiadomą y z pierwszego równania, otrzymujemy $y=\frac{1}{2}(x^2+1)$, co po podstawieniu do drugiego równania daje

$$\tfrac{1}{4}(x^2+1)^2 = 2x-1\,.$$

Przekształcając równoważnie, uzyskujemy

$$x^4+2x^2-8x+5=0\,.$$

Chociaż to konkretne równanie można rozwiązać, wykonując kilka pomysłowych przekształceń, to na ogół równania czwartego stopnia są trudne do rozwiązania. Dlatego, aby rozwiązać nasz układ równań, postąpimy nieco inaczej.

Dodajmy dane równania stronami. Uzyskujemy wówczas $x^2+y^2=2x+2y-2$, czyli

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=0\,.$$

Korzystając teraz ze wzoru skróconego mnożenia, możemy powyższą zależność zapisać w postaci

$$(x-1)^2+(y-1)^2=0\,.$$

Liczby $(x-1)^2$ oraz $(y-1)^2$ są nieujemne i ich suma jest równa 0. Oznacza to, że każda z tych liczb musi być równa 0, czyli $x-1=0$ oraz $y-1=0$. Stąd $(x,y)=(1,1)$.

Pozostaje sprawdzić, że para $(x,y)=(1,1)$ jest istotnie rozwiązaniem danego układu równań.

Zadanie 2. (II OMG, zawody III stopnia).

Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} ab = a+b \\ bc = b+c \\ ca = c+a. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Odejmując stronami równanie drugie od pierwszego, otrzymujemy

$$ab-bc = a+b-b-c\,.$$

Przekształacając równoważnie tę zależność, otrzymujemy kolejno:

$$b(a-c)=a-c\,,$$
$$(a-c)(b-1)=0\,.$$

Stąd wniosek, że $a=c$ lub $b=1$. Jednak równość $b=1$ nie może być spełniona, bo wtedy równanie pierwsze przybrałoby sprzeczną postać $a=a+1$. Wobec tego $a=c$. Analogicznie wykazujemy, że $b=a$. W konsekwencji $a=b=c$.

Z pierwszego równania mamy wtedy $a^2=2a$, czyli równoważnie $a(a-2)=0$. Stąd $a=0$ lub $a=2$, a więc $(a,b,c)=(0,0,0)$ lub $(a,b,c)=(2,2,2)$.

Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że istotnie obie te trójki spełniają dany układ równań.

Zadanie 3. (II OMG, zawody II stopnia).

Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=23 \\ a+2b+4c=22. \end{cases}$$

Rozwiązanie

W tym przypadku zarówno dodanie, jak i odjęcie równań stronami prowadzi do skomplikowanej zależności. Postąpmy więc nieco inaczej: pomnóżmy najpierw drugie równanie stronami przez 2:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=23 \\ 2a+4b+8c=44 \end{cases}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

i dopiero potem odejmijmy równania stronami:

$$a^2-2a+b^2-4b+c^2-8c=-21.$$

Uzyskaną zależność możemy teraz zapisać w postaci

$$a^2-2a+1+b^2-4b+4+c^2-8c+16=0,$$

albo, po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia, w postaci równoważnej

$$(a-1)^2+(b-2)^2+(c-4)^2=0.$$

Suma liczb nieujemnych jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy każda z nich jest równa zero, więc z powyższego równania wnioskujemy, że $a=1$, $b=2$, $c=4$, czyli $(a,b,c)=(1,2,4)$.

Jednak ta trójka liczb nie spełnia pierwszego równania danego układu:

$$a^2+b^2+c^2=1^2+2^2+4^2=1+4+16=21\neq 23.$$

Stąd wniosek, że dany układ równań nie ma rozwiązań.

Powyższy przykład pokazuje, jak istotne jest sprawdzenie, czy otrzymane wartości liczbowe istotnie spełniają wyjściowy układ równań. Dodawanie (jak również odejmowanie) równań stronami nie jest bowiem przekształceniem równoważnym. Innymi słowy, jeżeli $a=b$ oraz $c=d$, to $a+c=b+d$, natomiast nie odwrotnie: z równości $a+c=b+d$ nie wynika, że $a=b$ oraz $c=d$, co można sprawdzić podstawiając $a=1$, $b=2$, $c=5$ i $d=4$. Musimy zatem pamiętać, że jeśli rozwiązujemy układ równań dodając (lub odejmując) równania stronami, to *należy dokonać sprawdzenia*, czy otrzymany na końcu wynik liczbowy faktycznie jest rozwiązaniem układu równań.

W dalszej części artykułu zaprezentujemy jeszcze kilka podobnych zadań.

Zadanie 4. (XVIII OM, zawody I stopnia)

Wyznacz wszystkie czwórki (a,b,c,d) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a^2+b^2=cd \\ c^2+d^2=ab. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Po dodaniu stronami równań danego układu, otrzymujemy

$$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+cd,$$

a stąd kolejno:

$$a^2+b^2+c^2+d^2-ab-cd=0$$
$$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2-2ab-2cd=0$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+(a-b)^2+(c-d)^2=0.$$

Suma liczb nieujemnych jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy każda z tych liczb jest równa zero, skąd wnioskujemy, że

$$a=b=c=d=0.$$

Wykazaliśmy zatem, że jeśli dany układ ma rozwiązanie, to może nim być tylko czwórka $(a,b,c,d)=(0,0,0,0)$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że czwórka ta spełnia podany układ równań.

Zadanie 5.

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} ab=a+b+1 \\ bc=b+c+3 \\ ca=c+a+7. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Wykorzystamy *sztuczkę z iloczynem*, o której można przeczytać w *Kwadracie* nr 5 (czerwiec 2012). Zapiszmy dany układ w postaci równoważnej

$$\begin{cases} ab-a-b+1=2 \\ bc-b-c+1=4 \\ ca-c-a+1=8, \end{cases}$$

albo po „zwinięciu”:

$$(1)\qquad \begin{cases} (a-1)(b-1)=2 \\ (b-1)(c-1)=4 \\ (c-1)(a-1)=8. \end{cases}$$

W poprzednich zadaniach odejmowaliśmy albo dodawaliśmy równania stronami. Teraz je pomnożymy stronami. W efekcie uzyskujemy

$$((a-1)(b-1)(c-1))^2=64,$$

skąd

$$(a-1)(b-1)(c-1)=8 \quad \text{lub} \quad (a-1)(b-1)(c-1)=-8.$$

Po wykorzystaniu tych równości oraz równań układu (1), dostajemy

$$a-1=2,\quad b-1=1,\quad c-1=4$$

lub

$$a-1=-2,\quad b-1=-1,\quad c-1=-4.$$

Wobec tego

$$(a,b,c)=(3,2,5) \quad \text{lub} \quad (a,b,c)=(-1,0,-3).$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że obie trójki spełniają dany układ równań.

Na koniec, jak zwykle, kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 6.

Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} x^2+9=2(2x+y) \\ y^2+9=2(2y+x). \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2-2y^2=-5 \\ x+y^2=2. \end{cases}$

Zadanie 7.

Wyznacz wszystkie piątki (a,b,c,d,e) liczb rzeczywistych, dla których:

$$ab=1,\quad bc=2,\quad cd=3,\quad de=4,\quad ea=5.$$

Zadanie 8.

Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} (a+b)^2=4c \\ (b+c)^2=4a \\ (c+a)^2=4b, \end{cases}$ b) $\begin{cases} a^2+3=3a+b \\ b^2+4=3b+c \\ c^2+5=3c+a. \end{cases}$

Tomasz Szymczyk

Pole

W tym artykule zajmiemy się omówieniem wybranych zadań geometrycznych związanych z polem figury. Będziemy w nich korzystać jedynie z dobrze znanego wzoru na pole trójkąta $S=\frac{1}{2}ah$.

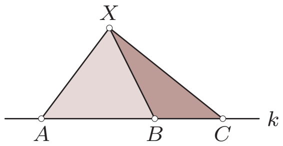
Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$.

Użytecznym i często wykorzystywanym spostrzeżeniem jest następujący

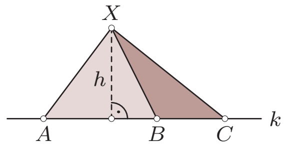
Fakt

Różne punkty A, B, C leżą na prostej k, a punkt X leży poza prostą k (rys. 1). Wówczas

$$\frac{[XAB]}{[XBC]} = \frac{AB}{BC}.$$



rys. 1



rys. 2

Aby uzasadnić powyższą równość, zauważmy, że trójkąty XAB i XBC mają wspólną wysokość h poprowadzoną z wierzchołka X (rys. 2). Wobec tego

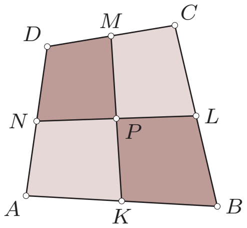
$$\frac{[XAB]}{[XBC]} = \frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h} = \frac{AB}{BC},$$

co kończy dowód.

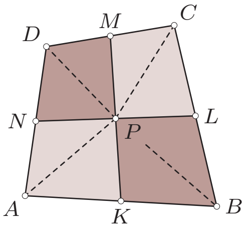
Z faktu tego wynika w szczególności, że jeśli punkt B jest środkiem odcinka AC, to pola trójkątów XAB i XBC są równe.

Zadanie 1.

Punkty K, L, M, N są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$. Odcinki KM i LN przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że suma pól czworokątów $AKPN$ i $CMPL$ jest równa sumie pól czworokątów $BLPK$ i $DNPM$.



rys. 3



rys. 4

Rozwiązanie

Połączmy punkt P z wierzchołkami czworokąta (rys. 4). Punkt K jest środkiem odcinka AB, więc na mocy powyższej obserwacji $[AKP]=[BKP]$.

Analogicznie dostajemy równości $[CLP]=[BLP]$, $[CMP]=[DMP]$ oraz $[ANP]=[DNP]$. Dodając stronami powyższe zależności, uzyskujemy tezę.

Zadanie 2.

Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, przy czym

$$\frac{BK}{KC} = \frac{CL}{LA} = \lambda.$$

Punkt M jest środkiem odcinka AB (rys. 5). Wykaż, że pole czworokąta $KCLM$ jest równe połowie pola trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Na mocy faktu z początku artykułu,

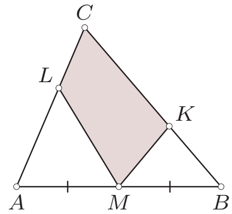
$$\frac{[MBK]}{[MKC]} = \frac{BK}{KC} = \lambda \quad \text{oraz} \quad \frac{[MCL]}{[MLA]} = \frac{CL}{LA} = \lambda.$$

Oznaczmy przez a pole trójkąta MKC, a przez b pole trójkąta MLA (rys. 6). Wówczas powyższe równości prowadzą do zależności

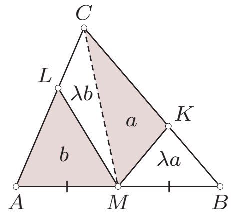
$$[MBK]=\lambda a \quad \text{oraz} \quad [MCL]=\lambda b.$$

Ponieważ punkt M jest środkiem odcinka AB, więc $[BMC]=[AMC]$. Wobec tego mamy $a+\lambda a=b+\lambda b$, czyli $a(1+\lambda)=b(1+\lambda)$, skąd $a=b$. Otrzymujemy więc ostatecznie

$$[KCLM]=a+\lambda a=\tfrac{1}{2}[ABC].$$



rys. 5



rys. 6

Zadanie 3. (III OMG, zawody I stopnia)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ o polu 1. Punkt K jest symetryczny do punktu B względem punktu A, punkt L jest symetryczny do punktu C względem punktu B, punkt M jest symetryczny do punktu D względem punktu C, punkt N jest symetryczny do punktu A względem punktu D. Oblicz pole czworokąta $KLMN$.

Rozwiązanie

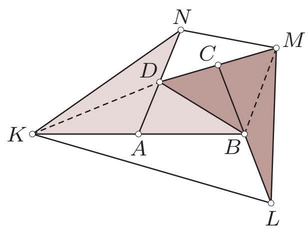
Podzielmy czworokąt $ABCD$ przekątną BD na dwa trójkąty: DAB i BCD (rys. 7).

Ponieważ $AB=KA$, więc na mocy spostrzeżenia z początku artykułu, $[DAB]=[DKA]$. Podobnie, skoro $ND=DA$, to $[DKA]=[NKD]$. Stąd wniosek, że

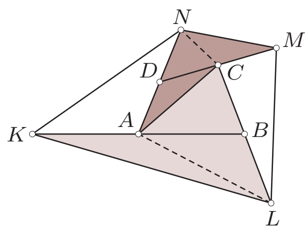
$$[KAN]=[DKA]+[NKD]=2[DAB].$$

Analogicznie uzasadniamy, że $[MCL]=2[BCD]$. Wobec tego

(1) $[KAN]+[MCL]=2([DAB]+[BCD])=2[ABCD].$



rys. 7



rys. 8

Podzielmy z kolei czworokąt $ABCD$ przekątną AC na trójkąty ABC i CDA (rys. 8). Prowadząc analogiczne rozumowanie do powyższego, uzyskujemy

(2) $$[LBK]+[NDM]=2[ABCD].$$

Sumując stronami zależności (1) i (2), uzyskujemy

$$[KAN]+[MCL]+[LBK]+[NDM]=4[ABCD].$$

Dodając wreszcie do obu stron powyższej równości pole czworokąta $ABCD$, otrzymujemy

$$[KLMN]=5[ABCD]=5.$$

Zadanie 4. (V OMG, zawody I stopnia)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Wyznacz wszystkie punkty P leżące wewnątrz tego trapezu i spełniające równość

$$[PAB]+[PCD]=[PBC]+[PDA].$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że dana w treści zadania równość sum pól jest równoważna stwierdzeniu, że jedno z wyrażeń $[PAB]+[PCD]$ lub $[PBC]+[PDA]$ jest równe połowie pola czworokąta $[ABCD]$. Ponieważ odcinki AB i CD są równoległe, więc można przypuszczać, że łatwiej będzie rozpatrywać pierwsze wyrażenie. Zapiszmy więc daną w treści zadania równość w postaci

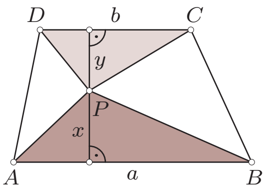
$$[PAB]+[PCD]=\frac{1}{2}[ABCD].$$

Niech x i y oznaczają wysokości odpowiednio trójkątów PAB i PCD opuszczone z punktu P (rys. 9). Niech ponadto $AB=a$ oraz $CD=b$. Powyższa równość jest wtedy równoważna zależności

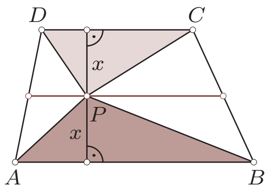
$$\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}=\frac{(a+b)(x+y)}{4}.$$

Przekształcając to wyrażenie równoważnie, uzyskujemy kolejno:

$$2ax+2by=ax+ay+bx+by,$$
$$ax-ay-bx+by=0,$$
$$(a-b)(x-y)=0.$$



rys. 9



rys. 10

Jeśli $a=b$, to powyższa równość jest spełniona dla dowolnych liczb x i y. To oznacza, że jeśli czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, to każdy punkt P z jego wnętrza spełnia postulowaną równość.

Jeśli natomiast $a\neq b$, czyli jeśli trapez $ABCD$ nie jest równoległobokiem, to zależność $(a-b)(x-y)=0$ jest równoważna równości $x=y$. To zaś oznacza, że punkt P leży na prostej równoległej do podstaw trapezu w jednakowej odległości od prostych zawierających te podstawy (rys. 10).

Kończąc, proponujemy Czytelnikom kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5. (IV OMG, zawody II stopnia)

Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE. Na prostej k obieramy takie punkty K, L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola

Zadanie 6. (VI OMG, zawody I stopnia)

Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Punkt X leży wewnątrz tego sześciokąta. Punkty K, L, M, N, P, Q są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DE, EF, FA. Wykaż, że suma pól czworokątów $QAKX$, $LCMX$, $NEPX$ nie zależy od wyboru punktu X.

Zadanie 7. (I OMG, zawody III stopnia)

Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt E należy do boku AB, a punkt F do boku AD. Prosta EF przecina prostą CB w punkcie P, a prostą CD w punkcie Q. Wykaż, że pole trójkąta CEF jest równe polu trójkąta APQ.

Zadanie 8.

Pewna prosta dzieli pole i obwód trójkąta na połowy. Wykaż, że prosta ta przechodzi przez środek okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 9.

Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, przy czym

$$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}.$$

Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Wykaż, że pole czworokąta $EPDC$ jest równe polu trójkąta ABP.

Zadanie 10.

Dany jest czworokąt $ABCD$. Punkt M jest środkiem boku CD. Wykaż, że jeżeli pole trójkąta ABM jest równe połowie pola czworokąta $ABCD$, to czworokąt ten jest trapezem.

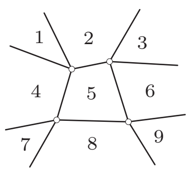
Anna Hoduń

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Jak znaleźć wielościan?

Pod koniec artykułu pytaliśmy Czytelników o to, czy istnieje *dobry* wielościan (tzn. wielościan wypukły o nieparzystej liczbie ścian i taki, że w każdym jego wierzchołku zbiega się parzysta liczba krawędzi), który ma co najwyżej 9 ścian. Naszkicujemy uzasadnienie, że taki wielościan nie istnieje.

Przypuśćmy, że istnieje dobry wielościan $\mathcal{W}$ mający co najwyżej 9 ścian. Wówczas każda ściana tego wielościanu musi być trójkątem. Rzeczywiście, jeśli pewna ściana wielościanu dobrego ma więcej niż 3 boki, to skoro w każdym wierzchołku zbiegają się przynajmniej 4 krawędzie, wielościan ten ma co najmniej 9 ścian (wskazanych na rysunku 11). Ponadto można uzasadnić, że ściany te nie mogą być wszystkimi ścianami wielościanu $\mathcal{W}$. Wobec tego dobry wielościan, mający ścianę o liczbie boków większej od 3, musiałby mieć co najmniej 11 ścian. Stąd wniosek, że każda ściana wielościanu $\mathcal{W}$ musi być trójkątem.



rys. 11

Niech n_k dla $k=4,6,8,\ldots$ oznacza liczbę wierzchołków wielościanu $\mathcal{W}$, z których wychodzi dokładnie k krawędzi. Niech ponadto s będzie liczbą ścian tego wielościanu. Ponieważ każda ściana wielościanu $\mathcal{W}$ ma trzy wierzchołki, więc zliczając liczby ścian, które się schodzą w każdym wierzchołku, uzyskujemy

$$3s=4n_4+6n_6+8n_8+\ldots.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż po lewej stronie stoi liczba nieparzysta, po prawej zaś parzysta. Stąd wynika, że postulowany wielościan $\mathcal{W}$ nie istnieje.

Przechodzimy do zadań zamykających artykuł.

1. Istnieje wielościan niewypukły o 6 ścianach. Aby go zbudować, sklej ze sobą w odpowiedni sposób dwa ostrosłupy trójkątne.

2. Odetnij od sześcianu trzy jego naroża płaszczyznami, które przechodzą przez ustalony wierzchołek sześcianu.

3. Aby skonstruować odpowiedni przykład, zastosuj kilkakrotnie metodę II do wielościanu z rysunku 5.

4. Na podstawach graniastosłupa trójkątnego dobuduj ostrosłupy w taki sposób, aby powstał wielościan, którego jedną ze ścian jest sześciokąt. Następnie sklej ten wielościan w odpowiedni sposób z ostrosłupem sześciokątnym.

Urok zbioru „mi”

3. Uzasadnij, że μ-punktami układu dwóch punktów A i B są takie punkty S i T, że czworokąt $ASBT$ jest kwadratem. Przeprowadź rozumowanie podobne do rozwiązania zadania 1.

4. Wykaż najpierw, że odległości punktu A od prostych BS i CS są równe. Wywnioskuj stąd, że prosta AS zawiera dwusieczną kąta BSC.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

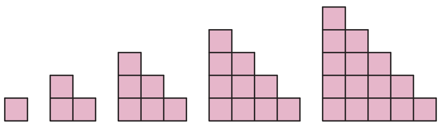
Nr 11
grudzień 2013
ISSN 2300-0708

Liczby trójkątne i czworościenne

Niektóre problemy dotyczące liczb naturalnych można rozważać metodami geometrycznymi — na przykład reprezentując liczbę n przez figurę złożoną z n kwadratów jednostkowych. Okazuje się, że to podejście prowadzi czasem do zaskakujących wniosków, których uzyskanie w inny sposób może być naprawdę trudne. Typowym przykładem są liczby *trójkątne*: n-tą liczbą trójkątną nazywamy sumę początkowych n dodatnich liczb całkowitych:

$$T_n = 1+2+3+\ldots+n.$$

Dlaczego akurat trójkątne? Właśnie ze względu na ich ciekawą interpretację geometryczną. Ustawiając jeden pod drugim paski o długościach będących kolejnymi dodatnimi liczbami całkowitymi, dostajemy trójkątne układy (rys. 1).

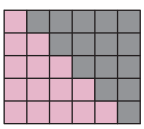


rys. 1

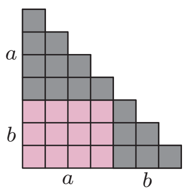
Pojawia się naturalne pytanie, czy istnieje wzór pozwalający szybko obliczać wartości liczb trójkątnych. Odpowiedź jest twierdząca i wiele osób zapewne już się z tym wzorem spotkało:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Aby przekonać się, że jest on poprawny, wystarczy do układu reprezentującego liczbę trójkątną T_n dołączyć taki sam trójkąt, tylko obrócony o $180°$ (rys. 2). Dostaniemy prostokąt, którego pole to z jednej strony $2T_n$, z drugiej zaś oczywiście $n(n+1)$.



rys. 2



rys. 3

Metoda *uzyskiwania prostokąta* okazuje się skuteczna również w wielu innych sytuacjach. Spójrzmy na przykład na następujące

Zadanie 1.

Niech a i b będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Znajdź wartość wyrażenia $T_{a+b} - T_a - T_b$.

Rozwiązanie

Popatrzmy na liczbę T_{a+b} geometrycznie — jest to *trójkąt* o boku $a+b$. Żeby odjąć od tej liczby T_a i T_b, wystarczy odciąć od tego trójkąta dwa mniejsze, odpowiednio o bokach a i b (rys. 3). Figura, którą otrzymamy, reprezentuje wynik szukanej różnicy, a jest nią prostokąt o wymiarach $a \times b$. Wobec tego szukaną wartością jest iloczyn ab.

Oczywiście po krótkich rachunkach ten sam wynik otrzymalibyśmy korzystając wprost ze wzoru (1), warto jednak zauważyć, że w przedstawionym rozwiązaniu wzór ten nie jest w żaden sposób wykorzystywany.

Prezentujemy tu jeszcze kilka zadań, związanych z liczbami trójkątnymi, do samodzielnego rozwiązania. Najlepiej spróbować rozwiązać je — oczywiście — geometrycznie.

Zadanie 2.

Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $T_n + T_{n+1}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 3.

Wykaż, że jeśli T_n jest liczbą trójkątną, to liczba $8T_n+1$ jest kwadratem pewnej liczby naturalnej.

Zadanie 4.

Wykaż, że jeśli T_n jest liczbą trójkątną, to liczba $9T_n+1$ także jest liczbą trójkątną.

Zadanie 5.

Niech a, b i c będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że

$$T_{a+b+c} + T_a + T_b + T_c = T_{a+b} + T_{b+c} + T_{c+a}.$$

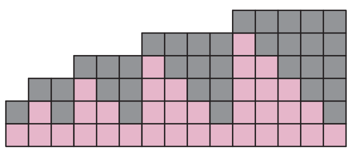
Od liczb trójkątnych można pójść o krok dalej. Zastanówmy się mianowicie, co się stanie, gdy będziemy dodawać do siebie kolejne liczby trójkątne, tzn. co ciekawego można powiedzieć o liczbach postaci

$$S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n.$$

Liczby S_n nazywamy *czworościennymi* (lub *tetraedralnymi*). Jeśli bowiem zamiast kwadratów jednostkowych rozpatrzymy sześciany, to układając na sobie kolejne trójkątne układy otrzymamy przestrzenne, czworościenne struktury. I w przypadku takich liczb istnieje ładny, zwięzły wzór:

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \qquad (2)$$

Geometryczne uzasadnienie tej równości jest nieco trudniejsze niż w przypadku liczb trójkątnych. Ustawmy obok siebie, w szeregu, n trójkątów reprezentujących liczby $T_1, T_2, \ldots, T_n$. Teraz każdy z nich dopełnijmy do prostokąta, doklejając identyczny trójkąt (rys. 4).



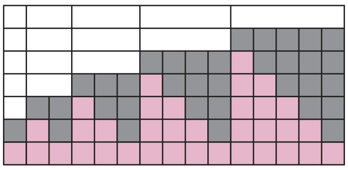
rys. 4

Zastanówmy się, czego brakuje, aby z całej figury dostać prostokąt. Górną część rysunku wystarczy wypełnić poziomymi pasami o szerokości 1, z których każdy

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

kolejny jest coraz dłuższy: najniższy pas ma długość 1, następny $1+2$, kolejny $1+2+3$ itd. i w końcu ostatni (najwyższy) $1+2+3+\ldots+n$ (rys. 5).

Okazało się, że pasy reprezentują kolejne liczby trójkątne! Stąd wynika, że ich suma, czyli cała biała figura, której brakuje nam do prostokąta, to nic innego jak tylko $T_1+T_2+\ldots+T_n=S_n$.



rys. 5

Ostatecznie nasz prostokąt o wymiarach $T_n\times(n+2)$ ma pole równe $3S_n$. To oznacza, że

$$S_n=\frac{T_n(n+2)}{3},$$

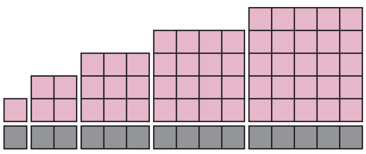
która to zależność po skorzystaniu ze wzoru (1) okazuje się być wzorem (2). Jak widać, geometryczne metody znowu nas nie zawiodły.

Uzyskany rezultat możemy wykorzystać na przykład do wyznaczenia wzoru na sumę kwadratów początkowych n liczb naturalnych. Niech

$$K_n=1^2+2^2+\ldots+n^2.$$

Porównując rysunki 4 oraz 6, widzimy, że

$$K_n=2S_n-T_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$



rys. 6

Na koniec jeszcze kilka zadań, które pozwalają na rozpatrzenie ciekawych konfiguracji i znalezienie rozwiązania, w którym praktycznie nie ma liczenia. Warto też samodzielnie poszukać interesujących figur i układów.

Zadanie 6.

Znajdź zwięzły wzór na sumę

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2.$$

Zadanie 7.

Udowodnij, że jeżeli n jest dodatnią liczbą całkowitą, to $1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\ldots+n\cdot 1=S_n$.

Zadanie 8.

Znajdź zwięzły wzór na sumę

$$K_1+K_2+\ldots+K_n.$$

Zadanie 9.

Niech a i b będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Znajdź wartość wyrażenia $K_{a+b}-K_a-K_b$.

Zadanie 10.

Udowodnij, że $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=T_n^2$.

Zadanie 11. (III OMG, zawody II stopnia)

Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, dla której liczbę 2^n można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb całkowitych?

Łukasz Bożyk

Kwadraty i dzielniki

Jak wiele można dowiedzieć się o liczbie tylko na podstawie liczby jej dzielników? Ile umiemy powiedzieć o dzielnikach danej liczby, bez wyznaczania ich? Okazuje się, że całkiem sporo! Ile oraz co konkretnie, przyjrzymy się na przykładzie pewnych twierdzeń, wiążących własności liczb z własnościami i liczbą ich dzielników. Szczególną uwagę poświęcimy liczbom, które są kwadratami.

Twierdzenie 1.

Dodatnia liczba całkowita ma nieparzystą liczbę dodatnich dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadratem liczby całkowitej.

Dowód

Zauważmy, że jeśli liczba dodatnia d jest dzielnikiem liczby dodatniej n, to również liczba $\frac{n}{d}$ jest dzielnikiem liczby n. Ponadto z zależności

$$d\cdot\frac{n}{d}=n=\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}$$

wynika, że jeśli $d>\sqrt{n}$, to $\frac{n}{d}<\sqrt{n}$. Wobec tego każdy dzielnik d liczby n większy od $\sqrt{n}$ możemy połączyć w parę z dzielnikiem $\frac{n}{d}$, który jest od $\sqrt{n}$ mniejszy.

Jeśli zatem liczba n nie jest kwadratem liczby całkowitej, to w ten sposób dobieramy w pary *wszystkie* dodatnie dzielniki liczby n, a to oznacza, że liczba n ma parzystą liczbę dzielników. Natomiast w przypadku, gdy n jest kwadratem pewnej liczby całkowitej, np. $n=k^2$, to połączone w pary są wszystkie dzielniki liczby n poza jednym: liczbą $k=\sqrt{n}$.

Wobec tego liczba n ma nieparzystą liczbę dodatnich dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy n jest kwadratem, co kończy dowód.

Uwaga

Aby sprawdzić, czy liczba jest pierwsza, wystarczy zweryfikować, czy ma dzielniki pierwsze *mniejsze lub równe od jej pierwiastka* — większych nie trzeba badać!

W powyższym dowodzie zauważyliśmy bowiem, że jeśli liczba d dzieli n, to również liczba $\frac{n}{d}$ dzieli n. Ponadto jeżeli $d>\sqrt{n}$, to $\frac{n}{d}<\sqrt{n}$. Stąd wniosek, że jeśli n nie ma dzielników mniejszych od $\sqrt{n}$, innych niż 1, to nie może mieć też większych, innych niż n.

Na przykład, aby sprawdzić, że liczba 97 jest pierwsza, wystarczy upewnić się, że nie dzieli się przez liczby pierwsze mniejsze od $\sqrt{97}$, czyli liczby pierwsze mniejsze od 10. Korzystając ze znanych kryteriów podzielności łatwo wykluczyć podzielność liczby 97 przez 2, 3 i 5, pozostaje więc tylko sprawdzić podzielność przez 7, która w przypadku liczby 97 także nie zachodzi.

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite, które mają dokładnie trzy dodatnie dzielniki.

Rozwiązanie

Z twierdzenia 1 wiemy, że każda liczba dodatnia n o nieparzystej liczbie dodatnich dzielników jest kwadratem liczby całkowitej. Zatem jeśli n ma dokładnie trzy dzielniki, to $n=k^2$ dla pewnej liczby całkowitej k.

Jeżeli liczba k jest pierwsza, to n ma dokładnie trzy dzielniki: 1, k, n. W przeciwnym przypadku dowolny dzielnik pierwszy liczby k jest kolejnym dzielnikiem liczby n.

Wobec tego dokładnie trzy dodatnie dzielniki mają te i tylko te dodatnie liczby całkowite, które są kwadratami liczb pierwszych.

Zadanie 2. (Koło Matematyczne SEM, seria 10)

Mały majsterkowicz Kazio przygotował na szkolną dyskotekę efekty świetlne własnego pomysłu. Tysiąc żarówek, ponumerowanych liczbami od 1 do 1000, było włączanych i wyłączanych specjalnym przełącznikiem. Na początku dyskoteki wszystkie żarówki były wyłączone. Pierwsze naciśnięcie przełącznika zapaliło wszystkie żarówki, drugie naciśnięcie zgasiło wszystkie żarówki o numerach parzystych, trzecie zmieniło stan żarówek o numerach podzielnych przez 3 itd. Ogólniej, kolejne, k-te naciśnięcie przełącznika zmieniło stan wszystkich żarówek o numerach podzielnych przez k. Które żarówki świeciły pod koniec, jeśli w trakcie dyskoteki Kazio nacisnął przełącznik 1000 razy?

Rozwiązanie

Stan n-tej żarówki zmienił się tyle razy w czasie dyskoteki, ile dodatnich dzielników ma liczba n. Początkowo wszystkie żarówki były wyłączone. Wobec tego po zakończeniu dyskoteki świeciły te i tylko te spośród nich, których numery mają nieparzystą liczbę dodatnich dzielników. Z twierdzenia 1 wynika, że były to żarówki o numerach będących kwadratami liczb całkowitych, czyli żarówki 1, 4, 9, 16, …, $31^2=961$.

Zadanie 3. (LXIV OM, zawody I stopnia)

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykaż, że jeżeli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez k wykładnik przy 2 w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n. Wówczas

$$n=2^k\cdot l,$$

gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą, l zaś — dodatnią liczbą nieparzystą.

Suma parzystych dzielników liczby n jest parzysta, jeśli więc suma wszystkich dodatnich dzielników liczby n jest nieparzysta, to nieparzystych jest nieparzyście wiele.

Liczba l, jako nieparzysta, ma wyłącznie nieparzyste dzielniki oraz każdy z nich jest też dzielnikiem liczby n. Również na odwrót, każdy nieparzysty dzielnik liczby n musi być także dzielnikiem liczby l. Wobec tego nieparzyste dzielniki liczby n to wszystkie dzielniki liczby l. Skoro jest ich nieparzyście wiele, to na mocy twierdzenia 1 wnioskujemy, iż liczba l jest kwadratem pewnej liczby całkowitej m.

Oznacza to, że

$$n=2^k\cdot l=2^k\cdot m^2.$$

Jeśli liczba k jest parzysta, to liczba $\frac{k}{2}$ jest całkowita nieujemna i wówczas n jest kwadratem:

$$n=\left(2^{\frac{k}{2}}\cdot m\right)^2.$$

Jeśli zaś liczba k jest nieparzysta, to liczba $\frac{k-1}{2}$ jest całkowita nieujemna i wtedy n jest podwojonym kwadratem:

$$n=2\cdot\left(2^{\frac{k-1}{2}}\cdot m\right)^2.$$

To kończy dowód.

W dalszej części tego artykułu przyda się dokładniejszy niż dotychczas zapis rozkładu liczby na czynniki pierwsze. Każdą liczbę całkowitą n większą od 1 można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_j^{\alpha_j}, \qquad (*)$$

gdzie czynniki $p_1,p_2,\ldots,p_j$ to uporządkowane rosnąco różne liczby pierwsze, natomiast $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_j$ to ich całkowite dodatnie wykładniki.

Przykładowo, dla liczby 3500 zapisanej w postaci

$$3500=2^2\cdot 5^3\cdot 7$$

mamy $j=3$, $p_1=2$, $p_2=5$, $p_3=7$, $\alpha_1=2$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=1$.

Twierdzenie 2.

Liczba całkowita większa od 1 jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze wszystkie wykładniki są parzyste.

Zanim udowodnimy to twierdzenie, zobaczmy kilka jego zastosowań. Zacznijmy od dowodu pewnego dobrze znanego faktu.

Fakt

Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Dowód

Załóżmy, że liczba $\sqrt{2}$ jest wymierna, czyli że istnieją takie dodatnie liczby całkowite p, q, dla których $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$. Wówczas $\sqrt{2}\cdot q=p$, więc

$$2q^2=p^2.$$

Z twierdzenia 2 liczba p^2, jako kwadrat liczby całkowitej, ma w rozkładzie na czynniki pierwsze parzysty wykładnik przy czynniku 2 (jeśli $p=1$, to zapiszmy $p^2=1=2^0$).

Analogicznie liczba q^2 ma parzysty wykładnik przy czynniku 2, co oznacza, że liczba $2q^2$ ma przy 2 wykładnik nieparzysty. Równość $2q^2=p^2$ jest więc niemożliwa. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 4.

Czy istnieje liczba o sumie cyfr równej 123, która jest kwadratem liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Liczba o sumie cyfr równej 123 dzieli się przez 3, ale nie dzieli się przez 9, czyli w jej rozkładzie na czynniki pierwsze liczba 3 występuje z wykładnikiem 1. Stąd, na mocy twierdzenia 2, rozważana liczba nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 5.

Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, że każda z liczb ab, bc, ca kończy się cyframi 20?

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeśli liczba kończy się cyframi 20, to dzieli się przez 5, ale nie przez 25 (bo liczby podzielne przez 25 mają dwie ostatnie cyfry 00, 25, 50 lub 75).

Przypuśćmy, że istnieją opisane w zadaniu liczby a, b, c. Każda z liczb ab, bc, ca jest wówczas podzielna przez 5, ale nie przez 25. Stąd iloczyn $ab\cdot bc\cdot ca=(abc)^2$ ma w rozkładzie na czynniki pierwsze liczbę 5 w potędze 3, czyli nieparzystej. Jest to sprzeczne z twierdzeniem 2, zatem nie istnieją takie liczby a, b, c.

Zadanie 6.

Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, która pomnożona przez liczbę o 2 od niej większą kończy się cyframi 05?

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje taka liczba n. Wtedy liczba o jeden większa od opisanego w zadaniu iloczynu, czyli liczba $n(n+2)+1=(n+1)^2$, kończy się cyframi 06. Jest więc podzielna przez 2, ale nie przez 4. Jednak na mocy twierdzenia 2 taka liczba nie może być kwadratem liczby całkowitej. Otrzymana sprzeczność oznacza, że nie istnieje liczba n o żądanych własnościach.

Zadanie 7.

Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n, dla której liczba

$$n+2n+3n+\ldots+100n$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Przekształćmy rozważane wyrażenie następująco:

$$n+2n+3n+\ldots+100n=n\cdot(1+2+3+\ldots+100)=$$
$$=n\cdot\big((1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(50+51)\big)=$$
$$=n\cdot 50\cdot 101=n\cdot 2\cdot 5^2\cdot 101.$$

Na mocy twierdzenia 2, aby liczba ta była kwadratem, każdy dzielnik pierwszy musi występować w parzystej potędze. Oznacza to, że liczba n musi być postaci $2\cdot 101\cdot k^2$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k. Najmniejszą możliwą wartością n jest więc $2\cdot 101\cdot 1^2=202$.

Zadanie 8. (Koło Matematyczne SEM, seria 4)

Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $2n$ jest kwadratem liczby całkowitej, a $1024n$ jest czwartą potęgą liczby całkowitej?

Rozwiązanie

Załóżmy, że taka liczba n istnieje i zapiszmy ją w postaci $n=2^k\cdot l$, jak w rozwiązaniu zadania 3.

Skoro liczba $2n=2^{k+1}\cdot l$ jest kwadratem liczby całkowitej, to na mocy twierdzenia 2 wykładnik $k+1$ jest parzysty, więc k jest liczbą nieparzystą.

Skoro liczba $1024n=2^{10}\cdot n=2^{k+10}\cdot l$ jest czwartą potęgą liczby całkowitej, to jest także kwadratem liczby całkowitej. Zatem wykładnik $k+10$ jest parzysty, więc liczba k jest parzysta, sprzecznie z wcześniejszą obserwacją.

Założenie, że istnieje liczba n opisana w zadaniu, prowadzi do sprzeczności, więc taka liczba istnieć nie może, co kończy rozwiązanie.

Dowód twierdzenia 2.

Korzystając ze wzoru $(*)$, zauważmy, że kwadrat dowolnej liczby całkowitej n większej od 1 jest postaci

$$n^2=\left(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_j^{\alpha_j}\right)^2=p_1^{2\alpha_1}\cdot p_2^{2\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_j^{2\alpha_j},$$

więc faktycznie w rozkładzie na czynniki pierwsze ma wszystkie wykładniki parzyste.

W drugą stronę, zauważmy, iż jeśli dodatnia liczba całkowita n postaci $(*)$ ma w rozkładzie na czynniki pierwsze wszystkie wykładniki $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_j$ parzyste, to liczba ta jest kwadratem liczby całkowitej

$$p_1^{\frac{\alpha_1}{2}}\cdot p_2^{\frac{\alpha_2}{2}}\cdot\ldots\cdot p_j^{\frac{\alpha_j}{2}},$$

gdyż podnoszenie liczby do kwadratu podwaja wszystkie wykładniki w jej rozkładzie. To kończy dowód.

Analogicznie można udowodnić następujące ogólniejsze twierdzenie.

Twierdzenie 3.

Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Liczba całkowita większa od 1 jest k-tą potęgą liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze wszystkie wykładniki są wielokrotnościami k.

Na zakończenie proponujemy kilka zadań, wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 9.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite, które mają dokładnie pięć dodatnich dzielników.

Zadanie 10.

Jaś wybrał pewną dodatnią liczbę całkowitą i powiedział Małgosi, ile ta liczba ma dzielników. Czy tylko na podstawie tej informacji Małgosia zawsze może rozstrzygnąć, czy wybrana przez Jasia liczba jest sześcianem pewnej liczby całkowitej?

Zadanie 11.

Czy istnieje liczba postaci $50505\ldots505$, która jest kwadratem liczby całkowitej?

Zadanie 12.

Czy istnieje liczba postaci $444\ldots4$, która jest sześcianem liczby całkowitej?

Zadanie 13.

Udowodnij, że liczba $\sqrt[n]{2}$ jest niewymierna dla każdej liczby całkowitej n większej od 1.

Joanna Jaszuńska

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Rady na układy

6a. Dodaj równania stronami, a następnie przenieś wszystkie wyrażenia na jedną stronę równości i skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia.

6b. Pomnóż drugie równanie układu przez 2, a następnie dodaj równania stronami albo zastosuj metodę podstawiania, wyznaczając z drugiego równania y^2.

7. Pomnóż równania stronami oraz skorzystaj z wybranych równań danego układu.

8a. Uzasadnij, że liczby a, b, c muszą być nieujemne. Odejmując stronami równanie drugie od pierwszego, dostajemy $a=c$ lub $a+2b+c+4=0$. Dla liczb nieujemnych druga równość nie może być spełniona. Analogicznie otrzymujemy $b=a$, skąd $a=b=c$.

8b. Dodaj stronami dane równania i skorzystaj ze wzoru skróconego mnożenia.

Pole

5. Oznacz punkt przecięcia prostej k z prostą BC przez X. Zauważ, że trójkąty ADL i EXK mają równe pola.

6. Zauważ, że $[QAKX]=[QAX]+[AKX]=\frac{1}{2}[AFX]+\frac{1}{2}[ABX]$.

7. Narysuj przekątną AC danego równoległoboku i poszukaj trójkątów o równych polach.

8. Wykaż, że prosta przechodząca przez środek okręgu wpisanego dzieli obwód i pole trójkąta w takim samym stosunku.

9. Zauważ, że jeśli $\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}$, to również $\frac{BD}{BC}=\frac{CE}{CA}$. Wywnioskuj stąd, że pola trójkątów ABD i BEC są równe.

10. Oznacz przez S punkt symetryczny do A względem punktu M. Uzasadnij, że suma pól trójkątów BCM i SCM jest równa polu trójkąta BMS. Wywnioskuj stąd, że punkt C leży na odcinku BS.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 5000 egz.

Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 12
czerwiec 2014
ISSN 2300-0708

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Kwadraty i dzielniki raz jeszcze

W poprzednim *Kwadracie* badaliśmy powiązania pomiędzy liczbami a ich dzielnikami, szczególną uwagę poświęcając liczbom, które są kwadratami. W tym numerze kontynuujemy tę tematykę, tym razem przyglądając się dokładniej liczbie dzielników i ich sumie.

Przypomnijmy, że każdą liczbę całkowitą n większą od 1 można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{\alpha_j}, \qquad (*)$$

gdzie czynniki $p_1, p_2, \ldots, p_j$ to uporządkowane rosnąco różne liczby pierwsze, natomiast $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$ to ich całkowite dodatnie wykładniki. Przykładowo, dla liczby 3500 zapisanej w postaci

$$3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$$

mamy $j=3$, $p_1=2$, $p_2=5$, $p_3=7$, $\alpha_1=2$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=1$.

Z postaci $(*)$ można wywnioskować, że dzielnikami liczby n są dodatnie liczby całkowite d postaci

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{\beta_j}, \qquad (**)$$

gdzie $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$ to liczby całkowite spełniające warunki $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2$, …, $0 \leqslant \beta_j \leqslant \alpha_j$. Odwołując się do przykładu liczby $3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$, widzimy, że jej dzielnikiem jest liczba $2^2 \cdot 5$ (wtedy $\beta_1=2$, $\beta_2=1$, $\beta_3=0$), ale dzielnikiem nie jest liczba $2 \cdot 11$ (bo 11 nie występuje wśród czynników pierwszych liczby 3500) ani liczba $5 \cdot 7^4$ (bo wykładnik przy 7 jest większy niż w liczbie 3500).

Korzystając z tej obserwacji, łatwo wyznaczyć liczbę dodatnich dzielników danej liczby. Na przykład liczba $3500 = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ ma

$$(2+1)(3+1)(1+1) = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

różne dzielniki. Możemy bowiem na 3 sposoby wybrać wykładnik przy 2 (0, 1 lub 2), na 4 sposoby przy 5 (0, 1, 2 lub 3) oraz na 2 sposoby przy 7 (0 lub 1). Podobne rozumowanie pozwala sformułować i udowodnić następujące ogólne twierdzenie.

Twierdzenie 4.

Liczba całkowita n większa od 1, zapisana w postaci $(*)$, posiada

$$(\alpha_1+1) \cdot (\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_j+1)$$

różnych dzielników.

Dowód

Dzielniki liczby n są postaci $(**)$, gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_j$ to czynniki występujące w postaci $(*)$ liczby n. Wobec tego każdy dzielnik jest jednoznacznie wyznaczony przez ciąg wykładników $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j)$.

Wykładnik β_1 jest dowolną liczbą całkowitą spełniającą warunki $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$, a takich liczb jest α_1+1. Podobnie można na α_2+1 sposobów wybrać β_2 i tak dalej, wreszcie na α_j+1 sposobów można wybrać β_j. Ponieważ wybór żadnego z wykładników nie zależy od wyboru pozostałych, cały ciąg wykładników $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j)$ wybrać można na $(\alpha_1+1) \cdot (\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_j+1)$ sposobów. Tyle jest zatem różnych dzielników liczby n, co kończy dowód.

Powyższe twierdzenie pozwala łatwiej rozwiązać niektóre problemy z pierwszej części artykułu (zamieszczonej w poprzednim numerze *Kwadratu*), na przykład zadania 1 i 9. Zobaczmy jego zastosowanie w nieco trudniejszej wersji obu tych zadań.

Zadanie 14.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite, które mają dokładnie dziewięć dodatnich dzielników.

Rozwiązanie

Na mocy twierdzenia 4, liczba n przedstawiona w postaci $(*)$ ma $(\alpha_1+1) \cdot (\alpha_2+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_j+1)$ różnych dzielników. Iloczyn ten jest równy 9 wtedy i tylko wtedy, gdy w powyższym wyrażeniu jest dokładnie jeden nawias i liczba w nim jest równa 9 albo gdy są dokładnie dwa nawiasy i w obydwu jest liczba 3. W pierwszym przypadku oznacza to, że liczba n jest postaci p^8 dla pewnej liczby pierwszej p; w drugim przypadku n jest postaci $p_1^2 p_2^2$, gdzie p_1 i p_2 to różne liczby pierwsze.

Zadanie 15.

Czy istnieje liczba dodatnia o dokładnie 2014 dodatnich dzielnikach?

Rozwiązanie

Tak, na przykład liczba 2^{2013} ma, na mocy twierdzenia 4, liczbę dzielników równą $2013+1=2014$.

Analogicznie dla dowolnej liczby całkowitej $k>1$ istnieje liczba n posiadającą dokładnie k dodatnich dzielników.

Zadanie 16.

Czy istnieje taka liczba całkowita $n>2$, że liczba $n!$ ma dokładnie 101 dodatnich dzielników?

Rozwiązanie

Nie. Dla $n>2$ liczba $n!$ ma przynajmniej dwa różne czynniki pierwsze w rozkładzie: 2 i 3. Wówczas, na mocy twierdzenia 4, liczba dzielników $n!$ jest złożona, zatem nie może być równa 101.

Przypomnijmy teraz twierdzenia 1 i 2, które udowodniliśmy w artykule *Kwadraty i dzielniki* w poprzednim numerze *Kwadratu*.

Twierdzenie 1.

Dodatnia liczba całkowita ma nieparzystą liczbę dodatnich dzielników wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadratem liczby całkowitej.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 2.

Liczba całkowita większa od 1 *jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy w jej rozkładzie na czynniki pierwsze wszystkie wykładniki są parzyste.*

Korzystając z twierdzenia 4, udowodnimy raz jeszcze twierdzenie 1.

Dowód

Liczba 1 jest kwadratem i ma jeden dzielnik.

Liczba $n>1$, zapisana w postaci $(*)$ ma, na mocy twierdzenia 4, $(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_j+1)$ różnych dzielników. Iloczyn ten jest nieparzysty wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki są nieparzyste, czyli gdy wszystkie wykładniki $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_j$ są parzyste. To z kolei, na mocy twierdzenia 2, zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy rozważana liczba n jest kwadratem liczby całkowitej, co kończy dowód.

Twierdzenie 5.

Dana jest dodatnia liczba całkowita n zapisana w postaci $(*)$. Wówczas suma wszystkich jej dodatnich dzielników wynosi

$$(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1})\cdot(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\cdot\ldots\cdot(1+p_j+p_j^2+\ldots+p_j^{\alpha_j}).$$

Dowód

Wymnażając nawiasy w powyższym wyrażeniu, uzyskujemy sumę wszystkich iloczynów postaci $(**)$, przy czym każdy z nich występuje dokładnie jeden raz. Jest to więc żądana suma dzielników liczby n, co kończy dowód.

Korzystając z twierdzenia 5, rozwiążemy jeszcze raz zadanie 3, w którym mowa właśnie o sumie dzielników.

Zadanie 3. (LXIV OM, zawody I stopnia)

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykaż, że jeżeli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Jeśli $n=1$, to n jest kwadratem. Niech teraz $n>1$. Przedstawmy liczbę n w postaci $(*)$, wtedy na mocy twierdzenia 5 suma jej dodatnich dzielników równa jest

$$(1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1})\cdot(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\cdot\ldots\cdot(1+p_j+p_j^2+\ldots+p_j^{\alpha_j}).$$

Skoro iloczyn ten jest nieparzysty, to każdy jego czynnik jest nieparzysty.

Jeśli $p_1=2$, to czynnik $1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1}$ jest liczbą nieparzystą niezależnie od wartości α_1. Z kolei dla każdej nieparzystej liczby pierwszej p_i jej kwadrat, sześcian itd. również są nieparzyste, więc suma $1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{\alpha_i}$ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy ma nieparzystą liczbę składników, czyli gdy wykładnik α_i jest parzysty.

Oznacza to, że w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby n wszystkie czynniki nieparzyste występują w parzystych potęgach. Korzystając z twierdzenia 2, otrzymujemy stąd wniosek, że

$$n=2^k\cdot m^2,$$

gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną, m zaś — dodatnią liczbą całkowitą. Wobec tego $n=\left(2^{\frac{k}{2}}\cdot m\right)^2$, jeśli liczba k jest parzysta, oraz $n=2\cdot\left(2^{\frac{k-1}{2}}\cdot m\right)^2$, jeśli liczba k jest nieparzysta. To kończy dowód.

Na zakończenie rozwiążmy jeszcze jedno zadanie o rozkładzie na czynniki pierwsze i kwadratach.

Zadanie 17.

Dany jest zbiór 33 dodatnich liczb całkowitych, z których żadna nie ma dzielnika pierwszego większego od 11. Wykaż, że istnieją w tym zbiorze takie dwie liczby, których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Każdą dodatnią liczbę całkowitą, która nie ma dzielnika pierwszego większego od 11, można zapisać w następującej postaci:

$$2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}\cdot7^{\alpha_4}\cdot11^{\alpha_5},$$

gdzie $\alpha_1,\ldots,\alpha_5$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Iloczyn dwóch takich liczb jest więc postaci

$$(2^{\gamma_1}\cdot3^{\gamma_2}\cdot5^{\gamma_3}\cdot7^{\gamma_4}\cdot11^{\gamma_5})\cdot(2^{\delta_1}\cdot3^{\delta_2}\cdot5^{\delta_3}\cdot7^{\delta_4}\cdot11^{\delta_5})=$$
$$=2^{\gamma_1+\delta_1}\cdot3^{\gamma_2+\delta_2}\cdot5^{\gamma_3+\delta_3}\cdot7^{\gamma_4+\delta_4}\cdot11^{\gamma_5+\delta_5},$$

stąd na mocy twierdzenia 2 jest kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy każdy z wykładników $\gamma_1+\delta_1,\ldots,\gamma_5+\delta_5$ jest liczbą parzystą. Suma dwóch liczb całkowitych jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy obie te liczby są tej samej parzystości.

Każdy z wykładników $\alpha_1,\ldots,\alpha_5$ może być liczbą parzystą lub nieparzystą, co oznacza, że jeśli bierzemy pod uwagę jedynie parzystość, istnieje $2^5=32$ różnych ciągów wykładników $(\alpha_1,\ldots,\alpha_5)$. Mamy dane 33 liczby, zatem pewne dwie spośród nich muszą mieć takie same, pod względem parzystości, odpowiednie wykładniki. Iloczyn tych właśnie dwóch liczb ma więc wszystkie sumy $\gamma_1+\delta_1,\ldots,\gamma_5+\delta_5$ parzyste i na mocy twierdzenia 2 jest poszukiwanym kwadratem liczby całkowitej.

Na koniec jak zwykle proponujemy Czytelnikom kilka zadań do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 18.

Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą posiadającą dokładnie 22 dodatnie dzielniki.

Zadanie 19.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite podzielne przez 100, które mają dokładnie 15 dodatnich dzielników.

Zadanie 20.

Czy liczba o dokładnie 100! dodatnich dzielnikach może być sześcianem liczby całkowitej?

Zadanie 21.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite, dla których suma ich dodatnich dzielników równa jest 31.

Zadanie 22.

Dodatnie liczby całkowite n i k są względnie pierwsze. Wyznacz sumę wszystkich dodatnich dzielników liczby nk, znając sumy dodatnich dzielników każdej z liczb n i k.

Zadanie 23.

Sprawdź, że suma wszystkich dodatnich dzielników liczby n, zapisanej w postaci $(*)$, równa jest

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_j^{\alpha_j+1}-1}{p_j-1}.$$

Joanna Jaszuńska

Zadaniowe laboratorium

W artykule *Maksymalny, ale czy największy?*, zamieszczonym w 8. numerze *Kwadratu*, Wojciech Guzicki pisze o zadaniu 4. z zawodów drugiego stopnia VIII edycji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Chciałbym rozwinąć jego myśl w nieco innym kierunku. Chociaż zadanie było dość trudne dla gimnazjalistów, to przygoda z nim nie musi zakończyć się na znalezieniu rozwiązania. Bardzo skuteczną metodą w nauce matematyki jest modyfikowanie poznanych problemów. W przypadku zadania trudnego, z którym nie potrafimy sobie poradzić, często warto spróbować najpierw uprościć zadanie i rozpatrzeć jego łatwiejszą wersję – na przykład wybrany przypadek szczególny – a dopiero później zabierać się za rozwiązanie wyjściowego problemu. Jeśli odniesiemy sukces, warto „rozejrzeć się na boki” i spróbować zmodyfikować treść naszego zadania, aby sprawdzić, czy zastosowaną przez nas metodę można wykorzystać w innych sytuacjach.

W niniejszym artykule chciałbym pokazać takie naturalne modyfikacje wspomnianego na początku zadania 4., przypomnijmy zatem jego treść:

Zadanie 0. (VIII OMG, zawody II stopnia)

Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny?

We wzorcowym rozwiązaniu (największa liczba kolorów to 3 i jest realizowana przez następujące kolorowanie: płaszczyzna za wyjątkiem pewnej prostej k ma pierwszy kolor, prosta k za wyjątkiem pewnego punktu P ma drugi kolor, a punkt P kolor trzeci) niektóre proste są dwukolorowe, a inne jednokolorowe. Nasuwa się więc następujące pytanie:

Zadanie 1.

Czy można tak pokolorować płaszczyznę trzema kolorami, by na każdej prostej występowały dokładnie dwa kolory?

Rozwiązanie

Wystarczy nieznacznie poprawić wspomniane wcześniej rozwiązanie – ponieważ proste jednokolorowe są równoległe do k, wystarczy dorysować kolejną prostą przechodzącą przez punkt P i poza tym punktem nadać jej kolor drugi (ten, co k).

Kolejna modyfikacja jest już odrobinę trudniejsza. Czemu bowiem ograniczać się do prostych dwukolorowych?

Zadanie 2.

Iloma kolorami można pokolorować płaszczyznę tak, aby każda prosta była co najwyżej trójkolorowa? Im więcej kolorów, tym lepsze rozwiązanie.

Rozwiązanie

Oczywiście, jeśli zastosujemy nie więcej, niż 3 kolory, to każda prosta będzie co najwyżej trójkolorowa – nie jest to jednak ciekawy przypadek. Spróbujmy wykorzystać 4 kolory: na płaszczyźnie koloru pierwszego namalujmy dwoma kolorami dwie przecinające się proste. Punkt ich przecięcia oznaczmy kolorem czwartym — w otrzymanym kolorowaniu każda prosta faktycznie jest co najwyżej trójkolorowa. Ponadto na każdej z tych prostych możemy jeszcze dołożyć po punkcie w dwóch nowych kolorach, wykorzystując w ten sposób już 6 kolorów.

Łatwo sprawdzić, że otrzymanej konfiguracji nie można powiększyć o dodatkowy kolor — gdziekolwiek nie namalowalibyśmy punktu w 7. kolorze, znajdziemy prostą pomalowaną na 4 kolory (warto sprawdzić, wykonując odpowiedni rysunek!).

W przytoczonym na początku artykule Wojciecha Guzickiego własność tę nazwano maksymalnością i w tym samym artykule pokazane zostało, że nie oznacza ona jeszcze tego, że nie można użyć większej liczby kolorów. Jest tak również i w tym przypadku — wystarczy zamiast przecinających się prostych wziąć dwie proste równoległe, a na każdej z nich dwa punkty w różnych kolorach i wówczas wykorzystamy aż 7 kolorów.

Czy jest to zatem najlepsze rozwiązanie naszego zadania? Nie, gdyż okazuje się, że możemy użyć nieskończenie wielu kolorów! Wystarczy pokolorować płaszczyznę na jeden kolor z wyjątkiem wybranego okręgu, którego każdy punkt malujemy na inny kolor. Łatwo sprawdzić, że wówczas każda prosta jest jednokolorowa, dwukolorowa lub trójkolorowa. Rodzi się zatem kolejne pytanie:

Zadanie 3.

Iloma kolorami można pokolorować płaszczyznę, by każda prosta była dokładnie trójkolorowa?

Nie posiadam pełnej odpowiedzi na to pytanie — potrafię to zrobić trzema kolorami, jednak być może istnieje rozwiązanie, wykorzystujące większą ich liczbę.

Z pewnością można sformułować jeszcze wiele pokrewnych problemów. Niektóre z nich mogą okazać się bardzo trudne, niewykluczone jednak, że już za progiem czai się ciekawa matematyka, która dopiero czeka na odkrycie. Tego typu modyfikacji można dokonywać praktycznie na każdym zadaniu, co sprawia, że uczeń nudzący się na lekcji matematyki „bo rozwiązał już wszystkie zadania” powinien spojrzeć na nie ponownie, gdyż z pewnością wciąż dają one pole do twórczych rozważań.

Adam Dzedzej

Bałtyk do Kwadratu

W dniach 7–11 listopada 2013 r. odbyły się w Rydze (na Łotwie) dwudzieste czwarte międzynarodowe zawody matematyczne *Baltic Way*. Polskę reprezentowali następujący uczniowie, wyłonieni na podstawie wyników LXIV Olimpiady Matematycznej (2012/2013):

- Stanisław Frejlak (XIV LO w Warszawie),
- Krzysztof Maziarz (I LO w Krośnie),
- Jan Mirkiewicz (Gimnazjum 49 we Wrocławiu),
- Ngoc Khanh Nguyen (XIV LO we Wrocławiu)
- Piotr Pawlak (Ogólnokształcąca Szkoła Muzyczna w Gdańsku)

Delegacji polskiej przewodniczyli Szymon Kanonowicz i Michał Miśkiewicz. Oprócz naszej drużyny w zawodach wzięły udział delegacje z następujących 10 nadbałtyckich państw: Danii, Estonii, Finlandii, Litwy, Łotwy, Niemiec, Norwegii, Rosji (tylko uczniowie z Sankt Petersburga), Szwecji oraz Islandii, która nad Bałtykiem nie leży, ale tradycyjnie jest zapraszana. Konkurs jak zwykle miał charakter drużynowy i polegał na rozwiązaniu przez poszczególne drużyny 20 zadań w czasie 4,5 godziny.

Za rozwiązanie każdego zadania można było otrzymać od 0 do 5 punktów. Trzy najlepsze wyniki były bardzo zbliżone. Zwyciężyli gospodarze, zdobywając 77 punktów, a tuż za nimi uplasowali się Rosjanie z Sankt Petersburga i Polacy z wynikiem 76 punktów. Następne miejsca zajęli Litwini i Niemcy, z wynikami odpowiednio 71 i 65 punktów.

Zgodnie z regulaminem konkursu, w przypadku remisu o kolejności decyduje liczba bezbłędnie rozwiązanych zadań. Tutaj reprezentanci Rosji okazali się lepsi, uzyskali trzynaście „piątek", czyli o jedną więcej niż Polacy. Wobec tego zajęliśmy trzecie miejsce, tracąc zaledwie punkt do zwycięzców.

Zadania były dość trudne, zwycięzców dzieliły aż 23 punkty od maksymalnej liczby punktów. Ponadto wśród dwudziestu zadań były trzy, których żadna drużyna nie rozwiązała w pełni poprawnie i jedno, które poprawnie rozwiązała tylko jedna drużyna. Mowa tu o zadaniu trzecim, za które Polacy otrzymali 5 punktów, Niemcy i Norwedzy po jednym punkcie, a pozostałe drużyny nie zdobyły żadnego punktu. Było to zadanie algebraiczne; należało znaleźć wszystkie funkcje rzeczywiste f spełniające warunek

$$f(xf(y)+y)+f(-f(x))=f(yf(x)-y)+y$$

dla wszystkich par liczb rzeczywistych x, y.

Poza samymi zawodami, uczestnikom zapewniono bogaty program turystyczno-rozrywkowy, w ramach którego między innymi odwiedzili zamki w miejscowościach Turaida i Sigulda oraz uczestniczyli w wieczorze gier planszowych i logicznych.

Szymon Kanonowicz

Chochlik Olimpijski

Już drugi rok dokumentujemy działalność Chochlika Olimpijskiego — psotliwego demona odpowiedzialnego za „matematycznie nowatorskie" fragmenty prac uczestników OMG. Jego wybryki rzadko kiedy mają wpływ na ocenę rozwiązań, w znakomitej większości skutkują one jedynie szerokim uśmiechem na ustach osoby sprawdzającej konkretną pracę, stanowiąc bardzo miłe urozmaicenie procesu recenzowania rozwiązań.

Poniżej prezentujemy fragmenty, które cieszyły się największym uznaniem zespołu sprawdzającego prace zawodów II stopnia tegorocznej edycji OMG.

- *Wszystkie liczby są parzyste, nieparzyste albo x.*
- *Suma w rzędach będzie początkowo większa niż w wierszach, ale z czasem wiersze dogonią i przegonią rzędy.*
- *Możemy obrać 3 punkty tworzące trójkąt, a następnie powoli usuwać z niego punkty.*
- *Trójkąt nie może się zapadnąć.*
- *Między dwoma punktami zawsze jest odległość.*
- *Zacznę od tego, że narysuję niewidzialną linię, która łączy A i M.*
- *Łączę punkt B z E i wydłużam go.*
- *Obliczam dla przykładu 3×3, bo nie mam 81 liter.*
- *Każda z tych liczb jest złożona z siebie.*

Na wyróżnienie zasługują również cztery oryginalne sposoby rozwiązania zadania 3.

- *Pomimo usilnych prób zbudowania takiej tablicy poległem, więc stwierdzam, że jej zbudować nie można.*
- *Może się to zdarzyć, ale bardzo rzadko.*
- *Tak, może się to zdarzyć, wszystko zależy od zmyślności autora i od porządku w układaniu liczb, który wymyśli autor.*
- *Odpowiedź do tego zadania kryje się w interpretacji słów „w pewnym porządku".*

W jednej z prac pojawiło się także zdanie:

- *W ostatnim rzędzie i kolumnie trafia się na martwy koniec.*

W tym momencie i my napotkaliśmy martwy koniec. Mamy nadzieję, Drogi Czytelniku, że podobnie jak i my traktujesz tę rubryczkę z przymrużeniem oka. Polecamy również odnoszenie się do przytoczonych cytatów z pewną dozą pokory — kto wie, może to Ty będziesz następną ofiarą Chochlika? ;)

Wszystkim uczestnikom OMG, ich nauczycielom oraz sympatykom Olimpiady życzymy przyjemnych wakacji!

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Liczby trójkątne i czworościenne

6. Dla każdego z kwadratów skorzystaj z zadania 2.

7. Wykorzystaj białą figurę z rysunku 5.

8. Ułóż obok siebie nie poszczególne liczby K_n po kolei, ale małe kwadratowe składniki każdej z nich — od najmniejszych do największych. Potem otrzymaną figurę spróbuj dopełnić do prostokąta.

9. Podobnie, jak w zadaniu 1., wykonaj odejmowanie geometrycznie. Następnie uzyskaną figurę podziel na prostokąty, z których wszystkie mają taki sam jeden z wymiarów i sklej je w jeden długi prostokąt. *Odpowiedź:* $ab(a+b+1)$.

10. Najpierw wykaż, że $T_n^2-T_{n-1}^2=n^3$. W dowodzie skorzystaj z zadania 2.

11. Zauważ, że sumę kolejnych dodatnich liczb całkowitych od k do m można wyrazić jako T_m-T_{k-1} (przyjmujemy $T_0=0$). Tę różnicę można przedstawić geometrycznie, a następnie dopełnić do prostokąta.

Kwadraty i dzielniki

9. *Sposób* I. Naśladuj rozwiązanie zadania 1: na mocy twierdzenia 1, szukana liczba jest kwadratem pewnej dodatniej liczby całkowitej k. Ile dzielników może mieć liczba k?
Sposób II. Wykorzystaj twierdzenie 4 z tego numeru *Kwadratu* i postępuj podobnie, jak w rozwiązaniu zadania 14.
Odpowiedź: Szukane liczby to czwarte potęgi liczb pierwszych.

10. Nie może. Rozważ liczby 6 i 8.

11. Nie istnieje. Każda liczba opisanej postaci dzieli się przez 5, ale nie przez 25.

12. Nie istnieje. Każda liczba opisanej postaci dzieli się przez 4, ale nie przez 8.

13. Skorzystaj z twierdzenia 3 i przeprowadź rozumowanie podobne do dowodu faktu o niewymierności liczby $\sqrt{2}$.

Redaguje zespół w składzie: Waldemar Pompe (przewodniczący KG OMG), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk (ogólnopolski koordynator OMG). Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 5000 egz.

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 13
wrzesień 2014
ISSN 2300-0708

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Kącik poetycki

Jeden z uczestników IX edycji OMG (2013/14) postanowił zaskarbić sobie względy Komisji Odwoławczej poprzez prezentację swoich talentów humanistycznych i sformułowanie odwołania w postaci krótkiego wierszyka:

Drodzy panowie, Drogie panie,
Chciałbym złożyć odwołanie
Bo zadanie numer dwa
Rozwiązać jestem w stanie!

Poetycka rękawica została podniesiona i w odpowiedzi na takie *dictum* Komisja Odwoławcza wysłała następujące uzasadnienie przyznanej oceny:

Chociaż zgodny z założeniem
Punkt O ładnie Pan wyznacza,
Dowód jego jedyności
Trochę Pana już przytłacza.

Pragnąc nie wprost rozumować
Inny punkt Z Pan obiera
I na punktach O, Z i X
Okrąg Pan rysuje teraz.

„AC częścią jest średnicy”
Twierdzi Pan, że się okaże,
Lecz uzasadnienie tego
Pozostaje w strefie marzeń.

Zaś w kryteriach oceniania
Nie ma żadnych wątpliwości:
Na sześć punktów był potrzebny
Dowód tej jednoznaczności.

Więc komisja odwoławcza
Dłużej się nie zastanawia
I z oceną pięciu punktów
Nadal Pana pozostawia.

My natomiast pozostawiamy Czytelnikowi ocenę, kto zwyciężył w powyższym pojedynku na rymy. ;) Życzymy ponadto miłej lektury niniejszego wydania *Kwadratu* oraz powodzenia w nowym roku szkolnym!

Redakcja

Kolorowe szachownice

W kombinatoryce istnieje wiele problemów, do rozwiązania których wykorzystuje się *kolorowanie*, czyli wyróżnienie niektórych fragmentów płaszczyzny celem zilustrowania pewnych własności. Poniżej przedstawimy kilka zadań, które przybliżą ten temat. Skupimy się na kolorowaniach złożonych z dwóch kolorów: białego i *kolorowego*.

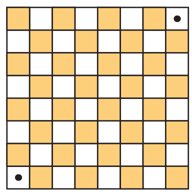
W niektórych zadaniach użyteczne okazuje się nawet tak proste i intuicyjne kolorowanie, jak zwykła szachownica.

Zadanie 1.

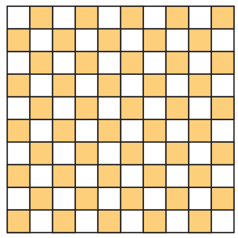
Czy szachownicę 8×8 można „obskoczyć” ruchami konika szachowego, stając na każdym polu dokładnie raz, jeśli startujemy z lewego dolnego pola i kończymy w prawym górnym?

Rozwiązanie

Zauważmy, że wykonanie ruchu konikiem szachowym powoduje zmianę koloru pola, na którym on stoi. To oznacza, że jeśli startujemy z pola białego (rys. 1), to po pierwszym ruchu konik znajdzie się na polu kolorowym, po drugim ruchu — na polu białym, po trzecim — znów na kolorowym itd. Aby „obskoczyć” całą szachownicę i na każdym polu być dokładnie raz, potrzebne są 63 ruchy. Jednak po wykonaniu 63 ruchów konik znajdzie się na polu kolorowym, a prawe górne pole szachownicy jest białe. To oznacza, że odpowiedź na pytanie postawione w zadaniu jest negatywna.



rys. 1

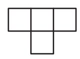


rys. 2

Często w zadaniach dotyczących szachownic mamy do czynienia z pokrywaniem ich różnymi figurami (na przykład tetraminami czy prostokątami) w taki sposób, aby cała powierzchnia została pokryta, a figury ani nie nachodziły na siebie ani nie wystawały poza szachownicę. Przyjrzyjmy się poniższemu problemowi.

Zadanie 2.

Czy kwadrat 10×10 można pokryć tetraminami w kształcie litery T (zob. rysunek poniżej), składającymi się z czterech pól 1×1?



Rozwiązanie

Przypuśćmy, że opisane pokrycie jest możliwe. Pokolorujmy dany kwadrat 10×10 w szachownicę, jak pokazano na rysunku 2. Zauważmy, że do pokrycia kwadratu potrzebnych jest $\frac{100}{4}=25$ klocków tetramina, czyli ich nieparzysta liczba. Ponadto każde tetramino zajmuje 1 lub 3, czyli nieparzystą liczbę kolorowych pól. Stąd liczba kolorowych pól zajętych przez wszystkie tetramina jest nieparzysta, podczas gdy liczba kolorowych pól kwadratu jest parzysta. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje szukane pokrycie.

Zadanie 3.

Czy kwadrat 10×10 można pokryć klockami o wymiarach 1×4?

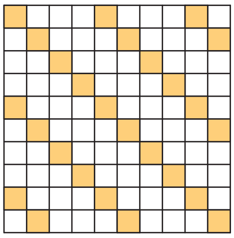
KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

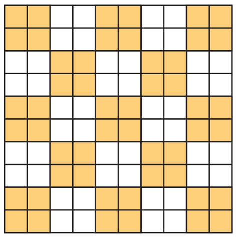
Rozwiązanie

Sposób I

Pokolorujmy kwadrat jak na rysunku 3.

Każdy klocek 1×4 zajmuje dokładnie jedno kolorowe pole. Takich pól jest 26. Aby więc pokryć szachownicę, należy użyć 26 klocków. Jednak do jej pokrycia potrzebnych jest dokładnie $\frac{100}{4}=25$ klocków. Odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest więc negatywna.


rys. 3


rys. 4

Sposób II

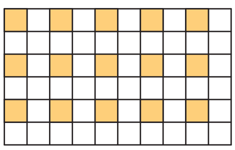
Rozważmy kolorowanie pokazane na rysunku 4. Każdy klocek pokrywa dwa kolorowe pola i dwa białe pola, więc wszystkie klocki powinny pokrywać łącznie tę samą liczbę białych i kolorowych pól. Tymczasem kwadrat zawiera 52 pola kolorowe oraz 48 pól białych. Dochodzimy więc znów do wniosku, że nie istnieje żądane pokrycie.

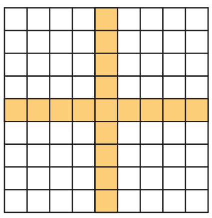
Zadanie 4.

Pewien prostokąt pokryto klockami, z których każdy jest wymiaru 2×2 lub 1×4. Następnie zebrano wszystkie klocki i wymieniono jeden klocek 2×2 na klocek 1×4. Wykaż, że nie da się pokryć wyjściowego prostokąta tak otrzymanym nowym zestawem klocków.

Rozwiązanie

Pokolorujmy prostokąt tak, jak pokazano na rysunku 5. Każdy klocek 2×2 pokrywa wówczas dokładnie jedno, czyli nieparzystą liczbę kolorowych pól, a prostokąt 1×4 pokrywa 0 lub 2, czyli parzystą liczbę kolorowych pól. Z tego wynika, że po wykonaniu opisanej zamiany parzystość liczby kolorowych pól pokrytych przez klocki zmieni się, czyli pokrycie wyjściowego prostokąta przestanie być możliwe.


rys. 5


rys. 6

Zadanie 5.

Udowodnij, że kwadratu 9×9 nie można pokryć klockami, z których każdy jest wymiaru 1×5 lub 1×6.

Rozwiązanie

Przypuśćmy nie wprost, że opisane pokrycie jest możliwe. Pokolorujmy kwadrat tak, jak pokazano na rysunku 6. Każdy klocek pokryje co najmniej jedno kolorowe pole, a klocek zajmujący pole centralne pokryje co najmniej pięć kolorowych pól. Kolorowych pól jest 17, więc do pokrycia kwadratu możemy użyć co najwyżej $17-5+1=13$ klocków. W takim razie klocki pokryją co najwyżej $13\cdot 6=78$ pól, a kwadrat 9×9 ma 81 pól. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 6.

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n o następującej własności: w kwadracie $n\times n$ można umieścić nie nachodzące na siebie klocki 1×4 w taki sposób, aby zajęte były wszystkie pola nie leżące przy brzegu (należy wypełnić szczelnie kwadrat $(n-2)\times(n-2)$, a klocki mogą wystawać jedno pole poza ten kwadrat).

Rozwiązanie

Rozważmy przypadki:

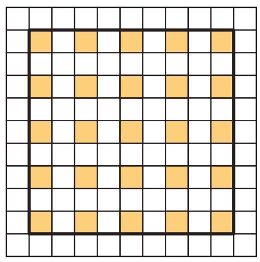
(1) Liczba n jest podzielna przez 4. W tym przypadku pokrycie jest możliwe, wypełniamy cały kwadrat $n\times n$.

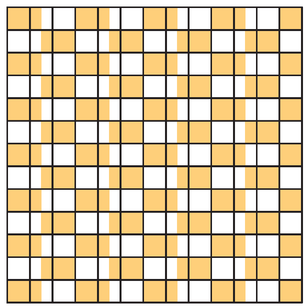
(2) Liczba n daje resztę 1 z dzielenia przez 4. W tym przypadku możemy pokryć klockami narożny kwadrat o boku $n-1$, wówczas w szczególności cały centralny kwadrat $(n-2)\times(n-2)$ zostanie pokryty.

(3) Liczba n daje resztę 2 z dzielenia przez 4. Wypełniamy klockami kwadrat $(n-2)\times(n-2)$ położony centralnie w kwadracie $n\times n$.

(4) Liczba n daje resztę 3 z dzielenia przez 4. Kolorujemy kwadrat tak, jak pokazano na rysunku 7. Każdy klocek pokrywa wówczas parzystą liczbę kolorowych pól (0 lub 2). Z drugiej strony liczba kolorowych pól wynosi $\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}$, co jest iloczynem dwóch liczb nieparzystych, czyli liczbą nieparzystą. Oznacza to, że w tym przypadku nie istnieje żądane wypełnienie kwadratu.

Odpowiedź. Warunki zadania spełniają te liczby naturalne $n\geqslant 4$, które nie dają reszty 3 przy dzieleniu przez 4.


rys. 7


rys. 8

Do rozwiązania kolejnego zadania zastosujemy nieintuicyjne kolorowanie, w którym pewne kwadraty jednostkowe będą kolorowe tylko w połowie.

Zadanie 7.

Czy kwadrat 13×13 można pokryć klockami, z których każdy ma wymiary 2×2 lub 3×3?

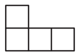
Rozwiązanie

Pokolorujmy kwadrat tak, jak pokazano na rysunku 8 (wyróżnione prostokąty mają wymiary $1\times\frac{3}{2}$). Wówczas każdy z klocków 2×2 i 3×3 pokrywa taką samą powierzchnię białą, co kolorową. Zatem, aby rozważane pokrycie istniało, powierzchnia kolorowa powinna być równa powierzchni białej. Możemy jednak łatwo policzyć, że powierzchnia biała zajmuje łącznie 84 pojedyncze pola, a powierzchnia kolorowa — 85 pól.

Na koniec proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w kolejnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 8.

Czy szachownicę 8×8 można pokryć piętnastoma tetraminami w kształcie litery L (zob. rysunek poniżej), składającymi się z czterech kwadratów 1×1, oraz jednym kwadratem 2×2?



Zadanie 9.

Kwadrat o wymiarach 7×7 jest pokryty szesnastoma klockami o wymiarach 3×1 i jednym o wymiarach 1×1. Jakie są możliwe położenia klocka 1×1 w tym kwadracie?

Zadanie 10.

Wszystkie pola pokratkowanej płaszczyzny są pokolorowane na biało. Przeprowadzamy wielokrotnie następującą operację: wybieramy dowolny kwadrat 3×3 lub 4×4, po czym każde jego czarne pole przekolorowujemy na białe, a białe na czarne. Czy za pomocą skończonej liczby takich operacji można otrzymać płaszczyznę, w której pola pewnego kwadratu 2×2 są czarne, a pozostałe pola są białe?

Anna Hoduń

Nierówność między średnimi

Danych jest n liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wówczas *średnią arytmetyczną* tych liczb nazywamy liczbę A zdefiniowaną wzorem

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

natomiast *średnią geometryczną* tych liczb nazywamy liczbę G zdefiniowaną wzorem

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

W rozwiązaniach wielu zadań można skorzystać z następującej ważnej własności: *dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność $G \leqslant A$, przy czym równość $G = A$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.*

Nie będę w tym artykule dowodził tej nierówności, pokażę tylko kilka jej zastosowań. Zacznę od rozwiązania zadania, które znalazło się na zawodach pierwszego stopnia I Olimpiady Matematycznej (r. szk. 1949/50). Nierówność będąca tematem tego zadania została wybita w 1999 r. na medalu pamiątkowym z okazji 50-lecia Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 1. (I OM, zawody I stopnia)

Udowodnij, że jeśli $m > 0$, to $m + \frac{4}{m^2} \geqslant 3$.

Rozwiązanie

Rozważmy następujące trzy liczby dodatnie:

$$a_1 = \frac{m}{2}, \quad a_2 = \frac{m}{2}, \quad a_3 = \frac{4}{m^2}.$$

Wówczas

$$G = \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} = \sqrt[3]{\frac{m}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{4}{m^2}} = 1,$$

natomiast

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{2} + \frac{4}{m^2}\right) = \frac{1}{3}\left(m + \frac{4}{m^2}\right).$$

Podstawiając do nierówności $G \leqslant A$ uzyskane wielkości, otrzymujemy natychmiast tezę.

Możemy jeszcze dodatkowo zauważyć, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = a_3$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $m/2 = 4/m^2$. Wyznaczając m z ostatniego równania, dostajemy $m = 2$.

Zadanie 2.

Udowodnij, że jeśli $m > 0$, to

$$m^2 + \frac{2}{m} \geqslant 3$$

oraz wyznacz wszystkie dodatnie liczby m, dla których zachodzi równość.

Rozwiązanie

Tym razem weźmy pod uwagę następujące trzy liczby dodatnie:

$$a_1 = m^2, \quad a_2 = \frac{1}{m}, \quad a_3 = \frac{1}{m}.$$

Wówczas

$$G = \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} = \sqrt[3]{m^2 \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m}} = 1,$$

natomiast

$$A = \frac{1}{3}\left(m^2 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{3}\left(m^2 + \frac{2}{m}\right).$$

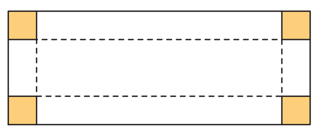
Podstawiając uzyskane wielkości do nierówności $G \leqslant A$, uzyskujemy tezę.

Równość w dowodzonej nierówności jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = a_3$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2 = 1/m$. Ostatnia zależność jest spełniona jedynie dla $m = 1$.

Teraz pokażę, w jaki sposób można wykorzystać nierówność między średnimi do rozwiązywania tzw. zadań optymalizacyjnych. Wiąże się z tym jednak pewna trudność. Zobaczymy ją na przykładzie następującego zadania.

Zadanie 3.

Dana jest prostokątna kartka papieru o długości 24 i szerokości 9. Z tej kartki wycinamy cztery kwadraty na rogach, zaginamy wzdłuż linii przerywanych (rys. 9) i tworzymy pudełko. Znaleźć długość boku odcinanych kwadratów, dla której objętość otrzymanego pudełka jest możliwie największa.



rys. 9

Rozwiązanie

Niech x oznacza długość boku odcinanych kwadratów. Wówczas objętość pudełka wyraża się wzorem

$$V = (24 - 2x) \cdot (9 - 2x) \cdot x.$$

Rozpatrzmy następujące trzy liczby dodatnie:

$$a_1 = 24 - 2x, \quad a_2 = 9 - 2x \quad \text{oraz} \quad a_3 = 4x.$$

Mamy wówczas

$$G = \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} = \sqrt[3]{4V} \quad \text{oraz} \quad A = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = 11.$$

Skoro $G \leqslant A$, więc $\sqrt[3]{4V} \leqslant 11$. Zatem $4V \leqslant 11^3 = 1331$, czyli $V \leqslant 332{,}75$.

Czy jednak stąd wynika, że największa możliwa objętość pudełka jest równa 332,75? Aby to sprawdzić, spróbujmy obliczyć długość x, dla której $V = 332{,}75$. Wtedy mamy także $G = A$. Wiemy, że ta równość jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2=a_3$. Zatem uzyskujemy stąd $24-2x=9-2x=4x$. Jednak pierwsza z tych równości nie może zachodzić dla żadnego x. Wobec tego spełniona jest nierówność ostra: $G<A$, a więc w konsekwencji $V<332{,}75$.

Otrzymaliśmy zatem tylko oszacowanie górne: objętość każdego pudełka, w tym także tego o maksymalnej objętości, jest *mniejsza* od 332,75. Nadal jednak nie wiemy, ile dokładnie ta maksymalna objętość wynosi.

Rozpatrzmy z kolei inne liczby dodatnie:

$$a_1=24-2x,\quad a_2=36-8x\quad \text{oraz}\quad a_3=10x.$$

Stąd dostajemy

$$G=\sqrt[3]{(24-2x)\cdot(36-8x)\cdot 10x}=$$
$$=\sqrt[3]{40\cdot(24-2x)(9-2x)x}=\sqrt[3]{40V}$$

oraz

$$A=\frac{24-2x+36-8x+10x}{3}=\frac{60}{3}=20.$$

Nierówność między średnimi $G\leqslant A$ daje nam teraz

$$\sqrt[3]{40V}=G\leqslant A=20,$$

czyli $40V\leqslant 20^3=8000$. Ostatecznie $V\leqslant 200$. Otrzymaliśmy zatem lepsze szacowanie: widzimy, że objętość pudełka jest mniejsza lub równa 200. Czy jednak tym razem jest to objętość maksymalna?

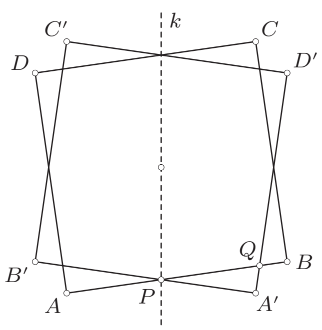
Sprawdźmy, podobnie jak wyżej, czy istnieje taka wielkość x, dla której $V=200$. Równość ta jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $G=A$, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2=a_3$. Z równości $a_1=a_2$, czyli $24-2x=36-8x$, uzyskujemy wówczas $x=2$. Wtedy

$$a_1=24-2\cdot 2=20,\quad a_2=36-8\cdot 2=20,\quad a_3=10\cdot 2=20.$$

Okazało się więc, że jeśli $x=2$, to $a_1=a_2=a_3=20$ i dla tych liczb otrzymujemy $G=A$, a więc $V=200$. Podsumowując: dla każdego x, objętość powstałego pudełka nie przekracza 200, a dla $x=2$ objętość ta równa się 200. Wobec tego szukaną maksymalną objętością jest $V=200$.

Zadanie 4.

Dany jest kwadrat $ABCD$ i prosta k przechodząca przez jego środek. Załóżmy, że prosta k przecina bok AB kwadratu w takim punkcie P, że $AP<BP$. Odbijamy kwadrat $ABCD$ symetrycznie względem prostej k. Wyznacz długość odcinka AP, dla której figura złożona z kwadratu $ABCD$ i jego odbicia symetrycznego ma największe pole.



rys. 10

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że interesująca nas figura składa się z kwadratu $ABCD$ i czterech trójkątów przystających do trójkąta $PA'Q$ (rys. 10). Zauważmy następnie, że $AP=A'P$ oraz $BQ=A'Q$. Niech $AB=1$, $AP=p$ oraz $BQ=q$. Mamy wówczas

$$p+\sqrt{p^2+q^2}+q=1,$$

skąd po nietrudnych obliczeniach dostajemy

$$q=\frac{1-2p}{2-2p}.$$

Zatem pole naszej figury jest równe

$$1+4\cdot\frac{pq}{2}=1+\frac{p(1-2p)}{1-p}=\frac{1-2p^2}{1-p}.$$

Niech teraz $r=1-p$. Wówczas $p=1-r$ i rozważane pole jest równe

$$\frac{1-2(1-r)^2}{r}=\frac{1-2+4r-2r^2}{r}=4-\left(2r+\frac{1}{r}\right).$$

Pole naszej figury jest więc największe dla takiego r, dla którego $2r+\frac{1}{r}$ jest najmniejsze. Ale wiemy, że

$$\frac{1}{2}\left(2r+\frac{1}{r}\right)\geqslant\sqrt{2r\cdot\frac{1}{r}},\quad\text{czyli}\quad 2r+\frac{1}{r}\geqslant 2\sqrt{2},$$

przy czy równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $2r=1/r$, czyli wtedy, gdy $r=1/\sqrt{2}$.

Mamy zatem odpowiedź: największe pole uzyskujemy dla odcinka AP o długości $1-1/\sqrt{2}\approx 0{,}2929$ i jest ono równe $4-2\sqrt{2}\approx 1{,}1716$.

Na koniec proponuję następujące zadania do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 5.

Wykaż, że jeśli liczby a, b oraz m są dodatnie, to

$$\text{(a)}\quad am+\frac{b}{m^2}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2b}{4}},\qquad \text{(b)}\quad am^2+\frac{b}{m}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}}.$$

Mając dane liczby a, b, wyznacz wszystkie liczby m, dla których spełniona jest równość.

Zadanie 6. (XLI OM, zawody I stopnia)

Wyznacz największą wartość iloczynu

$$a_1\cdot a_2^2\cdot a_3^3\cdot\ldots\cdot a_n^n,$$

gdzie $a_1,a_2,\ldots,a_n$ są dodatnimi liczbami o sumie 1.

Wojciech Guzicki

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Kwadraty i dzielniki raz jeszcze

18. Wykorzystaj twierdzenie 4 i postępuj podobnie jak w zadaniu 14. *Odpowiedź:* $2^{10}\cdot 3$.

19. Wykorzystaj twierdzenie 4, aby ustalić możliwe postaci $(*)$ szukanych liczb. Następnie weź pod uwagę, że $100=2^2\cdot 5^2$. *Odpowiedź:* 400 oraz 2500.

20. Nie. Wykorzystaj twierdzenia 3 i 4, by sprawdzić, że sześciany liczb całkowitych mają liczbę dzielników niepodzielną przez 3.

21. Wywnioskuj z twierdzenia 5, jakiej postaci musi być liczba, aby suma wszystkich jej dodatnich dzielników była liczbą pierwszą. *Odpowiedź:* 2^4 oraz 5^2.

22. Zauważ, że liczby względnie pierwsze nie mają wspólnych dzielników pierwszych. Następnie wykorzystaj postać $(*)$ liczb n i k oraz twierdzenie 5.

23. Sprawdź, że zachodzi równość

$$(p_i-1)(1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{\alpha_i})=p_i^{\alpha_i+1}-1$$

i wykorzystaj twierdzenie 5.

Kwadrat redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk. Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 5000 egz.

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

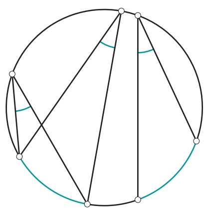
Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

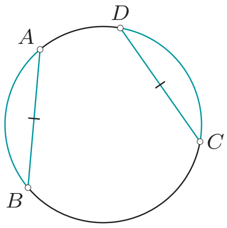
Nr 14
grudzień 2014
ISSN 2300-0708

O łukach równej długości

Znane twierdzenie mówi, że w każdym okręgu kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary. Wiemy także, że równe miary mają kąty wpisane oparte na dwóch łukach równej długości. Również odwrotnie: jeżeli kąty wpisane oparte na pewnych dwóch łukach mają równe miary, to łuki te są równej długości (rys. 1).



rys. 1

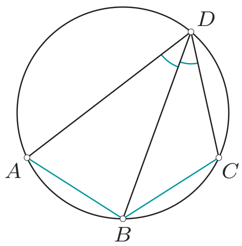


rys. 2

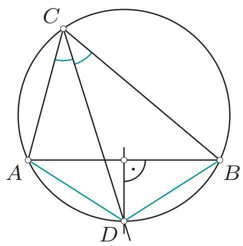
Ponadto, jeżeli łuki AB i CD tego samego okręgu są równej długości, to cięciwy AB i CD są także równej długości. Również odwrotnie: jeżeli cięciwy AB i CD jednego okręgu są równej długości, to krótszy łuk AB tego okręgu jest równy krótszemu łukowi CD (rys. 2). Wynika stąd natychmiast następujące użyteczne twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg (rys. 3). Wówczas półprosta DB jest dwusieczną kąta ADC wtedy i tylko wtedy, gdy $AB=BC$.



rys. 3



rys. 4

Pomimo swojego prostego sformułowania, powyższe twierdzenie ma wiele zastosowań w zadaniach olimpijskich. Spójrzmy na dwa przykłady.

Zadanie 1.

Dany jest trójkąt ABC. Wykaż, że symetralna boku AB i dwusieczna kąta ACB przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez D środek tego łuku AB okręgu opisanego na trójkącie ABC, który nie zawiera punktu C (rys. 4). Ponieważ łuki AD i DB są równej długości, więc $AD=DB$, czyli punkt D leży na symetralnej boku AB. Z twierdzenia 1 dla czworokąta $ADBC$ dostajemy z kolei, że półprosta CD jest dwusieczną kąta ACB. Zatem punkt D jest punktem przecięcia symetralnej boku AB i dwusiecznej kąta ACB, a przy tym leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Zadanie 2.

W trójkącie ABC zachodzi równość $\sphericalangle ACB=60^\circ$. Dwusieczne kątów BAC i ABC tego trójkąta przecinają boki BC i AC odpowiednio w punktach D i E. Oznaczmy przez I punkt przecięcia tych dwusiecznych. Wykaż, że $ID=IE$ (rys. 5).

Rozwiązanie

Kąty EID oraz AIB są wierzchołkowe, zatem

$$\sphericalangle EID=\sphericalangle AIB=180^\circ-\sphericalangle IAB-\sphericalangle IBA.$$

Ponieważ półproste AI i BI są dwusiecznymi kątów trójkąta ABC, więc

$$\sphericalangle EID=180^\circ-\frac{\sphericalangle CAB+\sphericalangle CBA}{2}.$$

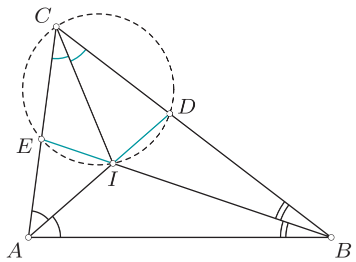
Skoro $\sphericalangle ACB=60^\circ$, a suma miar kątów w trójkącie wynosi 180°, to $\sphericalangle CAB+\sphericalangle CBA=120^\circ$. Wobec tego

$$\sphericalangle EID=180^\circ-\frac{120^\circ}{2}=120^\circ.$$

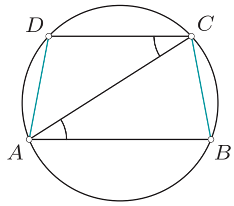
W czworokącie $EIDC$ mamy zatem

$$\sphericalangle EID+\sphericalangle ECD=120^\circ+60^\circ=180^\circ,$$

więc czworokąt ten można wpisać w okrąg. Ponieważ prosta CI jest dwusieczną kąta ECD (w trójkącie dwusieczne kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie), to z twierdzenia 1 zastosowanego dla czworokąta $EIDC$ uzyskujemy $ID=IE$. To kończy rozwiązanie zadania.



rys. 5



rys. 6

Cięciwy równej długości pojawiają się także wtedy, gdy wpisujemy w okrąg trapez.

Twierdzenie 2.

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg (rys. 6). Wówczas proste AB i CD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $BC=DA$.

Dowód

Proste AB i CD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle BAC=\sphericalangle DCA$. Równość ta z kolei jest równoważna zależności $BC=DA$, co kończy dowód twierdzenia.

Zadanie 3.

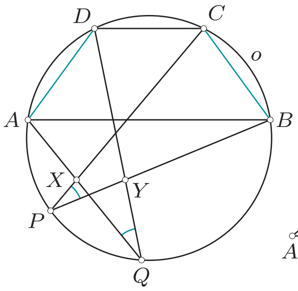
Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, wpisany w okrąg o. Na okręgu tym wybrano punkty P, Q różne od A, B w taki sposób, że punkty A, P, Q, B, C, D leżą na okręgu o w tej właśnie kolejności (rys. 7). Odcinki PC i QA przecinają się w punkcie X, a odcinki PB i QD przecinają się w punkcie Y. Wykaż, że punkty P, Q, X, Y leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie

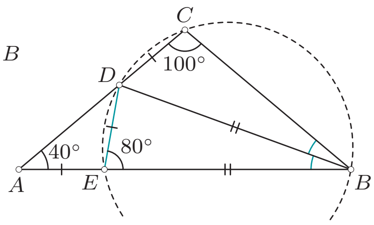
Ponieważ proste AB i CD są równoległe, więc z twierdzenia 2 wnioskujemy, że $BC = DA$. Wynika stąd, że łuki DA i BC mają równe długości, a w związku z tym kąty BPC i DQA wpisane w okrąg o mają równe miary:

$$\sphericalangle YPX = \sphericalangle BPC = \sphericalangle DQA = \sphericalangle YQX\,.$$

Ponieważ punkty P i Q leżą po tej samej stronie prostej XY, więc ostatnia równość oznacza, że punkty P, Q, X, Y leżą na jednym okręgu. To kończy rozwiązanie zadania.



rys. 7



rys. 8

Zadanie 4.

W trójkącie ABC kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A i B mają miary $40°$. Dwusieczna kąta ABC przecina odcinek AC w punkcie D (rys. 8). Udowodnij, że $BD + CD = AB$.

Rozwiązanie

Na boku AB obieramy taki punkt E, że spełniona jest równość $\sphericalangle BED = 80°$. Wówczas

$$\sphericalangle BCD + \sphericalangle BED = 100° + 80° = 180°\,.$$

Wobec tego czworokąt $BCDE$ można wpisać w okrąg. Ponieważ półprosta BD jest dwusieczną kąta EBC, więc korzystając z twierdzenia 1, uzyskujemy $CD = DE$. Ponadto

$$\sphericalangle ADE = \sphericalangle DEB - \sphericalangle DAB = 80° - 40° = 40° = \sphericalangle DAE\,,$$

skąd wynika, że $DE = AE$. Podobnie,

$$\sphericalangle EDB = 180° - \sphericalangle DEB - \sphericalangle EBD = \\ = 180° - 80° - 20° = 80° = \sphericalangle DEB\,,$$

skąd wniosek, że $BD = BE$. Otrzymujemy więc

$$BD + CD = BE + AE = AB\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Przedstawiamy także kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich zamieścimy w kolejnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5.

W czworokącie $ABCD$ spełnione są następujące równości: $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 60°$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD. Udowodnij, że $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DAO$.

Zadanie 6.

Punkty D i E leżą na boku AC trójkąta ABC. Półproste BD i BE dzielą kąt ABC na trzy równe kąty. Okrąg przechodzący przez punkt B przecina półproste BA, BC, BD, BE odpowiednio w punktach K, L, M, N. Wykaż, że punkty K, L, M, N są wierzchołkami trapezu.

Zadanie 7.

W trójkącie ABC okrąg wpisany o środku I jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach A_1, B_1, C_1. Odcinki AI, BI, CI przecinają ten okrąg odpowiednio w punktach A_2, B_2, C_2. Udowodnij, że proste A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 8.

W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg spełniona jest równość $AB = BD$. Na przedłużeniu przekątnej AC poza punkt C wybrano taki punkt E, że $CE = CD$. Wykaż, że $BE = BD$.

Zadanie 9.

Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg, przy czym $AB \parallel DE$ oraz $BC \parallel EF$. Udowodnij, że $CD \parallel FA$.

Kamil Rychlewicz

Sukces Polaków na MEMO

VIII Środkowoeuropejska Olimpiada Matematyczna (Middle European Mathematical Olympiad, MEMO) odbyła się w dniach 18–24 września 2014 r. w niemieckim Dreźnie. W konkursie wystartowało sześćdziesięcioro zawodników z dziesięciu państw: Austrii, Chorwacji, Czech, Litwy, Niemiec, Polski, Słowacji, Słowenii, Szwajcarii oraz Węgier. W skład polskiej delegacji, wyłonionej na podstawie wyników LXV Olimpiady Matematycznej (2013/2014), weszli:

- Stanisław Frejlak (XIV LO w Warszawie),
- Damian Głodkowski (XIV LO w Warszawie),
- Adam Klukowski (XIV LO w Warszawie),
- Mateusz Kobak (LO im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie),
- Konrad Jan Paluszek (XIV LO w Warszawie),
- Mariusz Trela (Publiczne Gimnazjum nr 52 Ojców Pijarów w Krakowie).

Wszyscy wyżej wymienieni uczniowie byli laureatami poprzednich edycji OMG.

Zawody indywidualne odbyły się 20 września. Do rozwiązania były cztery zadania w pięć godzin. Przyznano trzy złote, jedenaście srebrnych i osiemnaście brązowych medali. Trzynaścioro uczestników zostało nagrodzonych wzmianką zaszczytną za poprawne rozwiązanie przynajmniej jednego zadania. Dzień później rozegrano zawody drużynowe, polegające na wspólnym rozwiązywaniu ośmiu zadań.

Polacy spisali się bardzo dobrze. W zawodach indywidualnych wywalczyli cztery srebrne oraz dwa brązowe medale. Srebra zdobyli: Adam Klukowski, Mariusz Trela (4. miejsce ex aequo), Konrad Jan Paluszek (7. miejsce) oraz Damian Głodkowski (13. miejsce). Stanisław Frejlak i Mateusz Kobak przywieźli brąz, zajmując 25. miejsce ex aequo. Wygrali Chorwat Ivan Lazarić oraz Węgier Kada Williams, nie tracąc ani jednego punktu.

W zawodach drużynowych zwyciężyli Polacy, rozwiązując siedem zadań i uzyskując 54 punkty na 64 możliwe. Na drugim miejscu uplasowali się Węgrzy, a na trzecim Chorwaci, tracąc odpowiednio dwa i osiem punktów do Polaków. Na uwagę zasługuje fakt, że tylko polska drużyna otrzymała maksymalną liczbę punktów za zadanie drugie — piekielnie trudną nierówność funkcyjną. Warto też podkreślić, że Polacy zaskoczyli wszystkich niezwykle eleganckim rozwiązaniem zadania szóstego — bardzo trudnej geometrii, którą oprócz Polaków rozwiązali tylko Węgrzy. Szkic tego rozwiązania prezentujemy poniżej.

Przyszłoroczne zawody odbędą się w mieście Koper w Słowenii pod koniec sierpnia 2015 roku.

Zadanie 6. (VIII MEMO, zawody drużynowe)

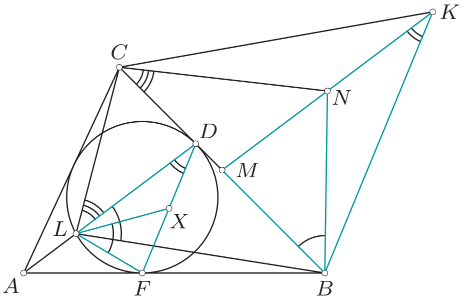
Okrąg k wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Prosta AD przecina okrąg k w punkcie $L \neq D$. Punkt K jest środkiem okręgu dopisanego do boku BC trójkąta ABC. Niech M i N będą odpowiednio środkami odcinków BC i KM. Wykazać, że punkty B, C, N i L leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie polskiej reprezentacji (szkic)

Niech F będzie punktem styczności okręgu k z odcinkiem AB (rys. 9). Wówczas zachodzą równości

$$\measuredangle FLD = \measuredangle FDB = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle ABC = \measuredangle MBK .$$

Można dowieść, że proste AD i MK są równoległe (wykażemy to w następnym numerze *Kwadratu*), a zatem $\measuredangle LDF = \measuredangle MKB$. Na mocy cechy podobieństwa trójkątów kąt–kąt wnioskujemy, że $\triangle FLD \sim \triangle MBK$.



rys. 9

Niech X będzie środkiem odcinka FD. Wówczas $\triangle MBN \sim \triangle FLX$, zatem $\measuredangle MBN = \measuredangle FLX$. Ponadto prosta LB jest symedianą trójkąta FLD (więcej na ten temat w następnym numerze *Kwadratu*), skąd wynika, że $\measuredangle FLX = \measuredangle BLD$. To oznacza, że $\measuredangle MBN = \measuredangle BLD$.

Analogicznie $\measuredangle MCN = \measuredangle CLD$. Wobec tego

$$\measuredangle BLC + \measuredangle CNB = \measuredangle MBN + \measuredangle MCN + \measuredangle CNB = 180^\circ .$$

Otrzymana równość oznacza, że na czworokącie $BLCN$ można opisać okrąg, co było do wykazania.

Tomasz Cieśla

Zmagania z ułamkami

Aby skrócić ułamek, w którego liczniku i mianowniku znajdują się dodatnie liczby całkowite, dzielimy obie liczby przez ich największy wspólny dzielnik. Można go wyznaczyć, rozkładając licznik i mianownik na czynniki pierwsze. Czasami jednak rozkład danej liczby na czynniki pierwsze może być kłopotliwy. W takiej sytuacji często pomocne jest następujące twierdzenie, zwane *algorytmem Euklidesa*.

Twierdzenie 1. (algorytm Euklidesa)

Jeśli a i b są dodatnimi liczbami całkowitymi oraz $a > b$, to $\mathrm{NWD}(a,b) = \mathrm{NWD}(a-b,b)$.

Dowód

Jeśli d jest dzielnikiem obu liczb a i b, to liczba d jest także dzielnikiem ich różnicy $a-b$. I odwrotnie: jeśli d jest dzielnikiem obu liczb $a-b$ i b, to liczba d jest także dzielnikiem ich sumy, czyli a. Wobec tego pary liczb a, b oraz $a-b$, b mają takie same wspólne dzielniki. W szczególności więc największy wspólny dzielnik liczb a, b jest równy największemu wspólnemu dzielnikowi liczb $a-b$, b, co kończy dowód twierdzenia.

Zadanie 1.

Dane są dodatnie liczby całkowite a i b. Wykaż, że jeżeli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to także ułamek

$$\frac{a+2b}{a+3b}$$

jest nieskracalny.

Rozwiązanie

Skoro ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to $\mathrm{NWD}(a,b)=1$. Wobec tego, wykorzystując kilkakrotnie algorytm Euklidesa, uzyskujemy

$$\mathrm{NWD}(a+2b, a+3b) = \mathrm{NWD}(a+2b, b) = \\ = \mathrm{NWD}(a+b, b) = \mathrm{NWD}(a,b) = 1 ,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których ułamek $\dfrac{n^2+6}{n+1}$ jest nieskracalny.

Rozwiązanie

Podobnie jak wyżej, szukamy takich liczb naturalnych n, dla których największy wspólny dzielnik liczb n^2+6 i $n+1$ jest równy 1.

Korzystając z algorytmu Euklidesa i odejmując $(n-1)$-krotnie liczbę $n+1$ od liczby n^2+6, uzyskujemy

$$\mathrm{NWD}(n^2+6, n+1) = \\ = \mathrm{NWD}(n^2+6-(n-1)(n+1), n+1) = \\ = \mathrm{NWD}(7, n+1) .$$

Wobec tego największy wspólny dzielnik liczb n^2+6 i $n+1$ jest równy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $n+1$ nie jest podzielna 7. To oznacza, że dany ułamek jest nieskracalny dokładnie dla tych liczb n, które z dzielenia przez 7 nie dają reszty 6. To kończy rozwiązanie zadania.

Przyjmijmy, że liczba a z dzielenia przez b daje iloraz k oraz resztę r. Wtedy odejmując k-krotnie liczbę b od a, uzyskujemy r. Wobec tego k-krotne zastosowanie algorytmu Euklidesa prowadzi do zależności $\mathrm{NWD}(a,b) = \mathrm{NWD}(r,b)$.

Szczególną rolę w rozważaniach dotyczących podzielności odgrywają pary liczb, których największy wspólny dzielnik jest równy 1. Takie dwie liczby nazywamy *względnie pierwszymi*. Innymi słowy, liczby a i b są względnie pierwsze, jeśli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny.

Zauważmy, że jeśli liczby a i b są względnie pierwsze oraz liczby a i c są względnie pierwsze, to liczby a i bc są względnie pierwsze. Istotnie: gdyby ułamek $\frac{bc}{a}$ dało się skrócić, to pewien dzielnik pierwszy liczby a byłby także dzielnikiem przynajmniej jednej z liczb b lub c. To przeczy założeniu, że a, b oraz a, c to pary liczb względnie pierwszych.

Przyjmując $b=c$, uzyskujemy następujący wniosek: *jeżeli liczby a i b są względnie pierwsze, to liczby a i b^2 też są względnie pierwsze.*

Twierdzenie 2.

Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, przy czym liczby a i b są względnie pierwsze. Wówczas jeśli $a\,|\,bc$, to $a\,|\,c$.

Dowód

Teza twierdzenia jest spełniona dla $a=1$. Przyjmijmy zatem, że $a>1$ i rozpatrzmy rozkład na czynniki pierwsze liczby a. Załóżmy, że pewna liczba pierwsza p występuje w tym rozkładzie w potędze α. Wówczas liczba p nie może wystąpić w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby b, bowiem liczby a i b są względnie pierwsze. Wobec tego, skoro $a\,|\,bc$, to liczba p musi wystąpić w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby c w potędze co najmniej α. Analogicznie, każdy czynnik pierwszy liczby a występuje w rozkładzie liczby c z wykładnikiem nie mniejszym niż w rozkładzie liczby a. Zatem $a\,|\,c$, co kończy dowód.

Przyjmując $c=1$ w powyższym twierdzeniu, otrzymujemy następujący wniosek: *jeśli liczby a i b są względnie pierwsze oraz $a\,|\,b$, to $a=1$.*

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie pary a, b dodatnich liczb całkowitych, dla których liczba

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

jest całkowita.

Rozwiązanie

Oznaczmy $d=\mathrm{NWD}\,(a,b)$. Wtedy dzieląc licznik i mianownik ułamka $\frac{a}{b}$ przez d, uzyskujemy ułamek nieskracalny $\frac{x}{y}$. Wobec tego $a=dx$ oraz $b=dy$, gdzie x i y są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Wówczas

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}\,.$$

Stąd wynika w szczególności, że x jest dzielnikiem liczby x^2+y^2 i w konsekwencji, skoro $x\,|\,x^2$, to $x\,|\,y^2$. Jednak liczby x i y^2 są względnie pierwsze, więc $x=1$.

Analogicznie dowodzimy, że $y=1$. W związku z tym uzyskujemy $a=d=b$. Pozostaje zauważyć, że jeśli $a=b$, to dana liczba jest całkowita i równa 2.

Zadanie 4. (VII OMG, zawody III stopnia)

Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, że iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a+b$. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b. Udowodnij, że $d\geqslant\sqrt{a+b}$.

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, oznaczmy $d=\mathrm{NWD}\,(a,b)$. Wtedy $a=dx$ oraz $b=dy$, gdzie x i y są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Stąd otrzymujemy

$$\frac{ab}{a+b}=\frac{d^2xy}{d(x+y)}=\frac{dxy}{x+y}$$

i zgodnie z warunkami zadania jest to liczba całkowita. Ponadto, na mocy algorytmu Euklidesa,

$$\mathrm{NWD}\,(x+y,x)=\mathrm{NWD}\,(y,x)=1\,,$$
$$\mathrm{NWD}\,(x+y,y)=\mathrm{NWD}\,(x,y)=1\,.$$

Wobec tego liczby xy oraz $x+y$ są względnie pierwsze. Skoro jednak $x+y\,|\,dxy$, więc na mocy twierdzenia 2 $x+y\,|\,d$. Stąd wniosek, że $d\geqslant x+y$. Po pomnożeniu tej nierówności stronami przez d uzyskujemy $d^2\geqslant a+b$, czyli $d\geqslant\sqrt{a+b}$. To kończy rozwiązanie zadania.

Poniżej proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5. (I Międzynarodowa OM, 1959 r.)

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n ułamek $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ jest nieskracalny.

Zadanie 6. (VI OMG, zawody III stopnia)

Liczby p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Wykaż, że liczba p^2+q^2 nie jest podzielna przez liczbę $p+q$.

Zadanie 7.

Wyznacz wszystkie pary a, b dodatnich liczb całkowitych, dla których liczba $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{2}$ jest całkowita.

Zadanie 8.

Liczby a oraz b są całkowite dodatnie. Wykaż, że jeżeli ułamek $\frac{a}{b}$ jest nieskracalny, to także ułamek

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$$

jest nieskracalny.

Waldemar Pompe

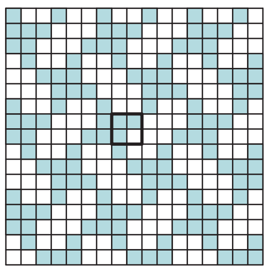
Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Kolorowe szachownice

8. Pomaluj szachownicę w poziome paski, złożone na zmianę z wyróżnionych i niewyróżnionych pól. Zauważ, że każde tetramino w kształcie litery L pokrywa nieparzystą liczbę wyróżnionych pól, a każdy kwadrat 2×2 pokrywa parzystą liczbę wyróżnionych pól.

9. Wyróżnij 17 pól szachownicy w sposób podobny do przedstawionego na rysunku 3 tak, aby każdy prostokąt 1×3 pokrywał dokładnie jedno wyróżnione pole. Następnie wyróżnij inny zestaw 17 pól szachownicy. Możliwe położenia klocka 1×1 to pola wyróżnione jednocześnie w obu tych przypadkach; jest ich 9.

10. Nie jest to możliwe. Skorzystaj z poniższego rysunku, aby uzasadnić, że po wykonaniu dowolnej liczby dozwolonych operacji, na płaszczyźnie zawsze będzie parzysta liczba wyróżnionych pól koloru czarnego. Zauważ, że wyróżniony kwadrat 2×2 zawiera nieparzystą liczbę wyróżnionych pól.



Nierówność między średnimi

5 (a), (b). Użyj nierówności między średnimi dla trzech odpowiednio dobranych liczb.

6. Skorzystaj z nierówności między średnimi dla następujących liczb: a_1, $\frac{1}{2}a_2$, $\frac{1}{2}a_2$, $\frac{1}{3}a_3$, $\frac{1}{3}a_3$, $\frac{1}{3}a_3$, ...

Kwadrat redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk. Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 5000 egz.

Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 15
kwiecień 2015
ISSN 2300-0708
Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Wiatraczek

Na zawodach drugiego stopnia tegorocznej X edycji OMG uczestnicy rozwiązywali następujące zadanie.

Zadanie 5.

Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz tego trójkąta. Proste AP, BP, CP przecinają odcinki BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie cztery spośród trójkątów AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP miały równe pola? Odpowiedź uzasadnij.

Okazuje się, że wybór takiego punktu nie jest możliwy. Nie istnieje również taki punkt P, aby dokładnie pięć spośród wymienionych trójkątów miało równe pola. Nasuwa się więc naturalne pytanie, czy można znaleźć taki punkt P, jeśli zażądamy, by powstała mniejsza liczba trójkątów o równych polach:

Zadanie 5'.

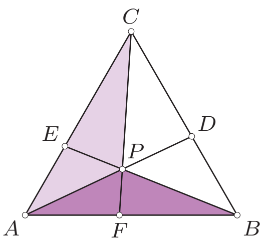
Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie *trzy* spośród trójkątów AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP miały równe pola?

Odpowiedź na to pytanie jest w dalszym ciągu negatywna. Zadanie 5' jest jednak ogólniejsze i jego rozwiązanie wymaga przeanalizowania dodatkowej konfiguracji: *wiatraczka*.

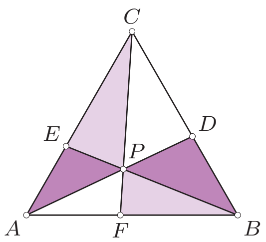
Rozwiązanie zadania 5'

Przypuśćmy, że pewne trzy z rozważanych sześciu trójkątów mają równe pola.

Zauważmy, że jeżeli pewne dwa trójkąty, które mają ten sam odcień na rysunku 1, mają równe pola, to jeden z odcinków AD, BE, CF jest środkową trójkąta ABC. Rzeczywiście, jeśli na przykład pola trójkątów APF i BPF są równe, to $AF=BF$, gdyż trójkąty te mają tę samą wysokość poprowadzoną z wierzchołka P.



rys. 1



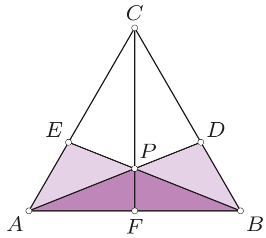
rys. 2

Podobnie, jeżeli równe pola mają pewne dwa trójkąty o tym samym odcieniu na rysunku 2, to wówczas jedna z prostych AD, BE, CF jest środkową trójkąta ABC. Istotnie, jeśli przez $[\mathcal{F}]$ oznaczymy pole figury $\mathcal{F}$, to z równości $[APE]=[BPD]$ wynika, że

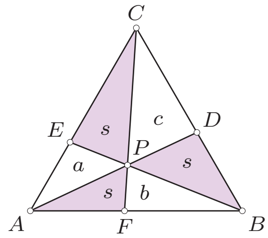
$$[ABE]=[APE]+[ABP]=[BPD]+[ABP]=[ABD].$$

Stąd wniosek, że proste AB i DE są równoległe, gdyż trójkąty ABE i ABD mają wspólną podstawę AB. Ponadto $\sphericalangle BAE=\sphericalangle ABD$, co oznacza, że trapez $ABDE$ jest równoramienny i w konsekwencji punkty P i C leżą na symetralnej odcinka AB. Wobec tego punkt F jest środkiem tego odcinka.

Jeżeli zatem pewne dwa trójkąty o tym samym odcieniu z rysunku 1 lub 2 mają równe pola, to uzyskujemy trzy pary trójkątów o równych polach, symetrycznych względem jednej z prostych AD, BE, CF (na rysunku 3 jest to prosta CF). Wówczas liczba trójkątów o równych polach jest parzysta, czyli nie może być równa 3.



rys. 3



rys. 4

Wobec tego pozostała do rozpatrzenia tylko konfiguracja trzech trójkątów o równych polach, ułożonych w *wiatraczek* (rys. 4).

Oznaczmy pola trójkątów *wiatraczka* przez s, a pola pozostałych trzech trójkątów — przez a, b, c. Korzystając dwukrotnie z faktu udowodnionego na początku artykułu *Pole* (*Kwadrat* nr 10, wrzesień 2013), możemy zapisać równość

$$\frac{2s+a}{s+b+c}=\frac{[ACF]}{[BCF]}=\frac{AF}{BF}=\frac{[APF]}{[BPF]}=\frac{s}{b}.$$

Zależność tę przekształcamy następująco:

$$2bs+ab=s^2+sb+sc,$$
$$b(a+s)=s(c+s).$$

W pełni analogicznie dochodzimy do związków

$$c(b+s)=s(a+s),$$
$$a(c+s)=s(b+s).$$

Dodając stronami trzy ostatnie równości, uzyskujemy

$$ab+bc+ca+s(a+b+c)=s(a+b+c)+3s^2,$$
$$ab+bc+ca=3s^2. \tag{1}$$

Z kolei mnożąc stronami te równości, otrzymujemy

$$abc(a+s)(b+s)(c+s)=s^3(a+s)(b+s)(c+s),$$
$$abc=s^3. \tag{2}$$

Zauważmy, że z równości (1) wynika, że

$$s^2=\frac{ab+bc+ca}{3},$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

czyli liczba s^2 jest *średnią arytmetyczną* liczb ab, bc, ca. Z kolei równość (2) można przekształcić do postaci

$$s^2 = \sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca},$$

skąd wynika, że liczba s^2 jest także *średnią geometryczną* liczb ab, bc, ca. Korzystając teraz z własności sformułowanej we wstępie do artykułu *Nierówność między średnimi* (*Kwadrat* nr 13, wrzesień 2014), wnioskujemy, że skoro średnia arytmetyczna liczb ab, bc, ca jest równa ich średniej geometrycznej, to wszystkie te liczby są równe, czyli $ab = bc = ca$. Stąd otrzymujemy $a = b = c$, co po skorzystaniu z równości (2) prowadzi do $a = b = c = s$. Ostatecznie doszliśmy do wniosku, że również w przypadku *wiatraczka* wszystkie sześć trójkątów ma równe pola, co kończy rozwiązanie zadania 5'.

Na koniec proponujemy Czytelnikom dwa zadania do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5".

Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie *dwa* spośród trójkątów AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP miały równe pola oraz aby punkt P nie należał do żadnej z wysokości trójkąta ABC?

Zadanie 6.

Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz czworościanu foremnego $ABCD$. Płaszczyzny ABP, ACP, ADP, BCP, BDP, CDP rozcinają ten czworościan na 24 mniejsze czworościany. Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie 9 z tych czworościanów miało równe objętości?

Łukasz Bożyk

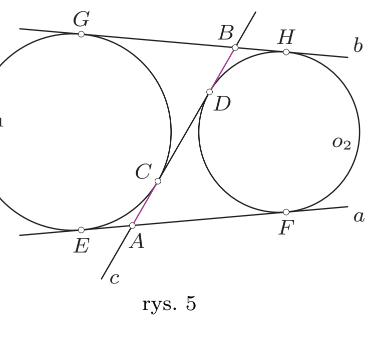
Kilka geometrycznych lematów

W rozwiązaniach zadań często formułuje się i udowadnia tzw. *lematy*, czyli pomocnicze twierdzenia. Dzięki nim rozumowanie staje się prostsze i bardziej przejrzyste.

Znajomość różnych lematów jest bardzo przydatna, o czym przekonaliśmy się w poprzednim numerze *Kwadratu*. Zaprezentowaliśmy tam rozwiązanie zadania geometrycznego z międzynarodowych zawodów MEMO przedstawione przez polską drużynę. Korzystało ono z dwóch użytecznych faktów, które teraz udowodnimy. Zaczniemy od innego, równie przydatnego zadania.

Zadanie 1.

Proste a i b są wspólnymi stycznymi zewnętrznymi do okręgów o_1 i o_2 (rys. 5). Wspólna styczna wewnętrzna c przecina proste a i b odpowiednio w punktach A i B. Punkty C i D są punktami styczności prostej c odpowiednio z okręgami o_1 i o_2. Udowodnij, że $AC = BD$.



rys. 5

Rozwiązanie

Oznaczmy pozostałe punkty styczności prostych a, b z okręgami o_1, o_2 jak na rysunku 5. Wówczas

$$AC+AD=AE+AF=EF=GH=BG+BH=BC+BD.$$

Ponadto $AD = AC + CD$ oraz $BC = BD + CD$, więc $2AC + CD = 2BD + CD$. Po odjęciu stronami wielkości CD, otrzymujemy $2AC = 2BD$. Stąd uzyskujemy $AC = BD$, co kończy rozwiązanie zadania.

Zauważmy, że tezę powyższego zadania można wysłowić w następujący sposób: *środki odcinków AB i CD się pokrywają*.

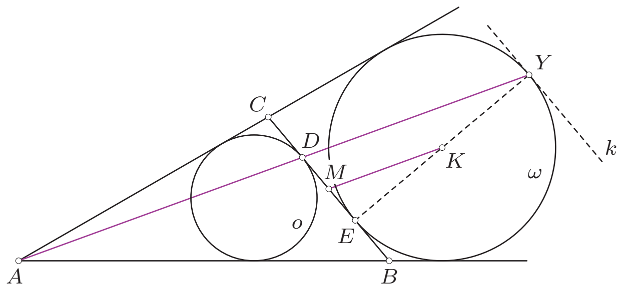
Jesteśmy już gotowi do wykazania pierwszego lematu z poprzedniego numeru *Kwadratu*.

Zadanie 2.

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Punkt K jest środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku BC, a punkt M jest środkiem BC. Udowodnij, że proste AD i MK są równoległe.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez o okrąg wpisany w trójkąt ABC, a przez ω okrąg dopisany, styczny do boku BC w punkcie E (rys. 6). Wybierzmy ponadto punkt Y tak, aby odcinek EY był średnicą okręgu ω. Wówczas styczna k do okręgu ω w punkcie Y jest równoległa do prostej BC.



rys. 6

Rozważmy jednokładność o środku w punkcie A, która przekształca okrąg o na okrąg ω. Przeprowadza ona wtedy także prostą BC na prostą k, a więc przekształca punkt D na punkt Y. Stąd wniosek, że punkty A, D i Y są współliniowe. Innymi słowy, proste AD i DY pokrywają się.

Z zadania 1 wynika, że punkt M jest środkiem odcinka DE. Wobec tego prosta MK przechodzi przez środki boków DE i YE trójkąta DEY, jest więc równoległa do prostej DY. To kończy rozwiązanie zadania.

Wykażemy teraz drugi z faktów użytych w poprzednim numerze *Kwadratu*.

Niech ABC będzie trójkątem, a punkt M — środkiem boku BC. *Symedianą* trójkąta ABC, poprowadzoną z wierzchołka A, nazywamy prostą symetryczną do środkowej AM względem dwusiecznej kąta BAC.

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o, przy czym $\sphericalangle A < 90°$. Punkt D jest punktem przecięcia stycznych do okręgu o w punktach B i C. Udowodnij, że prosta AD jest symedianą w trójkącie ABC.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez M środek odcinka BC. Wystarczy wykazać, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle MAC$.

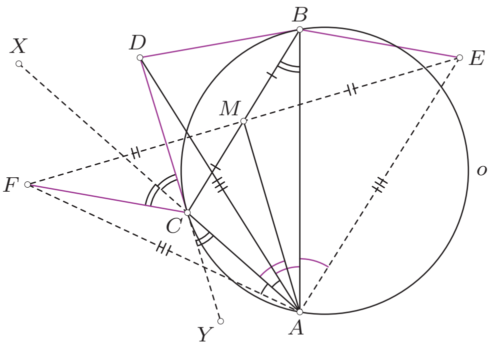
Równość ta jest spełniona, jeśli $AB=AC$. Przyjmijmy zatem, bez straty ogólności, że $AC<AB$.

Obierzmy na półprostej AC, poza odcinkiem AC, dowolny punkt X, a na półprostej DC, poza odcinkiem DC, dowolny punkt Y (rys. 7). Niech punkty E i F będą obrazami symetrycznymi punktu D odpowiednio względem prostych AB i AC. Wówczas $CF=CD=BD=BE$ oraz $AF=AD=AE$. Ponadto, z twierdzenia o kącie między styczną a sieczną, $\sphericalangle DCX=\sphericalangle YCA=\sphericalangle CBA$. Zachodzi więc następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}\sphericalangle MCD+\sphericalangle DCF&=\sphericalangle MBD+2\sphericalangle DCX=\\&=\sphericalangle MBD+2\sphericalangle CBA=\sphericalangle ABD+\sphericalangle MBA=\\&=\sphericalangle ABE+\sphericalangle MBA.\end{aligned}$$

Wobec tego $\sphericalangle MCF=\sphericalangle MBE$. Ponadto $MC=MB$ oraz $CF=BE$, zatem trójkąty MCF i MBE są przystające, na mocy cechy bok–kąt–bok. Stąd wniosek, że $MF=ME$. Skoro zaś $AF=AE$, to punkty A i M leżą na symetralnej odcinka EF. Wobec tego AM jest dwusieczną kąta EAF i w konsekwencji

$$\sphericalangle MAF=\tfrac{1}{2}\sphericalangle EAF.$$



rys. 7

Z drugiej strony, punkty E i F są obrazami symetrycznymi punktu D odpowiednio względem prostych AB i AC, a więc

$$\sphericalangle BAD=\tfrac{1}{2}\sphericalangle EAD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle DAC=\tfrac{1}{2}\sphericalangle DAF.$$

Po dodaniu tych równości stronami otrzymujemy

$$\sphericalangle BAC=\tfrac{1}{2}\sphericalangle EAF.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\sphericalangle BAD&=\sphericalangle BAC-\sphericalangle DAC=\\&=\sphericalangle MAF-\sphericalangle CAF=\sphericalangle MAC,\end{aligned}$$

co było do wykazania.

Czytelnikom proponujemy samodzielne rozwiązanie poniższych dwóch zadań, które są bardzo zbliżone do zaprezentowanych lematów.

Zadanie 4.

Okrąg dopisany do trójkąta ABC jest styczny do boku BC w punkcie E. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkt M jest środkiem odcinka BC. Udowodnij, że proste AE i IM są równoległe.

Zadanie 5.

Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o, przy czym $\sphericalangle A>90^\circ$. Punkt D jest punktem przecięcia stycznych do okręgu o w punktach B i C. Punkt M jest środkiem odcinka BC. Wykaż, że

$$\sphericalangle BAD+\sphericalangle MAC=180^\circ.$$

Tomasz Cieśla

Wzór (na) wirtuoza

Konkurs Chopinowski to jeden z najbardziej elitarnych konkursów muzycznych; odbywa się w Polsce co pięć lat, gromadząc setki pianistów z całego świata, rywalizujących nie tylko o wymierne nagrody pieniężne oraz kontrakty z największymi wytwórniami płytowymi, lecz przede wszystkim o ogromny prestiż związany z otrzymaniem tytułu laureata. Samo dopuszczenie do uczestnictwa poprzedzone jest nie tylko eliminacjami, lecz nawet kwalifikacją do eliminacji — spośród około 450 kandydatów, w kwietniowych eliminacjach do tegorocznej edycji udział weźmie jedynie 160. Wśród nich znajduje się 17-letni licealista z Gdańska, Piotr Pawlak, który od kilku lat figuruje również na listach laureatów kolejnych olimpiad matematycznych — najpierw OMG (gimnazjalistów), następnie OM (licealistów), by ostatecznie z sukcesem reprezentować Polskę na zawodach międzynarodowych, takich jak Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna (w 2014 r. brązowy medal), czy turniej Romanian Masters (w 2015 r. srebrny medal). W rozmowie z redaktorem *Kwadratu* Piotrek opowiada o rozwijaniu swoich zdolności, matematyczno-muzycznych refleksjach i planach na przyszłość.

Łukasz Rajkowski: Co było pierwsze w Twoim życiu, muzyka czy matematyka?

Piotr Pawlak: Zdaje się, że muzyka. Pierwsze ślady muzykalności pojawiły się u mnie w wieku 3-4 lat. U mojego dziadka stał fortepian, który służył głównie jako podstawka do wina. Zacząłem się nim interesować od strony zgodnej z jego przeznaczeniem — próbowałem na nim grać, z ciekawością zaglądałem pod pokrywę by sprawdzić, w jaki sposób wydobywany jest dźwięk. Rodzice zorientowali się w moich zainteresowaniach i zorganizowali mi keyboard, a następnie posłali do ogniska muzycznego. Nie wiązali z tym większych nadziei, gdyż nikt w mojej bliskiej rodzinie nie ma wykształcenia muzycznego, wobec czego brakowało im „punktu odniesienia”, względem którego można by było ocenić moje zdolności. Dopiero pani z ogniska muzycznego zasugerowała zapisanie mnie do szkoły muzycznej, do czego rodzice początkowo nie byli przekonani — w naszej rodzinie dominuje wykształcenie inżynierskie i sam dziadek, w którego domu stał fortepian, był zdania, że *muzyk to nie zawód*. Czynnikiem, który zadecydował o posłaniu mnie do ogólnokształcącej szkoły muzycznej zamiast do przynależnej mi „rejonówki” była... bardzo miła wychowawczyni w szkole muzycznej. Moje kształcenie w tym kierunku rozpoczęło się więc niejako przez przypadek; podejrzewam z kolei, że matematyką zainteresowałbym się niezależnie od wybranej placówki — moja mama skończyła studia matematyczne, a mój tata informatyczne, więc zapewne i tak dopomogliby losowi w tym zakresie.

ŁR: Czy ciężko jest łączyć te dwie ścieżki? W Twoim planie jest miejsce na czas wolny?

PP: Na czas wolny zawsze znajdzie się u mnie miejsce (*śmiech*). W związku ze zbliżającymi się eliminacjami staram się jednak ćwiczyć coraz więcej; w tej chwili są to 2-3 godziny dziennie i pilnuję, by nie było żadnych odstępstw od tego planu. Jedynym wyjątkiem są tradycyjne, dwutygodniowe wakacje z rodzicami — całe szczęście, że jest to wyjazd rowerowy, dzięki temu nawet nie mam możliwości zabrania ze sobą instrumentu. Nawet na obozy olimpijskie przywożę ze sobą keyboard, by choć poruszać palcami na klawiaturze. Wiąże się z tym zresztą pewna zabawna sytuacja — podczas jednego z obozów OMG w Perzanowie ulokowani byliśmy w drewnianym domku, w którym niesamowicie nosił się dźwięk. Oczywiście, z tego względu podczas ćwiczenia podłączałem do keyboardu słuchawki. Pewnego wieczoru jednak zeszli do mnie mieszkańcy jednego z pokojów i poprosili o zaprzestanie prób, gdyż stukot klawiszy nie pozwalał im zasnąć. Strach pomyśleć, co by było, gdybym nie korzystał ze słuchawek...

ŁR: Powiedz, czy wobec tak wielkiej ilości czasu potrzebnego na ćwiczenie, zastanawiałeś się kiedyś nad wyborem między muzyką a matematyką?

PP: Będę starał się ciągnąć obie te rzeczy tak długo, jak się da i na razie nie myślę o ewentualnym wyborze. Odnośnie mojej przyszłej uczelni, to już teraz uczęszczam na niektóre zajęcia na Wydział Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, z drugiej strony od pewnego czasu mam lekcje u profesora Waldemara Wojtala z Akademii Muzycznej w Gdańsku, z którym świetnie mi się pracuje, więc być może nawet na etapie akademickim będę w stanie jednocześnie rozwijać moje zainteresowania.

ŁR: Niektórzy twierdzą, że zdolności matematyczne i muzyczne są ze sobą ściśle powiązane. Podpisałbyś się pod takim stwierdzeniem?

PP: Cóż... na pewno *jakiś* związek istnieje. W moim przypadku jest on raczej jednostronny — wydaje mi się, że to raczej matematyka pomaga mi w muzyce, niż odwrotnie. Od pewnego czasu uczęszczam na zajęcia z kompozycji i kiedy mam na przykład stworzyć jakieś kształtowanie lub rozłożyć kulminacje, moje analityczne zdolności wydają się to ułatwiać — nie jest to oczywiście zaawansowana matematyka, jednak pewne uporządkowanie myśli przy rozważaniu dostępnych możliwości jest bardzo pomocne. Dotyczy to również kwestii wykonywania utworów — niektórzy pianiści zdają się wówczas jedynie na swoją intuicję, ja natomiast wolę najpierw na spokojnie sobie rzecz przemyśleć i rozsądnie porozkładać akcenty w całym utworze. Mam wrażenie, że poszerza to moje pole manewru w kwestii interpretacji dzieła. Jest też niestety ciemna strona medalu. Zdarza mi się na przykład, że jeśli przez długi czas nie mogę rozwiązać jakiegoś zadania i przychodzi czas na ćwiczenie, mam niemałą trudność ze skoncentrowaniem się na muzyce i gdzieś tam z tyłu głowy wciąż zajmuję się nierozstrzygniętym problemem. Dlatego przed każdym koncertem robię sobie co najmniej pół dnia przerwy od matematyki.

ŁR: Co doradziłbyś gimnazjaliście chcącemu podążać Twoimi olimpijskimi śladami?

PP: Wiem, że to nie jest moja zasługa; dostałem pewne zdolności „z góry" i cieszę się, że mogę je rozwijać. Oczywiście, jest to również kwestia mojej pracy, jeśli jednak po prostu *chce* się coś robić, z pewnością praca nad tym jest o wiele łatwiejsza. Wystrzegałbym się jednak również pewnej przesady — przykładowo, jeśli ktoś próbuje rozwiązać zadanie konkursowe poprzez dopasowanie go do jednego z setek sposobów i problemów, jakie wcześniej godzinami przerabiał, wówczas... kto wie, może i nawet uda mu się coś wygrać, jednak wydaje się, że w ten sposób umyka mu coś ważnego...

ŁR: Jak opisałbyś rolę OMG w swoim matematycznym rozwoju?

PP: Dopiero na Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów zetknąłem się z problemami, które wymagały niestandardowego podejścia do zadań i nieszablonowego myślenia. Pamiętam, że podczas pierwszej OMG, w której brałem udział, na początku byłem przybity faktem, że na części korespondencyjnej zrobiłem tylko 5 z 7 zadań, a już z drugiego etapu wyszedłem zupełnie załamany, gdyż całkowicie zrobiłem jedynie dwa zadania i „ruszyłem" pewne dwa inne. Nie wiedziałem wówczas, że taka jest specyfika tych zawodów — każde z prezentowanych zadań wymaga osobnego, nietrywialnego pomysłu i mój „słaby" wynik okazał się wystarczająco dobry, abym został dopuszczony do finału. Tam z kolei udało mi się rozwiązać 4 zadania, dzięki czemu zaproszono mnie na obóz olimpijski do Perzanowa i myślę, że bez tego obozu nie byłbym ostatnio na Romanian Masters i nie byłbym wcześniej na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej, gdyż dopiero w Perzanowie miałem styczność z taką „porządną" matematyką i nauczyłem się wielu metod rozwiązywania zadań olimpijskich. Ponadto poznałem tam ludzi o podobnych zainteresowaniach i niektóre z tych znajomości przerodziły się w przyjaźnie, które szczęśliwie przetrwały do dziś.

ŁR: Eliminacje do Konkursu Chopinowskiego już w drugiej połowie kwietnia. Uczniom życzy się przed konkursem „połamania pióra", czego należy życzyć pianiście?

PP: Podobnie, bo połamania palców.

ŁR: Połamania palców zatem — trzymam kciuki, byśmy mogli usłyszeć Cię w październiku na koncercie laureatów. Dzięki za rozmowę i powodzenia!

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

O łukach równej długości

5. Zauważ, że na czworokącie $ADOB$ można opisać okrąg i skorzystaj z twierdzenia 1.

6. Z równości kątów wywnioskuj równość łuków i skorzystaj z twierdzenia 2.

7. Uzasadnij, że punkty A_2, B_2, C_2 są środkami pewnych łuków okręgu wpisanego w trójkąt ABC i skorzystaj z twierdzenia 1.

8. Korzystając z równości kątów opartych na odpowiednich łukach, uzasadnij, że punkty D i E są symetryczne względem prostej BC.

9. Z danych równoległości wywnioskuj odpowiednie równości łuków. Następnie skorzystaj z twierdzenia 2.

Zmagania z ułamkami

5. Skorzystaj z algorytmu Euklidesa.

6. Uzasadnij, że jeśli liczba p^2+q^2 jest podzielna przez $p+q$, to także liczba $2pq$ jest podzielna przez $p+q$. Następnie doprowadź do sprzeczności, korzystając z algorytmu Euklidesa oraz twierdzenia 2.

7. Postępuj podobnie do rozwiązania zadania 3.

8. Uzasadnij, że jeśli p jest dzielnikiem pierwszym obu liczb $a+b$ oraz a^2+ab+b^2, to p jest także dzielnikiem liczby ab. Wywnioskuj stąd dalej, że p jest wspólnym dzielnikiem liczb a i b.

„Kwadrat" redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk. Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 2000 egz.

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Nr 16
lipiec 2015
ISSN 2300-0708

Bliźniacze zadania

Zadania geometryczne często występują w kilku zbliżonych do siebie wersjach. Umiejętność przeformułowania zadania z jednej wersji do drugiej może być niekiedy kluczem do rozwiązania problemu. W „bliźniaczej” konfiguracji zauważenie równych kątów, odcinków lub innych istotnych zależności może być łatwiejsze i nasunąć pomysł na rozwiązanie właściwego zadania.

Poniżej zebraliśmy kilka przykładów bliźniaczych zadań. Zadania o numerach nieparzystych to proste i znane konfiguracje. Następujące po nich zadania o numerach parzystych to ich modyfikacje, które wydają się już trudniejsze. Zobaczymy jednak, że rozwiązania tych zadań przebiegają niemalże identycznie, jak w przypadku ich łatwiejszych odpowiedników.

Poniższe przykłady warto również poznać z tego powodu, że są one często pomocne przy rozwiązywaniu innych, trudniejszych geometrycznych problemów.

Zadanie 1.

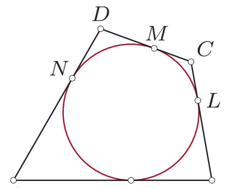
W czworokąt wypukły $ABCD$ wpisano okrąg. Udowodnij, że $AB+CD=BC+AD$.

Rozwiązanie

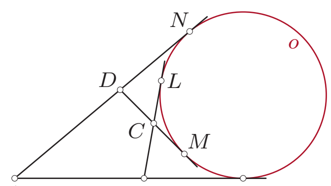
Oznaczmy punkty styczności okręgu odpowiednio z bokami AB, BC, CD, DA przez K, L, M, N (rys. 1). Ponieważ odcinki styczne do okręgu poprowadzone z jednego punktu są równej długości, więc $AK=AN$, $BK=BL$, $CM=CL$ oraz $DM=DN$. Zatem

$$\begin{aligned} AB+CD &= AK+BK+CM+DM= \\ &= BL+CL+AN+DN= \\ &= BC+AD, \end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 1



rys. 2

Zadanie 2.

Dany jest czworokąt $ABCD$. Okrąg o jest styczny do prostych AB, BC, CD, DA w sposób przedstawiony na rysunku 2. Udowodnij, że $AB+BC=AD+CD$.

Rozwiązanie

Oznaczmy punkty styczności okręgu o odpowiednio z prostymi AB, BC, CD, AD przez K, L, M, N. Wówczas spełnione są następujące równości: $AK=AN$, $BK=BL$, $CL=CM$ oraz $DM=DN$. Stąd uzyskujemy zależności

$$\begin{aligned} AB+BC &= AK-BK+BL-CL= \\ &= AK-CL=AN-CM= \\ &= AN-DN+DM-CM= \\ &= AD+CD. \end{aligned}$$

To kończy dowód.

Zadanie 3.

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Udowodnij, że

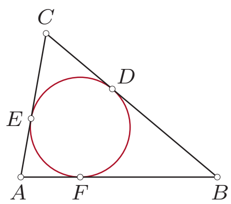
$$BD=\frac{1}{2}(AB+BC-AC).$$

Rozwiązanie

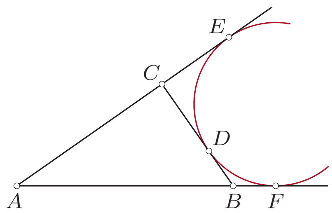
Niech E i F będą punktami styczności okręgu odpowiednio z bokami AC i AB (rys. 3). Wówczas spełnione są równości $AE=AF$, $BD=BF$ oraz $CD=CE$. Zatem

$$\begin{aligned} 2BD &= BD+BF= \\ &= BC-CD+AB-AF= \\ &= AB+BC-CE-AE= \\ &= AB+BC-AC. \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony przez 2, uzyskujemy tezę.



rys. 3



rys. 4

Zadanie 4.

Okrąg dopisany do trójkąta ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Udowodnij, że

$$CD=\frac{1}{2}(AB+BC-AC).$$

Rozwiązanie

Niech E i F będą punktami styczności danego okręgu odpowiednio z prostymi AC i AB (rys. 4). Wówczas $AE=AF$, $BD=BF$ oraz $CD=CE$. Wobec tego

$$\begin{aligned} 2CD &= CD+CE= \\ &= BC-BD+AE-AC= \\ &= AF-BF+BC-AC= \\ &= AB+BC-AC. \end{aligned}$$

Po podzieleniu obu stron uzyskanej zależności przez 2, otrzymujemy tezę.

W dalszej części artykułu będziemy przez $[\mathcal{F}]$ oznaczać pole figury $\mathcal{F}$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Zadanie 5.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt wynosi r. Udowodnij, że

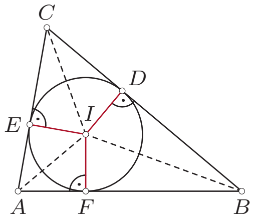
$$[ABC]=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r\,.$$

Rozwiązanie

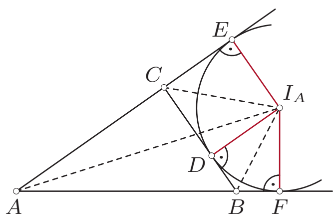
Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC (rys. 5). Wysokości trójkątów BCI, CAI i ABI opuszczone na boki BC, CA, AB są równe r. Wobec tego $[BCI]=\frac{1}{2}ar$, $[CAI]=\frac{1}{2}br$ oraz $[ABI]=\frac{1}{2}cr$. Stąd otrzymujemy

$$[ABC]=[BCI]+[CAI]+[ABI]=$$
$$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 5



rys. 6

Zadanie 6.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. Promień okręgu dopisanego do tego trójkąta i stycznego do boku BC wynosi r_A. Udowodnij, że

$$[ABC]=\frac{1}{2}(b+c-a)\cdot r_A\,.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez I_A środek okręgu dopisanego do trójkąta ABC, stycznego do boku BC (rys. 6). Podobnie jak poprzednio, wysokości trójkątów CAI_A, ABI_A i BCI_A opuszczone na boki CA, AB i BC są równe r_A. Wobec tego $[CAI_A]=\frac{1}{2}br_A$, $[ABI_A]=\frac{1}{2}cr_A$ oraz $[BCI_A]=\frac{1}{2}ar_A$. Stąd uzyskujemy

$$[ABC]=[CAI_A]+[ABI_A]-[BCI_A]=$$
$$=\frac{1}{2}br_A+\frac{1}{2}cr_A-\frac{1}{2}ar_A=\frac{1}{2}(b+c-a)\cdot r_A\,,$$

co kończy dowód.

Zadanie 7.

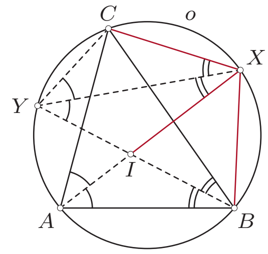
Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Punkt X jest środkiem tego łuku BC okręgu o, który nie zawiera punktu A. Udowodnij, że $XB=XC=XI$.

Rozwiązanie

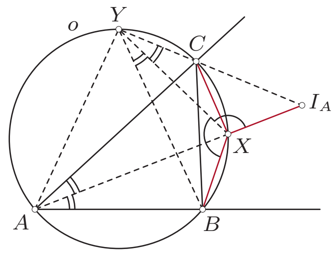
Ponieważ odpowiednie łuki BX i XC są równej długości, więc cięciwy BX i XC wyznaczone przez końce tych łuków są także równej długości. Pozostaje zatem wykazać, że $XC=XI$.

Oznaczmy przez Y środek tego łuku AC okręgu o, który nie zawiera punktu B (rys. 7). Wówczas półproste AX i BY są odpowiednio dwusiecznymi kątów BAC oraz CBA — przecinają się więc w punkcie I.

Ponieważ punkt X jest środkiem łuku BC, więc kąty BYX i XYC są wpisane oparte na łukach tej samej długości. Wobec tego $\sphericalangle IYX=\sphericalangle XYC$. Analogicznie $\sphericalangle IXY=\sphericalangle YXC$. Ponadto trójkąty IXY oraz CXY mają wspólny bok XY, więc są one przystające na mocy cechy kąt–bok–kąt. Zatem $XI=XC$.



rys. 7



rys. 8

Zadanie 8.

Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o. Punkt I_A jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta, stycznego do boku BC. Punkt X jest środkiem tego łuku BC okręgu o, który nie zawiera punktu A. Wykaż, że $XB=XC=XI_A$.

Rozwiązanie

Równość $XB=XC$ uzasadniamy tak, jak w poprzednim zadaniu. Pozostaje dowieść, że $XB=XI_A$. Zależność tę wykażemy przy założeniu, że $AC>BC$.

Oznaczmy przez Y środek tego łuku AB, który zawiera punkt C (rys. 8). Wówczas $AY=BY$, skąd wniosek, że $\sphericalangle BAY=90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle AYB$. A zatem

$$\sphericalangle BCI_A=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\sphericalangle ACB)=90^\circ-\tfrac{1}{2}\sphericalangle ACB=$$
$$=90^\circ-\tfrac{1}{2}\sphericalangle AYB=\sphericalangle BAY=180^\circ-\sphericalangle YCB\,.$$

Wobec tego prosta CY przechodzi przez punkt I_A. Punkt I_A leży również na prostej AX, gdyż zawiera ona dwusieczną kąta BAC.

Zauważmy też, że

$$\sphericalangle XYI_A=\sphericalangle XYC=\sphericalangle XAC=\sphericalangle XAB=\sphericalangle BYX$$

oraz

$$\sphericalangle I_AXY=180^\circ-\sphericalangle YXA=180^\circ-\sphericalangle YBA=$$
$$=180^\circ-\sphericalangle BAY=\sphericalangle BXY\,.$$

Ponadto trójkąty I_AXY i BXY mają wspólny bok XY. W myśl cechy przystawania kąt–bok–kąt oznacza to, że trójkąty I_AXY i BXY są przystające. Stąd wniosek, że $XI_A=XB$. To kończy dowód.

Rozwiązując zadania, należy zwrócić szczególną uwagę na to, czy rozumowanie jest poprawne we wszystkich możliwych konfiguracjach. Przykładowo, wyżej zaprezentowane rozwiązanie zadania 8 wymagałoby wprowadzenia pewnych zmian, jeśli trójkąt ABC spełniałby warunek $AC\leqslant BC$. Zachęcamy Czytelnika do przeprowadzenia rozumowania w tym bliźniaczym przypadku.

Na koniec proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 9.

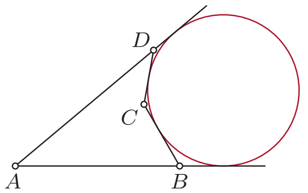
Dany jest okrąg o oraz punkt P nieleżący na nim. Proste k, l przechodzące przez P przecinają okrąg o odpowiednio w punktach A, B oraz C, D. Udowodnij, że $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

Zadanie 10.

Punkt P leży na zewnątrz okręgu o. Punkty A, B, C leżą na okręgu o, przy czym A leży na odcinku PB, a prosta PC jest styczna do okręgu o. Udowodnij, że $PA\cdot PB=PC^2$.

Zadanie 11.

Dany jest czworokąt $ABCD$. Okrąg o jest styczny do prostych AB, BC, CD, DA tak, jak pokazano na rysunku 9. Udowodnij, że $AB+BC=AD+DC$.



rys. 9

Zadanie 12.

Promień sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ ma długość r. Wykaż, że objętość V tego czworościanu wyraża się wzorem

$$V=\frac{1}{3}([ABC]+[BCD]+[CDA]+[DAB])\cdot r\,.$$

Zadanie 13.

Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o. Punkt I_A jest środkiem okręgu dopisanego do tego trójkąta, stycznego do boku BC. Punkt Y jest środkiem tego łuku AB okręgu o, który zawiera punkt C. Wykaż, że

$$YA=YB=YI_A\,.$$

Tomasz Cieśla

Tożsamość Sophie Germain

Marie-Sophie Germain żyła w latach 1776–1831 we Francji. Jest to jedna z najsłynniejszych kobiecych twarzy w historii matematyki. Pamiętamy ją między innymi ze względu na jej osiągnięcia w dziedzinach teorii sprężystości i teorii liczb. Szczególnie dużo wniosła do historii zmagań ze słynnym Wielkim Twierdzeniem Fermata. W teorii liczb istnieje pojęcie *liczby pierwszej Sophie Germain*, czyli takiej liczby pierwszej p, dla której liczba $2p+1$ także jest pierwsza. Do dzisiaj nierozstrzygnięty jest problem, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych Sophie Germain.

Uczestnicy olimpiad i konkursów matematycznych mogą kojarzyć jej nazwisko z jeszcze innego powodu. Chodzi o tak zwaną *tożsamość Sophie Germain*, która podaje rozkład wyrażenia x^4+4y^4 na iloczyn dwóch czynników. W nietrudny sposób można go wyprowadzić ze wzoru na różnicę dwóch kwadratów. Mamy bowiem

$$\begin{aligned}x^4+4y^4&=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2=\\&=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=\\&=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2)\,.\end{aligned}$$

W praktyce często warto również iść o krok dalej, zapisując mniejszy z czynników jako

$$x^2-2xy+2y^2=(x-y)^2+y^2.$$

Świadomość faktu, iż wyrażenie x^4+4y^4 można przedstawić w postaci iloczynu, jest często bardzo użyteczna podczas rozwiązywania zadań konkursowych. Zobaczmy to na przykładach.

Zadanie 1.

Dana jest liczba naturalna $n>1$. Udowodnij, że liczba n^4+4^n jest złożona.

Rozwiązanie

Jeżeli liczba n jest parzysta, to liczba n^4+4^n również jest parzysta i oczywiście większa niż 2. Jest więc liczbą złożoną. Załóżmy zatem, że $n=2k+1$ dla pewnej liczby całkowitej $k\geqslant 1$. Wtedy

$$n^4+4^n=n^4+4^{2k+1}=n^4+4\cdot 2^{4k}.$$

Stosując tożsamość Sophie Germain dla $x=n$ oraz $y=2^k$, dostajemy

$$n^4+4^n=(n^2-2^{k+1}n+2^{2k+1})(n^2+2^{k+1}n+2^{2k+1}).$$

Znaleźliśmy w ten sposób rozkład liczby n^4+4^n na iloczyn dwóch czynników. Musimy jeszcze sprawdzić, czy jest to rozkład nietrywialny, co sprowadza się do pytania, czy mniejszy z czynników jest większy od 1. Tak jest w istocie, gdyż

$$n^2-2^{k+1}n+2^{2k+1}=(n-2^k)^2+2^{2k}\geqslant 0+2^2=4\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.

Udowodnij, że liczba $3^{4^5}+4^{5^6}$ może być zapisana w postaci iloczynu dwóch liczb naturalnych, z których każda posiada więcej niż 2015 cyfr w zapisie dziesiętnym.

Rozwiązanie

Zauważmy na początek, że

$$\frac{5^6-1}{4}=\frac{(5^3-1)(5^3+1)}{4}=\frac{124\cdot 126}{4}=31\cdot 126.$$

Niech $x=3^{4^4}$ oraz $y=4^{\frac{5^6-1}{4}}=4^{31\cdot 126}$. Wówczas

$$x^4+4y^4=(3^{4^4})^4+4\cdot(4^{\frac{5^6-1}{4}})^4=3^{4^5}+4^{5^6}.$$

Widzimy zatem, że z tak dobranymi x i y wyrażenie dane w zadaniu da się zapisać w postaci x^4+4y^4. Możemy więc zastosować tożsamość Sophie Germain, aby otrzymać

$$3^{4^5}+4^{5^6}=x^4+4y^4=(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2).$$

Wystarczy udowodnić, że pierwszy z czynników posiada więcej niż 2015 cyfr, gdyż drugi czynnik jest w oczywisty sposób większy od pierwszego. Innymi słowy, zadanie zostało sprowadzone do wykazania nierówności

$$x^2-2xy+2y^2\geqslant 10^{2015}.$$

Ale

$$x^2-2xy+2y^2=(x-y)^2+y^2\geqslant y^2=4^{62\cdot 126}.$$

Pozostaje zauważyć, że

$$4^2=16>10,$$

a więc również

$$4^{62\cdot 126}=(4^2)^{31\cdot 126}>10^{31\cdot 126}=10^{3906}>10^{2015}.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

W kolejnym zadaniu wykorzystamy pewien zwięzły sposób zapisywania sumy dużej liczby składników: sumę $a_1+a_2+\ldots+a_n$ liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ często zapisujemy w postaci

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\,.$$

Napis ten rozszyfrowujemy następująco: wszędzie tam, gdzie znajduje się litera k po prawej stronie znaku $\sum$, wstawiamy po kolei liczby naturalne, zaczynając od $k=1$, a kończąc na $k=n$, po czym uzyskanych n liczb sumujemy. Zatem na przykład

$$\sum_{k=1}^{100}k\cdot 7^k$$

oznacza sumę 100 składników:

$$1\cdot 7^1+2\cdot 7^2+3\cdot 7^3+\ldots+100\cdot 7^{100}.$$

Zadanie 3.

Wyznacz wartość sumy

$$\sum_{k=1}^{2015}\frac{4k}{4k^4+1}.$$

Rozwiązanie

Korzystając z tożsamości Sophie Germain dla wyrażenia $4k^4+1$, dostajemy

$$\sum_{k=1}^{2015}\frac{4k}{4k^4+1}=\sum_{k=1}^{2015}\frac{(2k^2+2k+1)-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)}=$$
$$=\sum_{k=1}^{2015}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2k^2+2k+1}\right).$$

Otrzymaliśmy więc sumę 2015 różnic dwóch składników. Zauważmy jednak, że $2k^2+2k+1=2(k+1)^2-2(k+1)+1$. Oznacza to, że składnik, który jest odejmowany w danym nawiasie, jest jednocześnie dodawany w następnym. A zatem

$$\sum_{k=1}^{2015}\frac{4k}{4k^4+1}=\sum_{k=1}^{2015}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2k^2+2k+1}\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{2015}\left(\frac{1}{2k^2-2k+1}-\frac{1}{2(k+1)^2-2(k+1)+1}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\cdot 1^2-2\cdot 1+1}-\frac{1}{2\cdot 2016^2-2\cdot 2016+1}=\frac{8\,124\,480}{8\,124\,481},$$

gdyż pozostałe składniki sumy skracają się.

Wszystkie przedstawione do tej pory przykłady opierały się na odkryciu, jak dane w zadaniu wyrażenie można przedstawić w postaci x^4+4y^4. Tożsamość Sophie Germain można jednak stosować również bardziej kreatywnie.

Zadanie 4.

Wykaż, że dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n wszystkie dzielniki pierwsze liczby n^2+1 są mniejsze od n.

Rozwiązanie

Liczba n^2+1 nie musi dać się zapisać w postaci x^4+4y^4. Tutaj mamy jednak dowolność wyboru n, dobierzmy je więc tak, aby taki zapis był możliwy. Przyjmijmy $n=2m^2$ dla pewnej liczby naturalnej $m>1$. Na mocy tożsamości Sophie Germain mamy wówczas

$$n^2+1=4m^4+1=(2m^2-2m+1)(2m^2+2m+1).$$

Pierwszy z czynników jest mniejszy od $n=2m^2$, a więc również wszystkie jego dzielniki pierwsze są mniejsze od n. Jeżeli drugi czynnik byłby liczbą złożoną, to żaden jego dzielnik pierwszy nie przekraczałby połowy tej liczby. Każdy byłby więc nie większy od

$$\frac{1}{2}(2m^2+2m+1)=m^2+m+\frac{1}{2}<2m^2=n.$$

Wystarczy zatem znaleźć nieskończenie wiele liczb naturalnych m, dla których liczba $2m^2+2m+1$ jest złożona i wówczas zadanie zostanie rozwiązane.

Zauważmy, że jeżeli liczba m daje resztę 1 z dzielenia przez 5, to

$$2m^2+2m+1\equiv 2+2+1\equiv 0 \pmod 5,$$

co oznacza, że liczba $2m^2+2m+1$ dzieli się przez 5. Skoro $m>1$, to jest ona większa niż 5, a więc jest to liczba złożona.

Ostatecznie, dla każdego $k\geqslant 1$ liczba $n=2(5k+1)^2$ spełnia warunki zadania. Kończy to dowód, gdyż liczb tej postaci jest nieskończenie wiele.

Na koniec proponujemy kilka zadań, w których Czytelnicy mogą samodzielnie spróbować odnaleźć tożsamość Sophie Germain.

Zadanie 5.

Udowodnij, że liczba $2^{10}+5^{12}$ jest złożona.

Zadanie 6.

Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich a, które posiadają następującą własność: dla dowolnej liczby naturalnej n liczba n^4+a jest złożona.

Zadanie 7.

Oblicz wartość iloczynu

$$\frac{(1^4+\frac{1}{4})(3^4+\frac{1}{4})(5^4+\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(11^4+\frac{1}{4})}{(2^4+\frac{1}{4})(4^4+\frac{1}{4})(6^4+\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(12^4+\frac{1}{4})}.$$

Zadanie 8.

Wykaż, że liczba $3^{2008}+4^{2009}$ może być zapisana w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych dodatnich, z których każda jest większa od 2015^{182}.

Tomasz Kobos

Podwojenie sukcesu

Jest nam niezmiernie miło poinformować, że Piotr Pawlak, kilkukrotny laureat OMG, z którym wywiad zamieściliśmy w poprzednim numerze *Kwadratu*, zakwalifikował się do XVII Międzynarodowego Konkursu Pianistycznego im. Fryderyka Chopina. W październikowych zawodach Piotr rywalizować będzie z 83 najwybitniejszymi młodymi pianistami z całego świata. Wcześniej, bo w lipcu, będzie on reprezentować Polskę na LVI Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Tajlandii. Obu sukcesów serdecznie gratulujemy i życzymy podwójnego połamania — długopisu w Tajlandii i palców w Warszawie!

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Wiatraczek

5". *Odpowiedź:* Tak. Oznacz na odcinku AB takie punkty K, F, a na odcinku AC taki punkt L, że

$$\frac{AF}{BF}=\frac{1}{2}\quad\text{oraz}\quad\frac{BK}{AK}=\frac{CL}{AL}=\frac{1}{3}.$$

Następnie zdefiniuj P jako punkt przecięcia prostych KL i CF. Uzasadnij, że dla tak wybranego punktu P trójkąty AFP i BDP mają równe pola.

6. Korzystając z zadania **5'**, uzasadnij, że co najmniej jeden z punktów przecięcia prostych AP, BP, CP, DP z przeciwległymi ścianami jest środkiem ciężkości ściany. Następnie zauważ, że wówczas 24 małe czworościany łączą się w szóstki czworościanów o równych objętościach, a 9 nie jest wielokrotnością liczby 6.

„Kwadrat" redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk. Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 2000 egz.

Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Nr 17
luty 2016

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

ISSN 2300-0708

O pożytku z pola

Pojęcie pola figury pojawia się w zadaniach geometrycznych dosyć często. Zazwyczaj chodzi o to, by obliczyć pole jakiejś figury bądź udowodnić pewną zależność wiążącą pola wskazanych figur. Tymczasem okazuje się, że pojęcie pola można wykorzystać także wtedy, gdy w zadaniu się o nim nie mówi. Popatrzmy na kilka przykładów. Pierwszy z nich to modyfikacja zadania 7 z części testowej zawodów I stopnia VII OMG.

Zadanie 1.

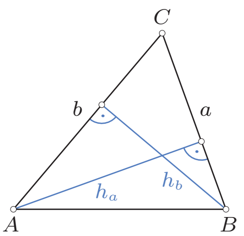
W trójkącie ABC wysokości poprowadzone z wierzchołków A i B są równe. Udowodnij, że $AC=BC$.

Rozwiązanie

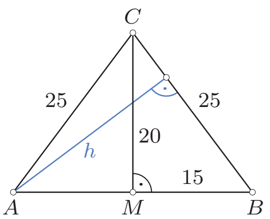
Oznaczmy wysokości trójkąta ABC poprowadzone z wierzchołków A i B odpowiednio przez h_a i h_b oraz niech $BC=a$ i $AC=b$ (rys. 1). Zapisując pole S trójkąta ABC na dwa sposoby, dostajemy równość

$$\frac{1}{2}ah_a=S=\frac{1}{2}bh_b.$$

Skoro więc $h_a=h_b$, to $a=b$, czyli $AC=BC$, co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 1



rys. 2

Zadanie 2.

Czy istnieje trójkąt, którego wysokości mają długości równe odpowiednio 1, 2 i 3? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Wykażemy, że taki trójkąt nie istnieje. W dowodzie znów wygodnie będzie posłużyć się polem.

Przypuśćmy, że taki trójkąt istnieje i oznaczmy przez a, b i c długości jego boków, do których zostały poprowadzone wysokości odpowiednio równe 1, 2 i 3. Zapisując pole danego trójkąta na trzy sposoby, dostajemy

$$\frac{1}{2}a\cdot 1=\frac{1}{2}b\cdot 2=\frac{1}{2}c\cdot 3.$$

Możemy stąd wyznaczyć długości b i c w zależności od a: $b=\frac{1}{2}a$, $c=\frac{1}{3}a$. Jednak wtedy

$$b+c=\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a=\frac{5}{6}a<a,$$

co przeczy nierówności trójkąta. Stąd wniosek, że trójkąt o podanych wysokościach istnieć nie może. Rozwiązanie zadania jest więc zakończone.

Zadanie 3. (VIII OMG, zawody II stopnia)

Czy istnieje taki trójkąt ostrokątny, w którym długości wszystkich boków i wszystkich wysokości są liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Tym razem wykażemy, że taki trójkąt istnieje.

Rozważmy trójkąt prostokątny MBC o przyprostokątnych BM i CM, których długości wynoszą odpowiednio 15 i 20 (rys. 2). Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy

$$BC=\sqrt{15^2+20^2}=25.$$

Niech A będzie punktem symetrycznym do punktu B względem prostej CM. Udowodnimy, że trójkąt ABC spełnia warunki zadania.

Długości boków trójkąta ABC są liczbami całkowitymi. Również długość wysokości CM jest liczbą całkowitą. Ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny ($AC=BC$), więc pozostałe dwie wysokości tego trójkąta są równe. Oznaczmy je przez h. Obliczając na dwa sposoby pole S trójkąta ABC, uzyskujemy

$$\frac{AB\cdot CM}{2}=S=\frac{BC\cdot h}{2},$$

skąd

$$h=\frac{AB\cdot CM}{BC}=\frac{30\cdot 20}{25}=24.$$

Pozostaje uzasadnić, że trójkąt ABC jest ostrokątny. Ponieważ trójkąt MBC jest prostokątny, więc $\sphericalangle CBM<90^\circ$, a zatem kąty CBA i CAB są ostre.

Ponadto, przyprostokątna BM trójkąta MBC jest krótsza od przyprostokątnej CM. Wobec tego otrzymujemy $\sphericalangle BCM<\sphericalangle CBM$, skąd wynika, że $\sphericalangle BCM<45^\circ$, czyli $\sphericalangle ACB=2\cdot\sphericalangle BCM<90^\circ$. To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 4.

Niech r oznacza długość promienia okręgu wpisanego w pewien trójkąt, natomiast h_a, h_b i h_c — długości wysokości tego trójkąta. Udowodnij, że

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy przez S pole danego trójkąta. Wówczas

$$S=\frac{1}{2}ah_a,\quad S=\frac{1}{2}bh_b,\quad S=\frac{1}{2}ch_c,$$

skąd uzyskujemy

$$\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S},\quad \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S},\quad \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}.$$

Wobec tego

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+b+c}{2S}.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Z drugiej strony, z zadania 5. artykułu *Bliźniacze zadania* (*Kwadrat* nr 16, lipiec 2015) wiemy, że

$$S = r\cdot\frac{a+b+c}{2},\quad \text{skąd}\quad \frac{1}{r}=\frac{a+b+c}{2S}.$$

Łącząc uzyskane zależności, dostajemy tezę.

W następnym przykładzie użyjemy pola do dowodu tzw. *twierdzenia o dwusiecznej*.

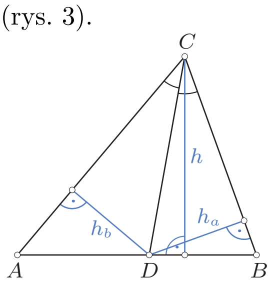
Zadanie 5. (twierdzenie o dwusiecznej)

Dany jest trójkąt ABC. Dwusieczna kąta ACB przecina odcinek AB w punkcie D. Wykaż, że

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}.$$

Rozwiązanie

Niech h_a i h_b będą wysokościami odpowiednio trójkątów BCD i ACD poprowadzonymi z wierzchołka D, natomiast h — wysokością trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka C (rys. 3).



rys. 3

Oznaczmy ponadto przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ. Ponieważ odcinek h jest wspólną wysokością dla trójkątów ABC, ACD i BCD, więc możemy napisać

$$AD\cdot h = 2\cdot[ACD] = AC\cdot h_b$$

oraz

$$BD\cdot h = 2\cdot[BCD] = BC\cdot h_a.$$

Dzieląc stronami pierwszą z tych równości przez drugą, dostajemy

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC\cdot h_b}{BC\cdot h_a}.$$

Wiemy jednak, że punkt D leży na dwusiecznej kąta ACB, skąd wniosek, że jego odległości od prostych AC i BC są równe, czyli $h_a = h_b$. W takim razie

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC},$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Proponujemy teraz kilka zadań dla Czytelników do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 6.

Udowodnij, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego od prostych zawierających jego boki jest stała.

Zadanie 7.

Niech h_a, h_b i h_c będą wysokościami pewnego trójkąta, a r_a — długością promienia okręgu dopisanego, stycznego do tego boku, do którego została poprowadzona wysokość h_a. Udowodnij, że

$$\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}.$$

Zadanie 8.

Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Proste AP, BP i CP przecinają boki BC, CA i AB odpowiednio w punktach A', B' i C'. Wykaż, że

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1.$$

Zadanie 9. (tw. o dwusiecznej kąta zewnętrznego)

Dany jest trójkąt ABC. Dwusieczna kąta zewnętrznego ACB przecina prostą AB w punkcie E. Wykaż, że

$$\frac{AE}{BE}=\frac{AC}{BC}.$$

Michał Kieza

Kolejny sukces Polaków

Między 4 a 16 lipca 2015 r. w Chiang Mai w Tajlandii odbyła się 56. Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna (International Mathematical Olympiad, IMO). Na zawody została wysłana polska reprezentacja, składająca się z sześciu najlepszych uczniów finału LXVI Olimpiady Matematycznej:

- Adam Klukowski (XIV LO w Warszawie);
- Mikołaj Leonarski (XIV LO w Warszawie);
- Konrad Paluszek (XIV LO w Warszawie);
- Piotr Pawlak (Ogólnokształcąca Szkoła Muzyczna w Gdańsku);
- Paweł Piwek (LO im. św. Jadwigi Królowej w Kielcach);
- Mariusz Trela (Gimnazjum nr 52 w Krakowie).

Wszyscy wymienieni uczniowie byli w przeszłości laureatami OMG.

Delegacji przewodniczyli Michał Pilipczuk i Andrzej Grzesik. Warto podkreślić, że IMO to najbardziej prestiżowe zawody matematyczne dla uczniów, o czym świadczy chociażby fakt, że regularnie biorą w nich udział reprezentacje około 100 krajów. W tym roku startowało 577 uczestników ze 104 państw.

Każdego z dwóch dni zawodów uczniowie mieli 4,5 godziny na rozwiązanie trzech zadań. Suma punktów uzyskanych przez danego uczestnika decydowała o jego klasyfikacji w końcowym rankingu i o medalach, natomiast sumy punktów wszystkich zawodników w każdej z reprezentacji przekładały się na nieformalną klasyfikację drużynową. Jury zdecydowało przyznać 39 złotych medali, 100 srebrnych i 143 brązowe.

Wśród Polaków najlepszy wynik uzyskał Adam Klukowski, zdobywając 31 punktów i złoty medal (dało mu to 10. miejsce w klasyfikacji indywidualnej). Mikołaj Leonarski otrzymał 20 punktów i srebrny medal. Pozostali nasi reprezentanci zdobyli medale brązowe — Konrad Paluszek i Mariusz Trela uzyskali po 18 punktów, a Piotr Pawlak i Paweł Piwek po 15 punktów.

Dzięki temu, z wynikiem 117 punktów, Polska uplasowała się na bardzo dobrej 17. pozycji w klasyfikacji drużynowej (do 14. pozycji zabrakło tylko 3 punktów), oraz na 4. pozycji wśród krajów Unii Europejskiej — m.in. przed Wielką Brytanią (22. miejsce, 109 punktów), Niemcami (27. miejsce, 102 punkty), a także Finlandią (82. miejsce, 26 punktów).

Klasyfikację drużynową wygrała reprezentacja USA, wyprzedzając kolejno Chiny, Koreę Południową oraz

Koreę Północną. Indywidualnie szczególnie istotny był sukces Zhuo Qun Songa z Kanady, który uzyskał maksymalny wynik 42 punktów oraz swój piąty złoty medal (w dorobku ma jeszcze jeden brązowy). Tym samym Zhuo Qun Song objął prowadzenie w klasyfikacji indywidualnej wszech czasów jako pierwszy zawodnik z pięcioma złotymi medalami.

Wielkim sukcesem naszej drużyny jest rezultat Adama Klukowskiego, który dzięki rozwiązaniu 4,5 zadania uplasował się w ścisłej światowej czołówce. W ciągu wcześniejszych 20 lat tylko raz Polak był w pierwszej dziesiątce (5. miejsce Przemysława Mazura w 2006 roku). Również warte uwagi jest to, że wszyscy zawodnicy wrócili z medalami. Warto także podkreślić, że polscy uczniowie znakomicie poradzili sobie z geometrycznym zadaniem trzecim. Rozwiązało je tylko 30 uczestników, w tym aż trzech Polaków. Patrząc na wyniki jedynie tego zadania, Polska zajęłaby czwarte miejsce na świecie.

Bardzo dobry rezultat naszej reprezentacji został dostrzeżony przez polskie media i władze. Na warszawskim lotnisku Polacy przywitani zostali m.in. przez wiceminister edukacji narodowej Joannę Berdzik, która wręczyła uczniom pamiątkowe dyplomy i upominki, oraz przez redaktor Justynę Suchecką z Gazety Wyborczej. Na uczestników czekał także wiceprezydent Warszawy Jarosław Jóźwiak. Link do relacji filmowej z tego niecodziennego wydarzenia można znaleźć na stronie internetowej OMG w zakładce „w mediach”.

Następna Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna odbędzie się w Hongkongu w lipcu 2016 r.

Andrzej Grzesik, Michał Pilipczuk

Cyfrowe problemy

Zapisem w systemie dziesiętnym danej dodatniej liczby całkowitej n nazywamy przedstawienie postaci

$$n = 10^m a_m + 10^{m-1} a_{m-1} + \ldots + 10a_1 + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \{0,1,\ldots,9\}$ oraz $a_m \neq 0$. Współczynniki a_i nazywamy cyframi liczby n zapisanej w systemie dziesiętnym. Można udowodnić, że każda dodatnia liczba całkowita posiada dokładnie jedno przedstawienie powyższej postaci, czyli dokładnie jeden zapis w systemie dziesiętnym.

Problemy dotyczące zapisu pozycyjnego już od dawna należą do kanonu zadań konkursowych. Chociaż dziesiętny układ liczbowy towarzyszy nam od pierwszych chwil, w których wkraczamy w świat matematyki i jest dla nas w pewnym sensie pojęciem oczywistym, to zadaniom, które go dotyczą jest często bardzo daleko do bycia oczywistymi. Nie ma wielu metod, które pozwalają w przewidywalny sposób radzić sobie z tego typu problemami. Rozwiązania są często bardzo pomysłowe i wymagają dużej otwartości umysłu oraz umiejętności kombinowania. Właśnie z tego powodu zadania dotyczące systemu dziesiętnego tak często można spotkać na różnych konkursach i olimpiadach. Zademonstrujemy na kilku przykładach, jak można radzić sobie z „cyfrowymi” problemami.

Zadanie 1.

Wykaż, że liczba 20-cyfrowa, która zaczyna się od jedenastu cyfr 1, nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x liczbę opisaną w zadaniu. Najmniejsza liczba 20-cyfrowa, która zaczyna się od jedenastu cyfr równych 1, to

$$11\,111\,111\,111\,000\,000\,000 = 11\,111\,111\,111 \cdot 10^9.$$

Największa liczba tej postaci to z kolei

$$11\,111\,111\,111\,999\,999\,999 = 11\,111\,111\,112\,000\,000\,000 - 1.$$

Zachodzą więc nierówności

$$11\,111\,111\,111 \cdot 10^9 \leqslant x < 11\,111\,111\,111 \cdot 10^9 + 10^9.$$

Zauważmy, że

$$9 \cdot 11\,111\,111\,111 = 99\,999\,999\,999 = 10^{11} - 1.$$

Otrzymane przez nas nierówności po pomnożeniu przez 9 sprowadzają się więc do

$$(10^{11}-1)\cdot 10^9 = 10^{20} - 10^9 \leqslant 9x < \\ < (10^{11}-1)\cdot 10^9 + 9\cdot 10^9 = 10^{20} + 8\cdot 10^9.$$

Jeżeli $x = n^2$ jest kwadratem pewnej liczby całkowitej n, to również liczba $9x = (3n)^2$ jest kwadratem liczby całkowitej. Zauważmy jednak, że

$$(10^{10}-1)^2 = 10^{20} - 20\cdot 10^9 + 1 < 10^{20} - 10^9 \leqslant 9x$$

oraz

$$(10^{10}+1)^2 = 10^{20} + 20\cdot 10^9 + 1 > 10^{20} + 8\cdot 10^9 > 9x.$$

Pomiędzy liczbami $(10^{10}-1)^2$ oraz $(10^{10}+1)^2$ znajduje się tylko jeden kwadrat liczby całkowitej, którym jest liczba 10^{20}. Jeżeli więc liczba $9x$ byłaby kwadratem, to zachodziłaby równość $9x = 10^{20}$. Liczba 10^{20} nie dzieli się jednak przez 9. Wynika stąd, że liczba x nie jest kwadratem liczby całkowitej i rozwiązanie jest zakończone.

Kolejne zadanie jest klasycznym przykładem zastosowania zasady szufladkowej Dirichleta.

Zadanie 2.

Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n, niepodzielnej ani przez 2, ani przez 5, istnieje jej wielokrotność, której zapis dziesiętny składa się wyłącznie z cyfr równych 1.

Rozwiązanie

Rozważmy $n+1$ liczb postaci

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ 111...11,$$

gdzie ostatnia z liczb składa się z $n+1$ cyfr równych 1. Istnieje n różnych reszt z dzielenia przez n, natomiast danych liczb jest $n+1$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika więc, iż pewna reszta powtarza się. Istnieją zatem dwie różne liczby postaci 111...11, których różnica dzieli się przez n. Różnica owych dwóch liczb jest równa $111...1100...0 = 111...11 \cdot 10^k = a \cdot 10^k$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k.

Liczba n nie dzieli się ani przez 2 ani przez 5, więc jest względnie pierwsza z liczbą 10^k. Korzystając z twierdzenia 2. z artykułu *Zmagania z ułamkami* (*Kwadrat* nr 14, grudzień 2014), wnioskujemy, że liczba a, której zapis dziesiętny składa się wyłącznie z cyfr równych 1, jest podzielna przez n. To kończy dowód.

W dalszej części artykułu przez $S(n)$ będziemy oznaczać sumę cyfr dodatniej liczby całkowitej n (w systemie dziesiętnym). Znana cecha podzielności przez 9 głosi, iż dodatnia liczba całkowita n dzieli się przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy jej suma cyfr $S(n)$ dzieli się przez 9. W rzeczywistości można powiedzieć nawet więcej: liczby n i $S(n)$ dają tę samą resztę z dzielenia przez 9. Uzasadnimy to korzystając z podstawowych własności kongruencji (zob. *Kongruencje i ich własności* w broszurze *Matematyczne seminarium olimpijskie, część 1*, dostępnej na stronie OMG). Dla dowolnej liczby naturalnej k mamy bowiem

$$10^k \equiv 1^k = 1 \pmod 9.$$

Jeżeli więc zapiszemy n w dziesiętnym systemie pozycyjnym jako

$$n = 10^m a_m + 10^{m-1} a_{m-1} + \ldots + 10a_1 + a_0,$$

to mamy

$$n = 10^m a_m + 10^{m-1} a_{m-1} + \ldots + 10a_1 + a_0 \equiv$$
$$\equiv a_m + a_{m-1} + \ldots + a_1 + a_0 = S(n) \pmod 9,$$

co dowodzi żądanej własności. Chociaż nie ma wielu znanych metod, które byłyby przydatne w zmaganiach z cyframi, to ów prosty fakt stanowi klucz do rozwiązania ogromnej liczby zadań z tej dziedziny. Bywa on przydatny do tego stopnia, że widząc zadanie dotyczące sumy cyfr (lub nawet po prostu cyfr), warto niejako automatycznie zadać sobie pytanie, czy nie uda się go zastosować. Zademonstrujemy jego użyteczność na dwóch przykładach, w których jest on istotnym fragmentem rozumowania.

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $S(2n^2+3)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Sprawdzając po kolei wszystkie 9 możliwości możemy zweryfikować, iż reszta z dzielenia przez 9 kwadratu liczby całkowitej należy do zbioru $\{0,1,4,7\}$. W konsekwencji, reszta z dzielenia przez 9 liczby postaci $2n^2+3$ należy do zbioru $\{2,3,5,8\}$. Z drugiej jednak strony, skoro $S(2n^2+3) \equiv 2n^2+3 \pmod 9$, to gdyby liczba $S(2n^2+3)$ była kwadratem, to reszta liczby $2n^2+3$ należałaby do zbioru $\{0,1,4,7\}$. Ponieważ dane zbiory reszt są rozłączne, dochodzimy do wniosku, że nie istnieje liczba całkowita n spełniająca żądane warunki.

Zadanie 4.

Wyznacz liczbę $S(S(S(4444^{4444})))$.

Rozwiązanie

Niech $A = S(S(S(4444^{4444})))$. Rozpoczniemy od podania oszacowania górnego liczby A. Z oczywistej nierówności

$$4444^{4444} < 10000^{5000} = 10^{20000}$$

wynika, że liczba 4444^{4444} ma nie więcej niż 20000 cyfr. Suma cyfr liczby n-cyfrowej jest największa wtedy, kiedy każda z jej n cyfr jest równa 9. Liczba $S(4444^{4444})$ nie przekracza zatem $9 \cdot 20000 = 180000$, a więc ma najwyżej sześć cyfr. Wobec tego

$$S(S(4444^{4444})) \leqslant 9 \cdot 6 = 54.$$

Spośród liczb od 1 do 54 największą sumę cyfr ma liczba 49 i suma ta wynosi 13. Stwierdzamy więc ostatecznie, że

$$A = S(S(S(4444^{4444}))) \leqslant 13.$$

Liczba, której szukamy, jest więc nie większa niż 13. Stanowi to oczywiście duże ułatwienie.

Aby spośród 13 potencjalnych odpowiedzi wyznaczyć tę właściwą, posłużymy się faktem, który przytoczyliśmy wcześniej: n i $S(n)$ dają tę samą resztę z dzielenia przez 9. Wnioskujemy stąd od razu, że

$$4444 \equiv 4+4+4+4 = 16 \equiv 7 \pmod 9.$$

Co więcej

$$7^3 = 343 \equiv 1 \pmod 9.$$

Z własności kongruencji mamy więc

$$4444^{4444} \equiv 7^{4444} = 7^{4443+1} \equiv (7^3)^{1481} \cdot 7 \equiv 1 \cdot 7 = 7 \pmod 9.$$

Ponieważ operacja obliczania sumy cyfr nie zmienia reszty z dzielenia przez 9, więc dochodzimy do wniosku, że liczba A daje resztę 7 z dzielenia przez 9. W przedziale od 1 do 13 jest jednak tylko jedna liczba, która daje resztę 7 z dzielenia przez 9 i jest nią 7. A zatem $A = 7$ i rozwiązanie zadania jest zakończone.

Zachęcamy Czytelnika do zmierzenia się z poniższymi zadaniami do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5.

Wykaż, że jeżeli $S(n) = S(2n)$, to $9 \mid n$.

Zadanie 6.

Rozstrzygnij, czy liczba, której zapis dziesiętny składa się z 600 cyfr 6 oraz pewnej liczby zer, może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 7.

Liczby od 1 do 600 zapisano obok siebie w dowolnej kolejności, uzyskując jedną liczbę N. Udowodnij, że liczba N nie jest sześcianem liczby całkowitej.

Tomasz Kobos

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Bliźniacze zadania

9. Uzasadnij, że trójkąty ACP i DBP są podobne. Zwróć uwagę, że punkt P może leżeć wewnątrz lub na zewnątrz okręgu oraz że punkty A, B, C, D mogą leżeć na okręgu w różnej kolejności.. Uzasadnienie podobieństwa tych trójkątów może się różnić w rozpatrywanych przypadkach.

10. Uzasadnij, że trójkąty ACP i CBP są podobne.

11. Przeprowadź podobne rozumowanie jak w zadaniach 1 i 2.

12. Oznacz środek sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ przez I. Zauważ, że czworościan $ABCD$ można rozciąć na czworościany $ABCI$, $BCDI$, $CDAI$, $DABI$. Przeprowadź podobne rozumowanie jak w zadaniu 5.

13. Prześledź dokładnie rozwiązanie zadania 8.

Tożsamość Sophie Germain

5. Skorzystaj z tożsamości Sophie Germain dla odpowiednio dobranych liczb x i y.

6. Korzystając z tożsamości Sophie Germain, udowodnij, że jeżeli $a = 4m^4$ dla pewnej liczby całkowitej dodatniej m, to liczba $n^4 + a$ jest złożona.

7. Każdy z czynników licznika i mianownika pomnóż przez 4. Skorzystaj następnie z tożsamości Sophie Germain dla każdego czynnika z osobna. Zauważ, że pewne wyrazy się skracają.

8. Zauważ, że $3^{2008} + 4^{2009} = x^4 + 4y^4$ dla $x = 3^{502}$, $y = 4^{502}$. Dzięki tożsamości Sophie Germain znajdź przedstawienie tej liczby w postaci iloczynu dwóch liczb. Wystarczy udowodnić, że obie są większe od 2015^{182}.

„Kwadrat” redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk. Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 2000 egz.

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Nr 18
sierpień 2016
ISSN 2300-0708

Henryk Pawłowski (1960-2016)

W dniu 11 czerwca 2016 r. nagle i niespodziewanie odszedł od nas Henryk Pawłowski, współtwórca Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, przewodniczący Komitetu Okręgowego OMG w Toruniu (od początku istnienia Olimpiady), nauczyciel wielu olimpijczyków, autor znakomitych zbiorów zadań oraz podręczników, wielki pasjonat matematyki.

Henryk Pawłowski, nauczyciel IV LO, a także Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu, był osobą o niezwykłej charyzmie. Swoją pasją do zadań olimpijskich zaraził wielu uczniów, a organizacja zawodów matematycznych była dla niego jednym z ważniejszych aspektów w edukacji matematycznej. Wraz z Wojciechem Tomalczykiem, nauczycielem III LO i przewodniczącym Komitetu Okręgowego OMG w Gdyni, był inicjatorem i organizatorem tzw. *małej Olimpiady Matematycznej* (mOM), która po kilku latach przebudowy została wznowiona pod nazwą *Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*.

Można śmiało zaryzykować tezę, że gdyby nie mOM, to nasza Olimpiada by nigdy nie powstała, a bez Henryka Pawłowskiego nie będzie już tym, czym była.

Różnica kwadratów

Wzór skróconego mnożenia

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

jest niezwykle prosty — aby go wyprowadzić, wystarczy wymnożyć nawiasy:

$$(a-b)(a+b)=(a-b)\cdot a+(a-b)\cdot b=$$
$$=a^2-ba+ab-b^2=a^2-b^2\,.$$

Tożsamość ta jest bardzo użyteczna w różnych sytuacjach, pozwala m.in. wykonywać w pamięci niektóre działania na dość dużych liczbach. Na przykład, żeby pomnożyć 998 przez 1002, wystarczy zauważyć, że $998=1000-2$ oraz $1002=1000+2$, aby natychmiast podać odpowiedź:

$$998\cdot 1002=1000^2-2^2=999\,996\,.$$

Oto inny przykład działania, które można szybko wykonać w pamięci: $27^2-23^2=(27-23)\cdot(27+23)=4\cdot 50=200$.

Wzór na różnicę kwadratów przydaje się często w zadaniach olimpijskich, co chcielibyśmy zaprezentować w niniejszym artykule.

Zadanie 1.
Oblicz $100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2$.

Rozwiązanie
Pogrupujmy składniki po dwa i użyjmy wzoru na różnicę kwadratów:

$$100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2=$$
$$=(100-99)(100+99)+(98-97)(98+97)+\ldots$$
$$\ldots+(2-1)(2+1)=$$
$$=100+99+98+97+\ldots+2+1=\tfrac{1}{2}\cdot 100\cdot 101=5050.$$

Pod koniec korzystamy ze wzoru na sumę kolejnych liczb naturalnych, opisanego np. w *Kwadracie* nr 11.

Zadanie 2.
Czy istnieją takie dwie dodatnie liczby całkowite, których różnica wynosi 2 i których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej?

Rozwiązanie
Oznaczmy przez $n-1$ oraz $n+1$ pewne dodatnie liczby całkowite różniące się o 2. Wówczas

$$(n-1)^2<(n-1)(n+1)=n^2-1<n^2\,,$$

czyli iloczyn rozważanych liczb jest większy od kwadratu liczby $n-1$, ale mniejszy od kwadratu kolejnej liczby naturalnej n. Nie może więc być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. (VI OMG, zawody II stopnia)
Dane są dodatnie liczby całkowite a i b. Wykaż, że jeżeli liczba a^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$, to także liczba b^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$.

Rozwiązanie
Wiemy, że $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, czyli liczba a^2-b^2 jest podzielna przez $a+b$. Ponadto z założenia liczba a^2 jest podzielna przez $a+b$. Wobec tego również różnica $a^2-(a^2-b^2)=b^2$ jest podzielna przez $a+b$.

W wielu zadaniach rozłożenie pewnego wyrażenia na czynniki jest kluczowym krokiem rozumowania. Jest to szczególnie przydatne, gdy badany iloczyn jest równy zero, jak również w zagadnieniach związanych z liczbami całkowitymi i podzielnością, a zwłaszcza z liczbami pierwszymi.

Zadanie 4.
Czy istnieje liczba pierwsza postaci 999...91, gdzie cyfra 9 występuje nieparzystą liczbę razy?

Rozwiązanie
Przypuśćmy, że liczba dziewiątek użytych do zapisu danej liczby wynosi $2n-1$. Wówczas

$$999...91=10^{2n}-9=(10^n)^2-3^2=(10^n-3)(10^n+3)\,.$$

Żaden z uzyskanych czynników nie jest równy 1, a zatem wyjściowa liczba nie jest pierwsza.

Uwaga
Jeśli liczba dziewiątek w zapisie 999...91 jest parzysta, to liczba tej postaci może być zarówno pierwsza, jak i złożona. Na przykład liczby 991, 99991, 9999991

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

są pierwsze, natomiast liczba 999 999 991 jest złożona (dzieli się przez 67).

Zadanie 5. (V OMG, zawody I stopnia)

Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych a, b, c, dla których $a^2=b^2+c$.

Rozwiązanie

Dane w treści zadania równanie możemy przepisać w postaci $c=(a-b)(a+b)$. Skoro wiemy, że liczby c oraz $a+b$ są dodatnie, to liczba $a-b$ również jest dodatnia. Liczba c jest ponadto pierwsza, zatem mniejszy z dodatnich czynników $a-b$, $a+b$ jest równy 1. Stąd $a-b=1$. Skoro liczby a, b są pierwsze i różnią się o 1, to $a=3$, $b=2$. Wówczas $c=1\cdot(3+2)=5$ także jest liczbą pierwszą, więc istnieje jedno rozwiązanie: $a=3$, $b=2$, $c=5$.

Zadanie 6.

Rozstrzygnij, czy istnieją nieujemne liczby całkowite a, b, n, dla których $a^2-b^2=2\cdot 3^n$.

Rozwiązanie

Zapiszmy daną w treści zadania równość w postaci $(a-b)(a+b)=2\cdot 3^n$. Liczba po prawej stronie jest parzysta, ale niepodzielna przez 4. Stąd jeden z czynników po lewej stronie jest parzysty, a drugi nieparzysty. Wobec tego ich suma $(a-b)+(a+b)=2a$ jest nieparzysta. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że liczby opisane w treści zadania nie istnieją.

Zadanie 7.

Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p większej od 3 liczba p^2-1 jest podzielna przez 24.

Rozwiązanie

Ponieważ największy wspólny dzielnik liczb 8 i 3 jest równy 1, więc wystarczy dowieść, że rozważana liczba dzieli się przez 8 i przez 3.

Liczba $p>3$ jest pierwsza, a zatem nieparzysta. Wobec tego w iloczynie $p^2-1=(p-1)(p+1)$ występują dwie kolejne liczby parzyste, a więc jedna z nich dzieli się przez 4. Stąd liczba p^2-1 jest podzielna przez 8.

Ponadto spośród trzech kolejnych liczb $p-1$, p, $p+1$ dokładnie jedna dzieli się przez 3 i z treści zadania wynika, że nie jest to liczba p. Zatem jeden z czynników iloczynu $(p-1)(p+1)$ jest podzielny przez 3, co kończy rozwiązanie zadania.

W kolejnym rozwiązaniu wykorzystamy wzór na kwadrat różnicy:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Podobnie jak w przypadku wzoru na różnicę kwadratów, tożsamość tę można natychmiast udowodnić, wymnażając nawiasy po lewej stronie.

Zadanie 8. (VI OMG, zawody I stopnia)

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2+x(y-4)=-2 \\ y^2+y(x-4)=-2. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Odejmując równania stronami i przekształcając, uzyskujemy kolejno:

$$\begin{aligned} x^2-y^2-4x+4y&=0\\ (x-y)(x+y)-4(x-y)&=0\\ (x-y)(x+y-4)&=0. \end{aligned}$$

Iloczyn dwóch liczb jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedna z nich jest równa 0.

Jeśli $x-y=0$, to $x=y$ i po podstawieniu do pierwszego z wyjściowych równań i przekształceniach otrzymujemy $2x^2-4x=-2$. Dzieląc stronami przez 2 i korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy, uzyskujemy $(x-1)^2=0$, czyli $x=1$. Stąd wniosek, że $x=y=1$.

Jeżeli zaś $x+y-4=0$, to $y-4=-x$ i po podstawieniu do pierwszego z wyjściowych równań i przekształceniach otrzymujemy $x^2+x(-x)=-2$, czyli sprzeczność: $0=-2$. Oznacza to, że w tym przypadku rozwiązań nie ma i jedynym rozwiązaniem jest uzyskana wcześniej para $(x,y)=(1,1)$.

Wzór na różnicę kwadratów bywa przydatny także w sytuacjach, w których mamy do czynienia z różnicą wyższych parzystych potęg.

Zadanie 9.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (x,y) spełniających równanie $x^4-y^4=65$.

Rozwiązanie

Przekształćmy:

$$x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)=(x-y)(x+y)(x^2+y^2).$$

Ponieważ liczby x, y oraz wartość powyższego wyrażenia są dodatnie, więc $x-y>0$. Wszystkie trzy powyższe czynniki są więc dodatnie.

Zauważmy teraz, że $65=5\cdot 13$ i obydwa czynniki 5 oraz 13 są liczbami pierwszymi. Zatem liczbę 65 można przedstawić jako iloczyn *trzech* dodatnich czynników tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z nich jest równy 1.

Liczby x, y są całkowite i dodatnie, więc

$$x^2+y^2\geqslant x+y>1\,.$$

Wobec tego $x-y=1$, $x+y=5$ oraz $x^2+y^2=13$. Z pierwszych dwóch równości wynika, że $x=3$ i $y=2$. Wartości te spełniają też trzecie równanie, więc para $(3,2)$ jest jedynym rozwiązaniem.

Zadanie 10. (Koło Matematyczne SEM, seria 1)

Wyznacz liczbę par (x,y) liczb całkowitych spełniających równanie $x^4=y^4+1223334444$.

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, przekształćmy dane równanie do postaci

$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2)=1223334444\,.$$

Liczba po prawej stronie jest parzysta, więc przynajmniej jeden z czynników po lewej stronie również jest parzysty. Wobec tego liczby x, y są tej samej parzystości, tzn. obie są parzyste lub obie są nieparzyste. Ale wówczas wszystkie trzy czynniki po lewej stronie są parzyste, a więc ich iloczyn dzieli się przez 8. Tymczasem liczba 1223334444 nie jest podzielna przez 8. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie istnieją pary (x,y) spełniające dane równanie.

W rozwiązaniu poniższego zadania skorzystamy dodatkowo ze wzoru na sumę trzecich potęg, który również można łatwo sprawdzić, wymnażając nawiasy:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)\,.$$

Zadanie 11. (zawody *Náboj*, 2016 r.)

Znajdź jedyny trzycyfrowy dzielnik pierwszy liczby 999 999 995 904.

Rozwiązanie

Zacznijmy od obserwacji, że

$$999\,999\,995\,904 = 10^{12} - 4096 = 10^{12} - 2^{12} = 2^{12}\cdot(5^{12}-1),$$

z której wynika, że szukany trzycyfrowy dzielnik pierwszy danej liczby jest także dzielnikiem liczby $5^{12}-1$.

Wykorzystując dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów, uzyskujemy

$$5^{12}-1 = (5^6-1)(5^6+1) = (5^3-1)(5^3+1)(5^6+1) =$$
$$= 124\cdot 126\cdot(5^6+1) = (2\cdot 62)\cdot(2\cdot 63)\cdot(5^6+1).$$

Stąd — podobnie jak wyżej — wnioskujemy, że szukany trzycyfrowy dzielnik pierwszy wyjściowej liczby jest dzielnikiem liczby 5^6+1.

Dalej zauważmy, że zgodnie z powyższym wzorem na sumę trzecich potęg,

$$5^6+1 = (5^2)^3+1 = (5^2+1)(5^4-5^2+1) = 26\cdot 601.$$

Szukany trzycyfrowy dzielnik pierwszy p jest więc dzielnikiem liczby 601. Wówczas $601 = p\cdot q$, przy czym $q<7$ (bo $p \geqslant 100$) i jednocześnie q także jest dzielnikiem liczby 601.

Ponieważ 601 nie dzieli się przez żadną z liczb 2, 3, 4, 5 ani 6, więc jedyną możliwością pozostaje $q=1$. Stąd $p=601$ i liczba ta jest szukanym trzycyfrowym dzielnikiem pierwszym.

Na koniec proponujemy zadania do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 12.

Oblicz

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Zadanie 13. (IV OMG, zawody II stopnia)

Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb nieparzystych dodatnich spełniające zależność

$$\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}.$$

Zadanie 14. (Koło Matematyczne SEM, seria 8)

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, które spełniają nierówności

$$\frac{2010}{\sqrt{n+10}} < \sqrt{n-10} < \frac{2011}{\sqrt{n+10}}.$$

Zadanie 15.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (x,y) spełniających równanie $x^8-y^8=6305$.

Zadanie 16.

Czy istnieją takie liczby całkowite x, y, że liczba x^4-y^4 kończy się cyframi 1000?

Joanna Jaszuńska

Kolejna inspiracja

W *Kwadracie* nr 9 opublikowaliśmy tekst Michała Miśkiewicza, w którym opisał on swoją pracę „Urok zbioru μ”, nagrodzoną m.in. brązowym medalem na 23. Konkursie Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej (European Union Contest for Young Scientists, EUCYS). Praca powstała, gdy Michał był uczniem liceum, a inspiracją dla niego było zadanie z IV OMG (2008/2009). W dopisku do tego artykułu napisaliśmy, że czekamy na osoby, które pójdą w jego ślady.

Jest nam niezmiernie miło poinformować, że doczekaliśmy się! Inspirując się innym zadaniem z naszej Olimpiady, Jadwiga Czyżewska z Gimnazjum nr 13 im. Stanisława Staszica w Warszawie napisała pracę „Kolorowanie płaszczyzny, prostych i okręgów”. Praca została nagrodzona brązowym medalem na XXXVII Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki czasopisma *Delta*. Zdobyła również pierwszą nagrodę w tegorocznej polskiej edycji 28. Konkursu Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej (EUCYS 2016) i będzie walczyć o nagrodę w międzynarodowej edycji tego konkursu w połowie września 2016 r. w Brukseli.

Jadwidze gratulujemy i mocno trzymamy kciuki, a Czytelnikom życzymy miłej lektury artykułu, w którym uchyla ona rąbka swoich matematycznych badań.

Chodź, pomaluj mi płaszczyznę!

W 2013 roku na II etapie VIII Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów pojawiło się następujące zadanie:

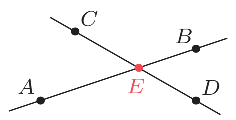
Zadanie 1.

Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Można użyć co najwyżej trzech kolorów.

Załóżmy najpierw, że płaszczyzna została pokolorowana co najmniej czterema kolorami. Wybierzmy cztery różnokolorowe punkty A, B, C, D (rys. 1). Bez straty ogólności możemy przyjąć, że proste AB i CD się przecinają; ich wspólny punkt oznaczmy jako E. Jeżeli punkt E ma taki sam kolor jak punkt A lub B, to prosta CD jest co najmniej trzykolorowa. Jeżeli zaś kolor punktu E jest różny od kolorów punktów A i B, to z kolei prosta AB jest co najmniej trzykolorowa. Zatem nie da się pokolorować płaszczyzny czterema (lub więcej) kolorami w taki sposób, aby każda prosta była co najwyżej dwukolorowa.



rys. 1

rys. 2

Wskażemy teraz kolorowanie płaszczyzny trzema kolorami, spełniające warunki zadania. Pokolorujmy najpierw całą płaszczyznę na jeden kolor, np. biały (rys. 2). Wybierzmy prostą ℓ i pokolorujmy ją na inny kolor, np. czarny. Na prostej ℓ wybierzmy punkt A i pokolorujmy go na trzeci kolor, np. czerwony. Wtedy każda prosta jest co najwyżej dwukolorowa, co kończy rozwiązanie zadania.

Powyższe zadanie stanowi doskonałą bazę do zadawania pokrewnych pytań. W *Kwadracie* nr 12 w artykule „Zadaniowe laboratorium” Adam Dzedzej stawia między innymi takie pytanie: *Iloma maksymalnie kolorami można pokolorować płaszczyznę, aby każda prosta była co najwyżej trzykolorowa?* Okazuje się, że zwiększenie zaledwie do trzech liczby kolorów na prostej pozwala użyć już dowolnie wielu kolorów na płaszczyźnie — dowód był prezentowany w zacytowanym artykule.

Oprócz zmiany liczby kolorów w wyjściowym problemie, można zastąpić prostą innym obiektem. Drugim (po prostej) bohaterem zadań geometrycznych jest oczywiście okrąg. Czytelnikowi pozostawiam do rozwiązania następujące odpowiedniki wcześniej zaprezentowanych problemów, w których prosta została zamieniona na okrąg. Wskazówki do nich znajdą się w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 2.

Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każdy okrąg był jednokolorowy lub dwukolorowy. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny?

Zadanie 3.

Każdy punkt płaszczyzny należy pokolorować tak, aby każdy okrąg był co najwyżej trzykolorowy. Ilu maksymalnie kolorów można użyć do pokolorowania punktów tej płaszczyzny?

W pracy „Kolorowanie płaszczyzny, prostych i okręgów", którą napisałam na Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki organizowany przez czasopismo *Delta*, zadałam ogólniejsze pytanie: *na ile maksymalnie kolorów można pokolorować płaszczyznę w taki sposób, by każda prosta była co najwyżej m-kolorowa, natomiast każdy okrąg był co najwyżej n-kolorowy?*

Udało mi się znaleźć odpowiedź dla prawie wszystkich wartości m i n. Otwarte pozostaje tylko pytanie dla $m=n=3$, czyli o maksymalną liczbę kolorów pozwalającą pomalować płaszczyznę tak, aby każda prosta i każdy okrąg były co najwyżej trzykolorowe. Umiem jednak wykazać, że w tym przypadku maksymalna liczba kolorów jest równa 4 lub 5.

Twierdzenie

Niech k będzie maksymalną liczbą kolorów, których można użyć do pokolorowania punktów płaszczyzny w taki sposób, aby każda prosta była co najwyżej trzykolorowa i każdy okrąg był co najwyżej trzykolorowy. Wówczas $k=4$ lub $k=5$.

Dowód

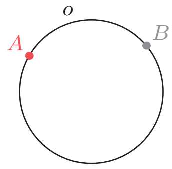
Wykażemy, że $k \geqslant 4$, czyli że istnieje kolorowanie punktów płaszczyzny czterema kolorami takie, że każda prosta i każdy okrąg są co najwyżej trzykolorowe.

Pokolorujmy całą płaszczyznę na jeden kolor, np. biały. Wybierzmy okrąg o i pokolorujmy go na inny kolor, np. czarny (rys. 3). Na okręgu o wybierzmy dwa punkty A, B i pokolorujmy je na dwa inne kolory, np. czerwony i szary.

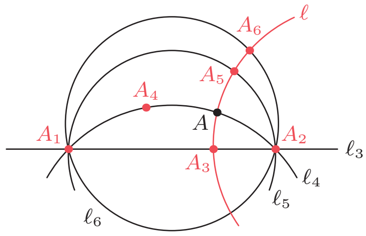
Zauważmy, że jeżeli prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem o, to jest jednokolorowa, gdy jest do niego styczna, to jest dwukolorowa, a jeżeli go przecina, to jest dwu- lub trzykolorowa. Analogicznie jest dla okręgów. Zatem $k \geqslant 4$.

Wykażemy teraz, że nie istnieje kolorowanie płaszczyzny 6 kolorami, przy którym każda prosta i każdy okrąg są najwyżej trzykolorowe, czyli że $k<6$.

Dowód przeprowadzimy nie wprost. Przypuśćmy, że takie kolorowanie istnieje i wybierzmy 6 różnokolorowych punktów: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (rys. 4).



rys. 3



rys. 4

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkty A_3, A_4, A_5, A_6 leżą po tej samej stronie prostej A_1A_2. Przez punkty A_1, A_2, A_i dla $i=3,4,5,6$ możemy poprowadzić dokładnie jedną prostą (gdy punkty A_1, A_2, A_i są współliniowe) lub dokładnie jeden okrąg (gdy punkty A_1, A_2, A_i nie są współliniowe).

Tę prostą lub okrąg oznaczmy przez ℓ_i ($i=3,4,5,6$). Zauważmy, że $\ell_i \neq \ell_j$ dla $i \neq j$, gdyż w przeciwnym razie punkty A_1, A_2, A_i, A_j leżałyby na jednej prostej lub jednym okręgu, a wtedy obiekt ten byłby co najmniej czterokolorowy, co przeczy założeniu.

Jeśli jednym z obiektów ℓ_i jest prosta, to przyjmijmy, że jest to ℓ_3, tzn. prosta ta zawiera punkty A_1, A_2 i A_3. Bez straty ogólności możemy założyć, że punkt A_3 znajduje się wówczas pomiędzy punktami A_1 i A_2. Numerację okręgów ℓ_4, ℓ_5 i ℓ_6 ustalmy w ten sposób, aby $\sphericalangle A_1A_4A_2 > \sphericalangle A_1A_5A_2 > \sphericalangle A_1A_6A_2$.

Jeśli z kolei wśród obiektów ℓ_i dla $i=3,4,5,6$ nie ma prostej, to ustalmy ich numerację w taki sposób, aby $\sphericalangle A_1A_3A_2 > \sphericalangle A_1A_4A_2 > \sphericalangle A_1A_5A_2 > \sphericalangle A_1A_6A_2$.

Poprowadźmy teraz przez punkty A_3, A_5, A_6 okrąg lub prostą ℓ. Wówczas ℓ przecina okrąg ℓ_4 w pewnym punkcie A. Niezależnie od koloru punktu A, któryś z tych dwóch obiektów — ℓ lub ℓ_4 — musi być czterokolorowy. Uzyskana sprzeczność kończy drugą część dowodu przedstawionego twierdzenia.

Do pełnego rozwiązania zagadnienia pozostaje więc rozstrzygnąć, czy płaszczyznę można pokolorować pięcioma kolorami w taki sposób, aby każda prosta i każdy okrąg były co najwyżej trzykolorowe. Może Ty, drogi Czytelniku, potrafisz wskazać przykład takiego kolorowania lub umiesz uzasadnić, że ono nie istnieje?

Jadwiga Czyżewska

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

O pożytku z pola

6. Zauważ, że jeśli P jest punktem leżącym wewnątrz trójkąta równobocznego ABC, to suma pól trójkątów ABP, BCP i CAP jest stała, niezależna od wyboru punktu P.

7. Zmodyfikuj odpowiednio rozwiązanie zadania 4.

8. Uzasadnij, że iloraz $PA' : AA'$ jest równy stosunkowi pól trójkątów PBC i ABC.

9. Zmodyfikuj odpowiednio rozwiązanie zadania 5.

Cyfrowe problemy

5. $k \equiv S(k) \pmod 9$.

6. Podziel daną liczbę przez odpowiednią potęgę liczby 100, a następnie zbadaj podzielność uzyskanej liczby przez 4 lub 25.

7. $N \equiv S(N) = S(1)+\ldots+S(600) \equiv 1+\ldots+600 \equiv 3 \pmod 9$.

„Kwadrat" redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk.
Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 2000 egz.

Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Juniorów

Nr 19
styczeń 2017
ISSN 2300-0708

Honorowi profesorowie

Na łamach *Kwadratu* regularnie donosimy o sukcesach uczestników naszej Olimpiady w rozmaitych konkursach (nie tylko matematycznych!). Te wspaniałe osiągnięcia to nie tylko zasługa zdolności i ciężkiej pracy uczniów, lecz również wysiłku nauczycieli, ustawiających cenne drogowskazy na ścieżce rozwoju, którą podążają ich podopieczni.

Jedną z najbardziej prestiżowych nagród, mających na celu wyróżnienie nauczycieli odnoszących sukcesy na polu (współ)pracy z uczniem, jest *honorowy tytuł profesora oświaty*, przyznawany corocznie najwybitniejszym pedagogom przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.

Miło jest nam poinformować, że wśród 20 osób, którym w dniu 14 października 2016 roku nadany został ów zaszczytny tytuł, znalazł się Waldemar Rożek, przewodniczący Komitetu Okręgowego OMJ w Stalowej Woli.

Tylko 14 nauczycieli matematyki w Polsce może poszczycić się honorowym tytułem profesora oświaty. Aż 6 z nich to przewodniczący (lub byli przewodniczący) Komitetów Okręgowych OMJ. Są to (w nawiasie podano rok przyznania tytułu):

- Wojciech Tomalczyk (2008)
  — Komitet Okręgowy w Gdyni,
- Henryk Pawłowski (2009)
  — Komitet Okręgowy w Toruniu,
- Paweł Kwiatkowski (2014)
  — Komitet Okręgowy w Piotrkowie Trybunalskim,
- Tomasz Szymczyk (2014)
  — Komitet Okręgowy w Bielsku-Białej, ogólnopolski koordynator OMJ,
- Jacek Dymel (2015)
  — Komitet Okręgowy w Krakowie,
- Waldemar Rożek (2016)
  — Komitet Okręgowy w Stalowej Woli.

Profesorom oświaty, a przede wszystkim tym zaprzyjaźnionym z OMJ, serdecznie gratulujemy i życzymy zasłużonej satysfakcji ze wspaniałych owoców swojej dydaktycznej pracy.

Dorysujmy środek odcinka

W wielu zadaniach geometrycznych sformułowanie nie odkrywa wszystkich tajemnic rozważanej konfiguracji. Zdarza się, że następstwa warunków zadania nie są widoczne na pierwszy rzut oka. Czasem jednak, aby zobaczyć kluczowe dla rozwiązania zależności, wystarczy *dorysować punkt*.

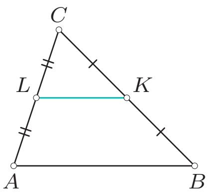
Samo dorysowanie punktu zwykle jednak nie rozwiązuje zadania, ale otwiera drogę do spostrzeżeń zbliżających do znalezienia rozwiązania. W cyklu artykułów „Dorysujmy...” postaramy się przekazać pewne wskazówki dotyczące tego, co warto dorysować i jakie korzyści można z tego odnieść.

W tym numerze zajmiemy się *środkiem odcinka*. Taki punkt często okazuje się przydatny, gdy w rozważanej konfiguracji pojawiają się inne środki odcinków. Dorysowanie kolejnego może bowiem umożliwić skorzystanie z ważnego (choć dość elementarnego) faktu, zwanego *twierdzeniem o linii środkowej w trójkącie*.

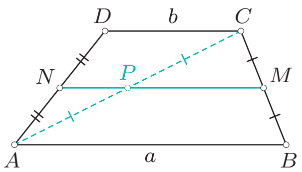
Twierdzenie 1.

W trójkącie ABC punkty K i L są środkami odpowiednio boków BC i AC (rys. 1). Wówczas odcinek KL jest równoległy do boku AB i ma dwa razy mniejszą długość od długości odcinka AB.

Dowód wykorzystuje własności równoległoboków i można go znaleźć w książeczce Waldemara Pompe *Wokół obrotów, przewodnik po geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA (twierdzenie 4.5).



rys. 1



rys. 2

Przyjrzyjmy się, jak zastosowanie powyższego twierdzenia po dorysowaniu środka pewnego odcinka może pomóc w rozwiązywaniu przykładowych zadań.

Zadanie 1.

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach $AB=a$ oraz $CD=b$. Punkty M i N są odpowiednio środkami ramion BC i AD. Wyznacz długość odcinka MN.

Rozwiązanie

Niech P będzie środkiem przekątnej AC (rys. 2). Wówczas z twierdzenia 1 wynika, że pary prostych PM i AB oraz PN i CD są równoległe. Proste AB i CD są równoległe, jako podstawy trapezu, a zatem również proste PM i PN są równoległe. Ponieważ proste te mają punkt wspólny P, więc oznacza to, że się pokrywają, czyli punkt P należy do odcinka MN. Z twierdzenia 1 otrzymujemy ponadto $PM=\frac{1}{2}a$ oraz $PN=\frac{1}{2}b$. Zatem

$$MN=PM+PN=\frac{1}{2}(a+b),$$

co kończy rozwiązanie zadania.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Zadanie 2.

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków BC i AD. Udowodnij, że $AB+CD \geqslant 2\cdot MN$. Wykaż ponadto, że równość w tej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy proste AB i CD są równoległe.

Rozwiązanie

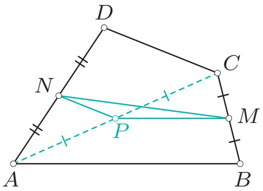
Równość, którą należy udowodnić, można zapisać jako $\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CD \geqslant MN$, co sugeruje dorysowanie punktu, który pozwoli na uzyskanie odcinków o długościach $\frac{1}{2}AB$, $\frac{1}{2}CD$. Podobnie jak w rozwiązaniu poprzedniego zadania, odpowiednim kandydatem na dorysowany punkt P jest środek przekątnej AC (rys. 3).

Korzystając z twierdzenia 1, uzyskujemy równości $PM=\frac{1}{2}AB$, $PN=\frac{1}{2}CD$. Jak widać, dowodzona nierówność przybiera postać

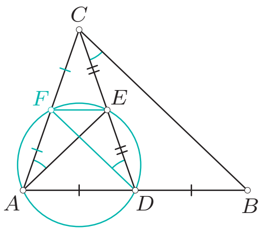
$$PM+PN \geqslant MN,$$

co jest prawdą na mocy nierówności trójkąta MNP.

Równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy punkt P leży na odcinku MN, czyli gdy proste PM i PN są równoległe. Z twierdzenia 1 wiemy, że pary prostych PM i AB oraz PN i CD są równoległe. Równoległość prostych PM i PN jest więc równoważna równoległości prostych AB i CD. Tym samym rozwiązanie jest zakończone.



rys. 3



rys. 4

Zadanie 3. (zawody II stopnia IX OMG)

W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest środkiem odcinka CD. Wykaż, że jeżeli $\sphericalangle CAE=\sphericalangle BCD$, to $AC=CD$.

Rozwiązanie

Pojawiające się w treści zadania punkty D i E są środkami pewnych boków trójkątów ABC i ACD. Trójkąty te mają wspólny bok AC, skąd pomysł, by dorysować środek F tego odcinka (rys. 4).

Na mocy twierdzenia 1, proste BC i DF są równoległe, a więc $\sphericalangle BCD=\sphericalangle CDF$. Łącząc tę zależność z daną w treści zadania równością kątów, uzyskujemy $\sphericalangle CAE=\sphericalangle CDF$. Ponieważ punkty E i F leżą po tej samej stronie prostej AD, więc z ostatniej równości wynika, że na czworokącie $ADEF$ można opisać okrąg. Wobec tego

$$\sphericalangle ADE+\sphericalangle AFE=180^\circ.$$

Z kolei z twierdzenia 1 wnioskujemy, że proste AD i EF są równoległe, wobec czego

$$\sphericalangle DAF+\sphericalangle AFE=180^\circ.$$

Odejmując stronami ostatnie dwie równości, otrzymujemy $\sphericalangle ADE=\sphericalangle DAF$, skąd wniosek, że trójkąt ACD jest równoramienny i $AC=CD$. To kończy dowód.

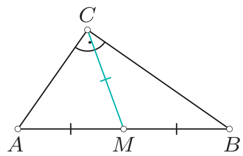
Środek odcinka może okazać się przydatny także wtedy, gdy w rozważanej konfiguracji pojawiają się trójkąty prostokątne. Przypomnijmy następujący fakt.

Twierdzenie 2.

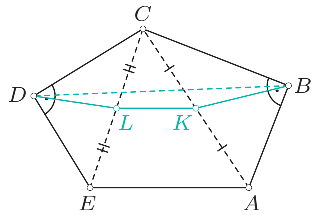
Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB (rys. 5). Wówczas $MC=\frac{1}{2}AB$.

Dowód znów można przeprowadzić w oparciu o własności równoległoboków. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy ponownie do wspomnianej wyżej książeczki Waldemara Pompe (twierdzenie 4.2).

Spójrzmy na rozwiązania dwóch zadań pochodzących z części korespondencyjnej OMG, w których dorysowanie środka przeciwprostokątnej znacznie przybliża do rozwiązania.



rys. 5



rys. 6

Zadanie 4. (zawody I stopnia VII OMG)

W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2\cdot BD$.

Rozwiązanie

Jak widać, w sformułowaniu zadania nie ma środków odcinków, które mogłyby sugerować dorysowanie kolejnego. Są natomiast kąty proste. Dorysujmy więc (tym razem dwa) punkty K i L, będące odpowiednio środkami odcinków AC i CE (rys. 6).

Korzystając z twierdzenia 2, uzyskujemy równości $KB=\frac{1}{2}AC$, $LD=\frac{1}{2}CE$. Ponadto z twierdzenia 1 otrzymujemy równość $KL=\frac{1}{2}EA$. Łącząc te zależności, dochodzimy do wniosku, że obwód trójkąta ACE jest równy

$$AC+CE+EA=2\cdot(KB+LD+KL).$$

Do zakończenia rozwiązania pozostaje zauważyć, że zachodzi nierówność $KB+LD+KL \geqslant BD$, gdyż najkrótsza droga między punktami B i D wiedzie w linii prostej.

Zadanie 5. (zawody I stopnia X OMG)

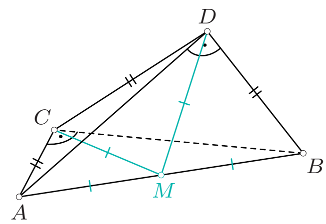
Dany jest czworościan $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADB=90^\circ \quad \text{oraz} \quad AC=CD=DB.$$

Wykaż, że $AB<2\cdot CD$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że trójkąty prostokątne ABC i ABD mają wspólną przeciwprostokątną, więc warto rozpocząć rozwiązanie zadania od dorysowania środka M odcinka AB (rys. 7).



rys. 7

Korzystając z twierdzenia 2, uzyskujemy wówczas równości $MA=MB=MC=MD$, które w połączeniu z założeniem $AC=CD=DB$ dają przystawanie trójkątów ACM, CDM, DBM (cecha bok–bok–bok). Stąd uzyskujemy równości kątów

$$\sphericalangle AMC = \sphericalangle CMD = \sphericalangle DMB.$$

Z drugiej strony, $\sphericalangle AMC + \sphericalangle CMD > \sphericalangle AMD$, więc

$$\sphericalangle AMC + \sphericalangle CMD + \sphericalangle DMB > \sphericalangle AMD + \sphericalangle DMB = 180^\circ.$$

Wobec tego $\sphericalangle CMD > 60^\circ$. W trójkącie równoramiennym CDM kąt między ramionami jest zatem większy od kąta między podstawą a ramieniem. To oznacza, że ramię jest krótsze od podstawy, czyli $MC = \frac{1}{2}AB < CD$, skąd wynika żądana nierówność.

Na zakończenie proponujemy kilka zadań, których rozwiązanie warto zacząć od dorysowania środków pewnych odcinków. Wskazówki podamy w kolejnym numerze *Kwadratu.*

Zadanie 6.

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach $AB = a$ oraz $CD = b$, przy czym $a > b$. Punkty P i Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Wyznacz długość odcinka PQ.

Zadanie 7.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są równej długości. Punkty M i N są odpowiednio środkami boków AD i BC. Wykaż, że prosta MN tworzy równe kąty z przekątnymi AC i BD.

Zadanie 8.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem boku CD. Udowodnij, że jeżeli $\sphericalangle AMB = 90^\circ$, to $AD + BC \geqslant AB$.

Zadanie 9.

W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości $\sphericalangle BCD = \sphericalangle EFA = 90^\circ$. Udowodnij, że obwód czworokąta $ABDE$ jest nie mniejszy od $2 \cdot CF$.

Zadanie 10.

Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $AB = 5$, $CD = 3$ oraz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$. Wykaż, że odległość między prostymi AB i CD jest nie większa od 2.

Uwaga. Odległość między prostymi w przestrzeni to długość najkrótszego odcinka łączącego te proste.

Zadanie 11.

Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, takie trójkąty prostokątne ACK i BCL, że

$$\sphericalangle AKC = \sphericalangle BLC = 90^\circ \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CAK = \sphericalangle CBL.$$

Wykaż, że $MK = ML$.

Łukasz Bożyk

W liczbach całkowitych

W zadaniach olimpijskich pojawia się czasami problem wyznaczenia wszystkich rozwiązań pewnego równania, które są liczbami całkowitymi. W tego typu zagadnieniach warto przyjrzeć się największemu wspólnemu dzielnikowi obu stron równania.

Zdarza się bowiem, że obie strony równania to wyrażenia algebraiczne, których największy wspólny dzielnik potrafimy dość dobrze oszacować lub wręcz dokładnie wyznaczyć. Gdyby na przykład okazało się, że największy wspólny dzielnik obu stron danego równania wynosi 5, to nasze równanie może być spełnione jedynie wtedy, gdy obie jego strony są równe 5. A stąd na ogół już tylko jeden krok do wyznaczenia wszystkich jego rozwiązań w liczbach całkowitych.

Przyjrzyjmy się, jak działa ta metoda w konkretnych zastosowaniach.

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$a^2b = c(a-b)^3.$$

Rozwiązanie

Niech $d = \mathrm{NWD}(a,b)$. Wówczas $a = dk$, $b = dl$ dla pewnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych k, l. Dane równanie, po podzieleniu obu stron przez d^3, przybiera postać

$$k^2l = c(k-l)^3. \tag{1}$$

Zauważmy, że liczby k^2l i $(k-l)^3$ są względnie pierwsze. Istotnie, gdyby obie te liczby miały wspólny dzielnik pierwszy p, to przez p dzieliłaby się liczba k lub liczba l, a ponadto także liczba $k-l$. Stąd wynika, że wtedy przez p dzieliłyby się obie liczby k i l, co przeczy temu, że największy wspólny dzielnik liczb k i l jest równy 1.

Liczby $(k-l)^3$ i k^2l są zatem względnie pierwsze, a z równania (1) wynika, że liczba $(k-l)^3$ jest dodatnim dzielnikiem liczby k^2l. Tak może się zdarzyć jedynie wtedy, gdy $(k-l)^3 = 1$, a więc $k = l+1$. Uwzględniając tę zależność w równości (1), uzyskujemy

$$c = k^2l = (l+1)^2l.$$

Dostajemy więc

$$a = d(l+1), \quad b = dl, \quad c = (l+1)^2l. \tag{2}$$

Z drugiej strony, jeśli d i l są dowolnymi dodatnimi liczbami całkowitymi, to trójka liczb (a,b,c) określona poprzez zależności (2) spełnia dane równanie.

Wykazaliśmy zatem, że wszystkie trójki (a,b,c) dodatnich liczb całkowitych spełniające dane równanie są opisane wzorami (2), gdzie d i l są dowolnymi dodatnimi liczbami całkowitymi.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie pary (a,b) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają równanie

$$ab = (a-b)^3.$$

Rozwiązanie

Zaczynamy tak samo, jak w rozwiązaniu zadania 1.

Niech $d = \mathrm{NWD}(a,b)$. Wówczas $a = dk$, $b = dl$ dla pewnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych k, l. Po podstawieniu tych zależności do danego równania uzyskujemy

$$kl = d(k-l)^3. \tag{3}$$

Dokładnie tak samo, jak w rozwiązaniu poprzedniego zadania, dowodzimy, że liczby $(k-l)^3$ i kl są względnie pierwsze. Ponadto z równości (3) wynika, że $(k-l)^3$ jest dodatnim dzielnikiem liczby kl. Wobec tego $(k-l)^3 = 1$, czyli $k = l+1$. Stąd po skorzystaniu w zależności (3) uzyskujemy $d = kl = (l+1)l$. A zatem

$$a = (l+1)^2l, \quad b = (l+1)l^2. \tag{4}$$

Tak jak w poprzednim przykładzie sprawdzamy, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej l określone wzorami (4) pary (a,b) spełniają wyjściowe równanie.

Zobaczymy teraz, jak metodę tę można wykorzystać w przypadku jednego z najbardziej znanych równań w liczbach całkowitych.

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie *trójkąty pitagorejskie*, czyli wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych, które są długościami boków trójkąta prostokątnego.

Rozwiązanie

Jeśli przez a, b oznaczymy długości przyprostokątnych, a przez c długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, to w myśl twierdzenia Pitagorasa

$$a^2+b^2=c^2.$$

Chcemy wyznaczyć wszystkie rozwiązania tego równania w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c. Zaczynamy zatem tak, jak w poprzednich przykładach.

Oznaczmy $d=\mathrm{NWD}(a,b,c)$. Wówczas $a=dx$, $b=dy$, $c=dz$ dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x, y, z, których największy wspólny dzielnik jest równy 1. Dane równanie przybiera wtedy postać

$$x^2+y^2=z^2. \tag{5}$$

Zauważmy, że *każde dwie* spośród liczb x, y, z są względnie pierwsze. Istotnie, gdyby np. liczby x i y miały wspólny dzielnik pierwszy p, to na mocy równości (5) liczba z także byłaby podzielna przez p. To jednak przeczy temu, że $\mathrm{NWD}(x,y,z)=1$.

Ponadto zauważmy, że spośród liczb x, y jedna jest parzysta, a druga nieparzysta. Istotnie, gdyby obie były nieparzyste, to liczba x^2+y^2 byłaby parzysta i niepodzielna przez 4, a więc nie mogłaby być kwadratem liczby całkowitej. Z kolei obie liczby x i y nie mogą być parzyste, bo są względnie pierwsze.

Bez straty ogólności przyjmijmy zatem, że liczba x jest nieparzysta, a y — parzysta. Wtedy liczba z jest nieparzysta. W szczególności, liczby $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}(z+x)$ oraz $\frac{1}{2}(z-x)$ są całkowite.

Przepiszmy teraz równanie (5) w postaci

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{z+x}{2}\cdot\frac{z-x}{2}. \tag{6}$$

Zauważmy, że największy wspólny dzielnik liczb $\frac{1}{2}(z+x)$ oraz $\frac{1}{2}(z-x)$ jest równy 1. Istotnie, jeśli q jest wspólnym dzielnikiem obu tych liczb, to q dzieli zarówno ich sumę jak i ich różnicę. Wobec tego $q\,|\,x$ oraz $q\,|\,z$, a skoro liczby x i z są względnie pierwsze, to $q=1$.

Iloczyn $t\cdot u$ dwóch względnie pierwszych liczb całkowitych t i u jest kwadratem liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy oba czynniki t i u są kwadratami liczb całkowitych (każda liczba pierwsza wchodząca w skład rozkładu na czynniki pierwsze liczby $t\cdot u$ występuje w parzystej potędze i pojawia się tylko w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby t albo liczby u). Stąd wniosek, że

$$\frac{z+x}{2}=k^2, \qquad \frac{z-x}{2}=l^2$$

dla pewnych dodatnich, względnie pierwszych liczb całkowitych k, l takich, że $k>l$. Dodając i odejmując stronami te zależności, otrzymujemy odpowiednio

$$z=k^2+l^2, \quad x=k^2-l^2.$$

Z kolei ze związku (6) wynika natychmiast, że $y^2=4k^2l^2$, czyli $y=2kl$.

Liczby k, l są różnej parzystości, tzn. jedna z nich jest parzysta, a druga nieparzysta — w przeciwnym razie obie liczby x, z byłyby parzyste, a więc nie byłyby względnie pierwsze.

Zatem ostatecznie uzyskujemy

$$a=(k^2-l^2)d, \quad b=2kld, \quad c=(k^2+l^2)d, \tag{7}$$

gdzie d, k, l są dodatnimi liczbami całkowitymi, przy czym liczby k i l są względnie pierwsze, jedna z nich jest parzysta, a druga nieparzysta oraz $k>l$.

Z drugiej strony, bez trudu sprawdzamy, że trójkąt o bokach, których długości a, b, c są określone wzorami (7), jest prostokątny:

$$a^2+b^2=((k^2-l^2)^2+4k^2l^2)d^2=(k^2+l^2)^2d^2=c^2.$$

To kończy rozwiązanie zadania.

Można wykazać, że podstawiając do wzorów (7) wartości d, k, l, spełniające opisane wyżej warunki uzyskamy każdy trójkąt pitagorejski *dokładnie raz*.

Na koniec proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie pary (a,b) dodatnich liczb całkowitych, dla których $a^2b=(a-b)^4$.

Zadanie 5.

Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wyznacz wszystkie pary (a,b) dodatnich liczb całkowitych, dla których

$$\frac{a+b}{a-b}=2^n.$$

Zadanie 6.

Wyznacz wszystkie pary (a,b) dodatnich liczb całkowitych, dla których $a+b=(a-b)^3$.

Zadanie 7. (VI OMG, zawody I stopnia)

Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby nieparzyste a i b spełniające równanie $a^2-b^3=4$.

Waldemar Pompe

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Różnica kwadratów

12. *Odpowiedź:* 9. Pomnóż licznik i mianownik każdego z ułamków przez różnicę pierwiastków występujących w jego mianowniku.

13. *Odpowiedź:* Wszystkie trójki postaci (a,a,c) dla dodatnich liczb nieparzystych a i c. Przekształć dane równanie do postaci $a^2-b^2=c(a-b)$ i skorzystaj ze wzoru na różnicę kwadratów.

14. *Odpowiedź:* $n=2011$. Przekształć dane nierówności do postaci $2010^2<n^2-100<2011^2$ i rozwiąż każdą z nich osobno.

15. Postępuj podobnie jak w zadaniu 9.

16. *Odpowiedź:* Nie istnieją. Uzasadnij, że jeżeli liczby x i y są tej samej parzystości, to liczba x^4-y^4 jest podzielna przez 16.

Chodź, pomaluj mi płaszczyznę!

2. *Odpowiedź:* 2. Uzasadnij, że jeśli płaszczyzna jest pokolorowana trzema kolorami, to istnieje okrąg przechodzący przez co najmniej trzy różnokolorowe punkty.

3. *Odpowiedź:* Można użyć dowolnie wielu kolorów. Wybierz dowolną prostą i pokoloruj każdy jej punkt na inny kolor.

„Kwadrat" redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk.
Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omj@gmail.com Nakład: 2000 egz.

Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

Kwadrat

Nr 20
wrzesień 2017
ISSN 2300-0708

Gazetka Olimpiady Matematycznej Juniorów

Między kwadratami

W niektórych zadaniach olimpijskich należy stwierdzić, czy liczba pewnej postaci może być kwadratem liczby całkowitej. Jedną z metod, która pozwala udzielić negatywnej odpowiedzi jest zauważenie, że liczba danej postaci jest zawarta między kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych — wtedy nie może być kwadratem liczby całkowitej. Spójrzmy na przykłady.

Zadanie 1.

Wykaż, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba n^2+n+1 jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzą nierówności

$$n^2 < n^2+n+1 < n^2+2n+1 = (n+1)^2\,.$$

Jeśli zatem $n^2+n+1=k^2$ dla pewnej dodatniej liczby k, to $n<k<n+1$. Stąd wniosek, że liczba k nie jest całkowita, a co za tym idzie liczba n^2+n+1 nie może być kwadratem liczby całkowitej. To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.

Udowodnij, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba n^2+3n+1 jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n zachodzą nierówności

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 < n^2+3n+1 < n^2+4n+4 = (n+2)^2\,.$$

Stąd wniosek, że liczba n^2+3n+1 nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. (X OMG, zawody III stopnia)

Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b, że liczby

$$a^2+2b+1 \quad \text{oraz} \quad b^2+2a+1$$

są kwadratami liczb naturalnych. Wykaż, że $a=b$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że liczby a i b są różne. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że $a>b$. Wtedy mamy

$$a^2 < a^2+2b+1 < a^2+2a+1 = (a+1)^2\,.$$

Wobec tego liczba a^2+2b+1 nie może być kwadratem liczby całkowitej. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $a=b$, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba n^4+2n^3-3 jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie

Dla $n=1$ dana liczba jest równa 0, więc jest kwadratem liczby całkowitej. Dla $n>1$ mamy

$$(n^2+(n-1))^2 = n^4+2n^2(n-1)+(n-1)^2 = \\ = n^4+2n^3-n^2-2n+1 < n^4+2n^3-3\,,$$

gdyż $n^2+2n \geqslant 2^2+2\cdot 2>4$. Ponadto

$$n^4+2n^3-3 < n^4+2n^3+n^2 = (n^2+n)^2.$$

W takim razie dla $n>1$ zachodzą nierówności

$$(n^2+n-1)^2 < n^4+2n^3-3 < (n^2+n)^2,$$

co oznacza, że dana w treści zadania liczba nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Ostatecznie otrzymujemy, że dana liczba jest kwadratem liczby całkowitej jedynie dla $n=1$, co kończy rozwiązanie zadania.

Jak nietrudno się domyślić, metodę „wrzucania między kwadraty” można także zastosować dla innych potęg, np. dla sześcianów.

Zadanie 5.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych, dla których spełnione jest równanie $x^3=y^3+2y^2+1$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$y^3+2y^2+1 = y^3+3y^2+3y+1-y^2-3y = (y+1)^3-y(y+3).$$

Dla dowolnej liczby y zachodzi nierówność

$$y^3 < y^3+2y^2+1 = x^3.$$

Ponadto jeśli $y\leqslant -4$ lub $y>0$, to

$$x^3 = (y+1)^3-y(y+3) < (y+1)^3,$$

gdyż liczba $y(y+3)$ jest dodatnia. W takim razie

$$y^3 < x^3 < (y+1)^3\,,$$

a więc dane w zadaniu równanie nie ma w tym przypadku rozwiązań w liczbach całkowitych.

Pozostał nam do rozpatrzenia przypadek, gdy y jest jedną z liczb -3, -2, -1, 0. Podstawiając kolejno te wartości do danego równania, stwierdzamy, że:

- jeśli $y=-3$, to $x^3=-8$, czyli $x=-2$;
- jeśli $y=-2$, to $x^3=1$, czyli $x=1$;
- jeśli $y=-1$, to $x^3=2$, co nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych;
- jeśli $y=0$, to $x^3=1$, czyli $x=1$.

Ostatecznie otrzymujemy trzy pary (x,y) spełniające dane równanie:

$$(-2,-3)\,,\quad (1,-2)\,,\quad (1,0)\,.$$

Na koniec proponujemy Czytelnikom kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

mFundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Zadanie 6.

Wykaż, że nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczba $n^2+9n+20$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 7.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) dodatnich liczb całkowitych, dla których liczby

$$x^2+4y \quad \text{oraz} \quad y^2+4x$$

są kwadratami liczb całkowitych.

Zadanie 8.

Wyznacz wszystkie pary (x,y) dodatnich liczb całkowitych, dla których $x^2=y^4+y^2+y+1$.

Zadanie 9. (LXIV OM, zawody III stopnia)

Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych x, y, dla których $x^4+y=x^3+y^2$.

Zadanie 10. (LXVIII OM, zawody I stopnia)

Dane są liczby całkowite a, b, c. Udowodnij, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba

$$n^3+an^2+bn+c$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Michał Kieza

Dorysujmy równoległobok

W niektórych konfiguracjach geometrycznych pojawiają się zależności metryczne, np. równości kątów lub odcinków, które pozornie nie mają ze sobą nic wspólnego. Warto wtedy spróbować *przenieść* odpowiednie wielkości w inne miejsca rysunku, aby powiązać ze sobą dane zależności.

Dobrym narzędziem do *przenoszenia* odcinków i kątów w inne miejsca rysunku jest symetria środkowa. Często odbicie jednego punktu względem innego stanowi istotny krok w kierunku rozwiązania zadania. To sprowadza się do narysowania *równoległoboku*.

W następującym twierdzeniu ujętych jest kilka wygodnych charakteryzacji równoległoboku.

Twierdzenie

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ (rys. 1). Następujące warunki są równoważne (tzn. z każdego z poniższych warunków wynikają wszystkie pozostałe):

(a) $ABCD$ ma środek symetrii;
(b) odcinki AC i BD mają wspólny środek;
(c) $AB=CD$ oraz $AD=BC$;
(d) $AB=CD$ oraz $AB \parallel CD$;
(e) $AB \parallel CD$ oraz $AD \parallel BC$.

Nietrudny dowód można przeprowadzić w oparciu o cechy przystawania trójkątów. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do książeczki Waldemara Pompe *Wokół obrotów, przewodnik po geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA (twierdzenie 4.1).

Zadanie 1.

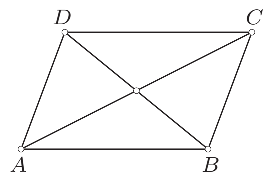
Wewnątrz czworokąta $ABCD$ znajduje się taki punkt P, że $AP=BP$, $CP=DP$, $\sphericalangle APB=\sphericalangle CPD=90^\circ$. Wykaż, że trójkąty APD oraz BPC mają równe pola.

Rozwiązanie

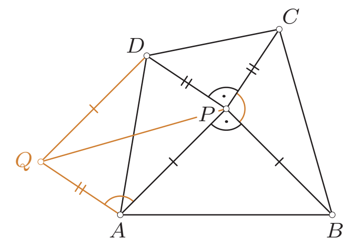
Oznaczmy przez Q taki punkt, że czworokąt $APDQ$ jest równoległobokiem (rys. 2). Wtedy $AQ=DP=CP$, a ponadto $AP=BP$ oraz

$$\sphericalangle PAQ=180^\circ-\sphericalangle APD=\sphericalangle BPC,$$

skąd wniosek, że trójkąty PAQ oraz BPC są przystające (cecha bok–kąt–bok). W szczególności trójkąty te mają równe pola. Co więcej, trójkąty PAQ oraz APD także mają równe pola, gdyż czworokąt $APDQ$ jest równoległobokiem. To kończy rozwiązanie zadania.



rys. 1



rys. 2

W zadaniu 1 mieliśmy do udowodnienia równość pól trójkątów o równych podstawach AP i BP. Stąd pomysł przemieszczenia jednego z nich tak, aby podstawy się pokryły. Okazało się, że powstał w ten sposób równoległobok $APDQ$, od którego mogliśmy rozpocząć rozumowanie.

Zadanie 2. (Facebookowa Liga OMG, zadanie 12.)

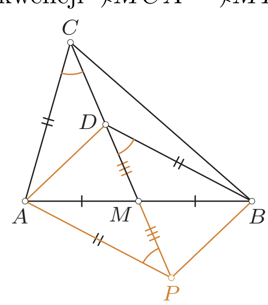
Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Na odcinku CM znajduje się taki punkt D, że $AC=BD$. Wykaż, że $\sphericalangle MCA=\sphericalangle MDB$.

Rozwiązanie

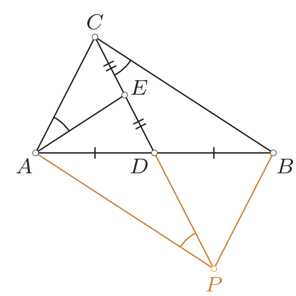
Oznaczmy przez P punkt symetryczny do punktu D względem punktu M (rys. 3), czyli taki punkt płaszczyzny, że czworokąt $ADBP$ jest równoległobokiem. Stąd dostajemy równości

$$BD=AP \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle MDB=\sphericalangle MPA.$$

W połączeniu z założeniem $AC=BD$ uzyskujemy więc $AC=AP$. Stąd wniosek, że $\sphericalangle MCA=\sphericalangle MPA$ i w konsekwencji $\sphericalangle MCA=\sphericalangle MDB$, co było do udowodnienia.



rys. 3



rys. 4

Rozwiążemy teraz innym sposobem zadanie przywołane w poprzednim numerze *Kwadratu*.

Zadanie 3. (IX OMG, zawody II stopnia)

W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest środkiem odcinka CD. Wykaż, że jeżeli $\sphericalangle CAE=\sphericalangle BCD$, to $AC=CD$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez P punkt symetryczny do punktu C względem punktu D (rys. 4). Czworokąt $ACBP$ jest wówczas równoległobokiem, wobec czego

$$\sphericalangle BCD=\sphericalangle APC.$$

To w połączeniu z założeniem zadania pozwala wywnioskować, że $\sphericalangle CAE = \sphericalangle APC$. Trójkąty ECA oraz ACP są więc podobne (cecha kąt–kąt). Wobec tego

$$\frac{EC}{AC} = \frac{AC}{PC},$$

czyli $AC^2 = EC \cdot PC$. Ponadto $EC = \frac{1}{2}CD$ i $PC = 2 \cdot CD$, a zatem $EC \cdot PC = CD^2$ i w konsekwencji $AC^2 = CD^2$. Ostatecznie $AC = CD$, co kończy rozwiązanie zadania.

W dwóch ostatnich zadaniach równoległoboki konstruowaliśmy w oparciu o warunek (b) z przywołanego twierdzenia. W kolejnych dwóch przykładach wykorzystamy warunek (d), tj. zamiast symetrii środkowej rozważymy równoległe przesunięcie odcinka.

Zadanie 4. (Obóz Naukowy OMG, rok 2015)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Na bokach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty D i E, że $AB = BD = DE$ oraz $AD = CE$. Wyznacz miarę kąta ACB.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez P taki punkt, że czworokąt $ABPD$ jest równoległobokiem (rys. 5). Wówczas $BP = AD = CE$ oraz $\sphericalangle PBE = \sphericalangle ECD$. Ponadto

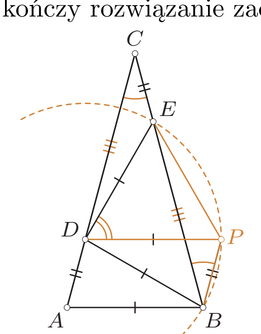
$$BE = BC - CE = AC - AD = CD,$$

skąd wniosek, że trójkąty BPE oraz CED są przystające (cecha bok–kąt–bok). Wobec tego $PE = ED$, co w połączeniu z $ED = AB = PD$ oznacza, że trójkąt DPE jest równoboczny.

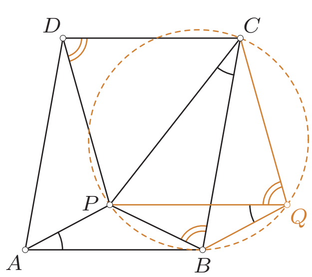
Z równości $BD = PD = ED$ wynika, że punkt D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BPE. Stąd na mocy zależności między kątem wpisanym PBE oraz kątem środkowym PDE w tym okręgu, otrzymujemy

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle PBE = \tfrac{1}{2}\sphericalangle PDE = \tfrac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ,$$

co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 5



rys. 6

Pomysł na powyższe rozumowanie można objaśnić następująco: obecna w warunkach zadania równość odcinków $AB = DE$ była trudno uchwytna, w związku z czym przesunęliśmy równolegle odcinek AB tak, aby miał wspólny koniec z odcinkiem DE.

Zadanie 5.

Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym spełniona jest równość $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$. Udowodnij, że $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PDC$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez Q taki punkt, że czworokąt $ABQP$ jest równoległobokiem (rys. 6). Zauważmy, ze wówczas $CD = AB = PQ$ oraz $CD \parallel AB \parallel PQ$, a zatem czworokąt $CDPQ$ również jest równoległobokiem.

Równości $\sphericalangle PQB = \sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB$ prowadzą do wniosku, że na czworokącie $BPCQ$ można opisać okrąg (obydwa punkty C i Q leżą po tej samej stronie prostej PB — przeciwnej niż punkt A). Wobec tego również $\sphericalangle PBC = \sphericalangle PQC = \sphericalangle PDC$, przy czym ostatnia równość wynika z faktu, że $CDPQ$ jest równoległobokiem. To kończy rozwiązanie zadania.

Tym razem dana równość kątów była trudno uchwytna z tego względu, że punkty A i C znajdują się po przeciwnych stronach prostej PB. Stąd pomysł, by przenieść jeden z nich na drugą stronę tej prostej i uzyskać czwórkę punktów leżących na jednym okręgu.

Na koniec proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy tradycyjnie w kolejnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 6. (VIII OMG, zawody III stopnia)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Punkt M jest środkiem boku AB. Na odcinkach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty P i Q, że

$$AP = PQ = QB.$$

Wykaż, że $\sphericalangle PMQ = 90^\circ$.

Zadanie 7. (Obóz Naukowy OMG, rok 2015)

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie H. Punkty K i L są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B, a punkt M jest środkiem odcinka AB. Okręgi opisane na trójkątach ABH i CKL przecinają się w punkcie P różnym od H. Wykaż, że punkty C, M, P leżą na jednej prostej.

Zadanie 8. (Obóz Naukowy OMG, rok 2015)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Na bokach BC i AC leżą odpowiednio takie punkty D i E, że $BD = DE = EA$. Udowodnij, że $\sphericalangle ABE = 30^\circ$.

Zadanie 9. (Obóz Naukowy OMG, rok 2013)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach BC i DA. Punkty P i Q są środkami odpowiednio przekątnych AC i BD tego trapezu. Wykaż, że jeżeli $\sphericalangle DAQ = \sphericalangle BAC$, to $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABP$.

Zadanie 10. (IV OMG, zawody II stopnia)

Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE. Na prostej k obieramy takie punkty K, L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

Zadanie 11. (X OMG, zawody III stopnia)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 90^\circ.$$

Punkt M jest środkiem boku CD. Znając długości odcinków AD oraz BC, które wynoszą odpowiednio a oraz b, oblicz wartość wyrażenia $[ABM] - [DAM] - [BCM]$.

Uwaga. Symbol $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

Zadanie 12. (LIII OM, zawody I stopnia)

Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF. Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$.

Łukasz Bożyk

Piękne umysły

W dniach 6–12 kwietnia br. odbyła się w Zurychu VI Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt (European Girls' Mathematical Olympiad, EGMO). Polskę reprezentowały:

- Aleksandra Cynk, V LO w Krakowie,
- Katarzyna Kępińska, VIII LO w Katowicach,
- Bogna Pawlus, LO w Milówce,
- Barbara Zięba, III LO we Wrocławiu.

Wszystkie wymienione dziewczęta były w przeszłości laureatkami OMG.

Pierwszy raz na temat EGMO pisaliśmy w *Kwadracie* nr 5 (czerwiec 2012), zaraz po zakończeniu pierwszej edycji zawodów. Wówczas rywalizowały ze sobą uczestniczki z 19 krajów. Od tego czasu popularność olimpiady dla dziewcząt systematycznie rosła. O możliwość dołączenia do zawodów EGMO zaczęło ubiegać się wiele państw, także spoza Europy.

W bieżącym roku w szranki stanęło 168 dziewcząt z 43 krajów, w tym 38 uczestniczek z 10 krajów pozaeuropejskich. Zaledwie w ciągu sześciu lat swojego istnienia olimpiada dla dziewcząt stała się jednym z najbardziej prestiżowych i rozpoznawalnych konkursów matematycznych na świecie.

Tegoroczne zawody odbyły się 8 i 9 kwietnia. Każdego dnia dziewczęta rozwiązywały trzy zadania w czasie 4,5 godziny. Za każde zadanie można było otrzymać do 7 punktów. Zaledwie dwóm uczestniczkom udało się zebrać komplet punktów. Wyczynu tego dokonały Olha Shevchenko z Ukrainy oraz Qi Qi — reprezentantka Stanów Zjednoczonych.

Nasze dziewczęta spisały się znakomicie. Wszystkie zdobyły srebrne medale. Najlepszy wynik uzyskała Kasia Kępińska, zdobywając 24 punkty i zajmując 24. miejsce w klasyfikacji indywidualnej. Ola Cynk i Basia Zięba zdobyły po 20 punktów, co dało im 37. miejsce. Bogna Pawlus zakończyła zawody na 41. miejscu z 19 punktami. W klasyfikacji drużynowej Polska zajęła wysokie 8. miejsce, ex aequo z Kazachstanem i Wielką Brytanią.

Na zakończenie przyjrzyjmy się jednemu z zadań, z którym zmagały się uczestniczki zawodów.

Zadanie

W czworokącie wypukłym $ABCD$ spełnione są zależności $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CDA$. Punkty Q i R leżą odpowiednio na odcinkach BC i CD. Prosta QR przecina proste AB i AD odpowiednio w punktach P i S. Przypuśćmy, że $PQ = RS$. Punkt M jest środkiem odcinka BD, a punkt N — środkiem odcinka QR. Udowodnić, że punkty M, N, A i C leżą na jednym okręgu (rys. 7).

Rozwiązanie

Ponieważ punkt N jest środkiem odcinka QR oraz $PQ = RS$, więc N jest też środkiem odcinka PS. Z kolei odcinki PS oraz QR są przeciwprostokątnymi w trójkątach prostokątnych APS oraz CQR. Stąd wniosek, że

$$\sphericalangle ANP = 2\sphericalangle ASP \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle PNC = 2\sphericalangle PRC\,.$$

Kąty PRC i SRD są wierzchołkowe, a suma dwóch kątów wewnętrznych trójkąta RSD przy wierzchołkach R i S jest równa kątowi zewnętrznemu przy wierzchołku D. Stąd otrzymujemy równości

$$\sphericalangle ASP + \sphericalangle PRC = \sphericalangle DSR + \sphericalangle SRD = \sphericalangle CDA.$$

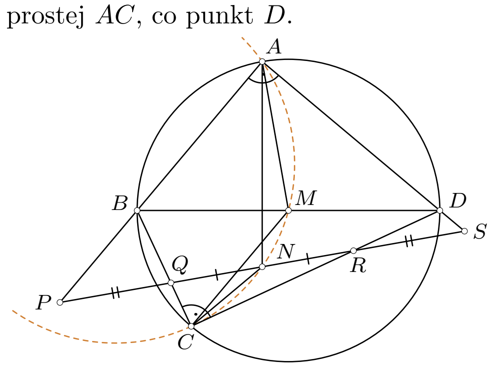
Wobec tego

$$(1)\quad \sphericalangle ANP + \sphericalangle PNC = 2(\sphericalangle ASP + \sphericalangle PRC) = 2\sphericalangle CDA.$$

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, więc $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA = 180^\circ$. Z treści zadania wiemy jednak, że $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CDA$, skąd wniosek, że $\sphericalangle CDA < 90^\circ$. Z równości (1) wynika zatem, że $\sphericalangle ANP + \sphericalangle PNC < 180^\circ$. To pozwala stwierdzić, że punkt N leży po tej samej stronie prostej AC, co punkt D oraz

$$\sphericalangle ANC = \sphericalangle ANP + \sphericalangle PNC = 2\sphericalangle CDA\,.$$

Z kolei kąty BAD oraz BCD są proste, a zatem punkt M jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Z nierówności $\sphericalangle CDA < 90^\circ$ wynika więc, że $\sphericalangle AMC = 2\sphericalangle ADC$ oraz punkt M leży po tej samej stronie prostej AC, co punkt D.



rys. 7

Łącząc wyżej otrzymane zależności, uzyskujemy

$$\sphericalangle ANC = 2\sphericalangle ADC = \sphericalangle AMC\,,$$

a ponadto punkty N i M leżą po tej samej stronie prostej AC (co punkt D). Stąd wniosek, że punkty A, M, N, C leżą na jednym okręgu, co kończy rozwiązanie zadania.

Tomasz Cieśla

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Dorysujmy środek odcinka

6. Dorysuj środek jednego z ramion trapezu.

7. Dorysuj środek jednego z boków AB lub CD.

8. Dorysuj środek odcinka AB. Wykorzystaj zadanie 2.

9. Dorysuj środki odcinków AE, BD. Wykorzystaj zadanie 2.

10. Dorysuj środki krawędzi AB, CD i uzasadnij, że odcinek łączący dorysowane punkty ma długość 2.

11. Dorysuj środki odcinków AC, BC i zauważ pewną parę trójkątów przystających.

W liczbach całkowitych

4. *Odpowiedź:* $(a,b) = ((l+1)^3 l, (l+1)^2 l^2)$, gdzie l jest liczbą całkowitą dodatnią lub $(a,b) = ((l-1)^3 l, (l-1)^2 l^2)$, gdzie l jest liczbą całkowitą większą od 1. Postępuj podobnie, jak w rozwiązaniu zadania 2.

5. *Odpowiedź:* $(a,b) = (d(2^n+1), d(2^n-1))$, gdzie d jest dodatnią liczbą całkowitą. Skróć ułamek stojący po lewej stronie przez $d = \mathrm{NWD}(a,b)$. Uzasadnij, że jeśli dodatnie liczby całkowite k, l są względnie pierwsze, to $\mathrm{NWD}(k-l, k+l)$ równa się 1 lub 2.

6. *Odpowiedź:* $(a,b) = (\frac{1}{2}(d^3+d), \frac{1}{2}(d^3-d))$, gdzie $d > 1$ jest liczbą całkowitą. Niech $a = dk$, $b = dl$. Postępuj podobnie, jak w rozwiązaniu zadania 2. Rozpatrz przypadki w zależności od wartości $\mathrm{NWD}(k-l, k+l)$.

7. Przepisz dane równanie w postaci $b^3 = (a-2)(a+2)$, a następnie uzasadnij, że liczby $a-2$ i $a+2$ są względnie pierwsze.

„Kwadrat" redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk.
Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: `kwadrat.omj@gmail.com` Nakład: 2000 egz.

Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Juniorów

Nr 21
czerwiec 2018

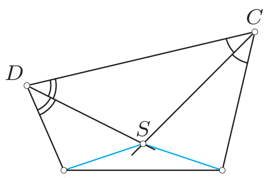
ISSN 2300-0708

Dorysujmy lustrzane odbicie

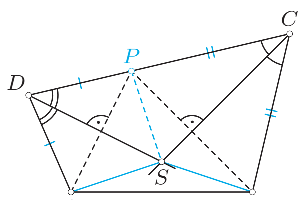
W kolejnym artykule z serii *Dorysujmy...* zajmiemy się konfiguracjami, w których pomocna jest *symetria osiowa*. Warto ją rozważyć wtedy, gdy jednym z elementów rysunku jest *dwusieczna* pewnego kąta, czyli jego oś symetrii. Oś ta jest naturalnym kandydatem na prostą, względem której można odbić punkty leżące na ramionach kąta. Ich obrazy znajdują się wówczas na drugim ramieniu.

Zadanie 1. (VIII OMG, zawody I stopnia)

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD+BC=CD$. Dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie S (rys. 1). Udowodnij, że $AS=BS$.



rys. 1



rys. 2

Rozwiązanie

Oznaczmy przez P punkt symetryczny do punktu A względem dwusiecznej kąta CDA (rys. 2). Wówczas punkt P leży na odcinku CD oraz $PD=AD$. Stąd

$$PC=CD-PD=CD-AD=BC\,.$$

W trójkącie równoramiennym PBC dwusieczna kąta przy wierzchołku C jest symetralną podstawy BP. Wobec tego punkty B i P są symetryczne względem dwusiecznej kąta BCD. W związku z tym

$$AS=PS=BS\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2. (III OMG, zawody III stopnia)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC>BC$ (rys. 3). Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu B na dwusieczną kąta ACB. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wiedząc, że

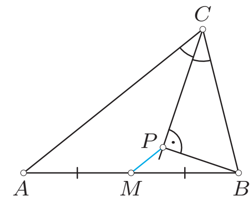
$$BC=a,\quad CA=b,\quad AB=c,$$

oblicz długość odcinka PM.

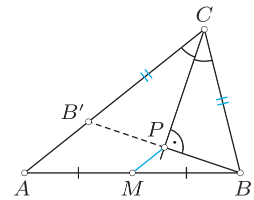
Rozwiązanie

Niech B' będzie punktem symetrycznym do B względem prostej CP (rys. 4). Wówczas punkt B' leży na odcinku AC oraz $BC=B'C$. Ponadto punkt P jest środkiem odcinka BB'.

Wobec tego odcinek PM jest linią środkową w trójkącie ABB', a więc jego długość jest równa połowie długości odcinka $B'A$. Dowód tej własności można znaleźć w książeczce Waldemara Pompe *Wokół obrotów, przewodnik po geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA (twierdzenie 4.5).



rys. 3



rys. 4

Stąd otrzymujemy

$$PM=\tfrac{1}{2}B'A=\tfrac{1}{2}(CA-B'C)=\tfrac{1}{2}(CA-BC)=\tfrac{1}{2}(b-a)\,,$$

co kończy rozwiązanie.

Symetrię osiową warto zastosować także w innych sytuacjach. Przyjrzyjmy się następującemu zadaniu.

Zadanie 3.

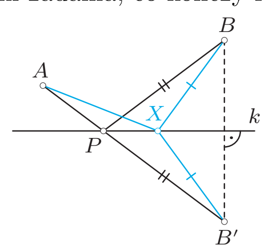
Punkty A i B znajdują się po tej samej stronie prostej k. Wyznacz taki punkt P leżący na prostej k, dla którego suma $AP+BP$ przyjmuje najmniejszą wartość.

Rozwiązanie

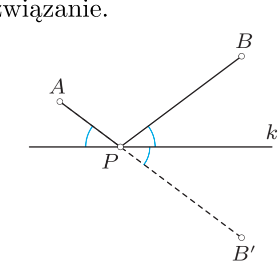
Oznaczmy przez B' obraz punktu B w symetrii względem prostej k, a przez P — punkt przecięcia odcinka AB' z prostą k (rys. 5). Wówczas dla każdego punktu X prostej k spełnione są zależności

$$AX+BX=AX+B'X\geqslant AB'=AP+B'P=AP+BP.$$

Stąd wynika, że tak wyznaczony punkt P spełnia warunki zadania, co kończy rozwiązanie.



rys. 5



rys. 6

Zauważmy, że skonstruowany powyżej punkt P ma tę własność, że kąty, jakie tworzą odcinki AP i BP z prostą k, są równe (rys. 6). Ta własność sprawia, że obraz symetryczny B' punktu B względem prostej k leży na prostej AP. Zobaczmy, jak to spostrzeżenie można wykorzystać w niektórych zadaniach.

Zadanie 4.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ABC=90^\circ$ (rys. 7). Punkt M jest środkiem odcinka AC. Punkt P wybrano na boku BC w taki sposób, że

$$\sphericalangle APB=\sphericalangle CPM\,.$$

Wykaż, że $PC=2\cdot PB$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

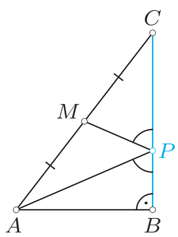
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Rozwiązanie

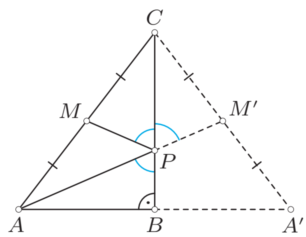
Niech A' i M' będą punktami symetrycznymi odpowiednio do punktów A i M względem prostej BC (rys. 8). Wówczas, ponieważ punkt M jest środkiem odcinka AC, więc punkt M' jest środkiem odcinka $A'C$. Ponadto

$$\sphericalangle CPM' = \sphericalangle CPM = \sphericalangle APB,$$

skąd wniosek, że punkty A, P, M' leżą na jednej prostej. Punkt P jest zatem punktem przecięcia środkowych AM' i CB w trójkącie $AA'C$.



rys. 7



rys. 8

Wiadomo z kolei, że środkowe w dowolnym trójkącie przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku $2:1$, patrząc od wierzchołka trójkąta. Dowód tej własności także można znaleźć w książeczce Waldemara Pompe *Wokół obrotów, przewodnik po geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Szkolne OMEGA (twierdzenie 4.11). Stosując to twierdzenie do trójkąta $AA'C$, uzyskujemy natychmiast $PC = 2 \cdot PB$, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 5. (Obóz Naukowy OMG, rok 2015)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90°$ (rys. 9). Na bokach BC, CA, AB tego trójkąta wybrano odpowiednio takie punkty D, E, F, że

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDF, \ \sphericalangle BFD = \sphericalangle AFE, \ \sphericalangle AEF = \sphericalangle BEC.$$

Udowodnij, że $AD + DF = BE + EF$.

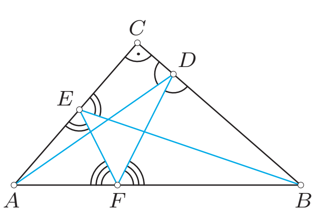
Rozwiązanie

Oznaczmy przez A' i B' punkty symetryczne do punktów A i B odpowiednio względem prostych BC i AC (rys. 10). Wówczas czworokąt $ABA'B'$ jest rombem, gdyż jego przekątne mają wspólny środek i są prostopadłe. Ponieważ

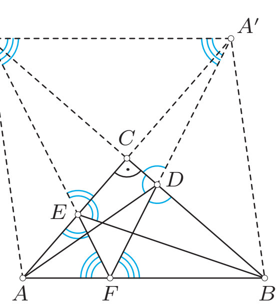
$$\sphericalangle BDF = \sphericalangle ADC = \sphericalangle A'DC,$$
$$\sphericalangle AEF = \sphericalangle BEC = \sphericalangle B'EC,$$

więc punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach $A'F$ i $B'F$. Wobec tego

$$AD + DF = A'D + DF = A'F,$$
$$BE + EF = B'E + EF = B'F.$$



rys. 9



rys. 10

Proste AB i $A'B'$ są równoległe, a zatem

$$\sphericalangle A'B'F = \sphericalangle AFB' = \sphericalangle BFA' = \sphericalangle B'A'F.$$

Wobec tego $A'F = B'F$, co w połączeniu z otrzymanymi wcześniej równościami kończy dowód.

Tradycyjnie proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 6.

Punkt M leży na dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku C trójkąta ABC. Udowodnij, że

$$AM + BM \geqslant AC + BC.$$

Zadanie 7.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC, przy czym

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABE = \sphericalangle ACB$$

oraz $AD + DE + EB = AC$. Wyznacz miarę kąta ACB.

Zadanie 8.

Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu C odpowiednio na proste AI i BI. Znając długości boków trójkąta ABC, oblicz długość odcinka PQ.

Zadanie 9.

Punkt M wybrano na średnicy AB okręgu ω. Prosta nachylona do prostej AB pod kątem $45°$ przechodzi przez punkt M i przecina okrąg ω w punktach C i D. Wykaż, że wartość $CM^2 + DM^2$ nie zależy od wyboru punktu M.

Zadanie 10.

Dany jest okrąg ω o średnicy 1 oraz łamana s o końcach należących do tego okręgu, której długość jest mniejsza od 1. Wykaż, że pewna średnica okręgu ω nie ma z łamaną s żadnych punktów wspólnych.

Zadanie 11. (Facebookowa Liga OMG, zad. 39)

Punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC. Symetralna odcinka CM przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że $AK^2 + BL^2 = KL^2$.

Zadanie 12. (Obóz Naukowy OMG, rok 2016)

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 30°$. Na bokach BC, AC znajdują się odpowiednio takie punkty D i E, że

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle AEB = \sphericalangle DEC.$$

Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie K, a odcinki DE i CK przecinają się w punkcie L. Udowodnij, że $AD + DL = BE + EL$.

Łukasz Bożyk

Najmniejsze rozwiązanie

Niektóre równania nie mają rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych. Powodów ku temu może być wiele. Czasami algebraiczna postać równania pozwala zastosować następujące sprytne rozumowanie.

Przypuśćmy, że dane równanie ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych. Spośród wszystkich takich rozwiązań wybierzmy rozwiązanie *najmniejsze*. Jeśli posługując się tym rozwiązaniem będziemy umieli wskazać rozwiązanie jeszcze *mniejsze*, to uzyskamy sprzeczność! W takiej sytuacji równanie nie może mieć rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

Co znaczy „najmniejsze rozwiązanie” i jaka postać równania pozwala wskazać rozwiązanie jeszcze mniejsze? Przyjrzyjmy się następującym przykładom.

Zadanie 1.

Wykaż, że równanie $x^3+2y^3=4z^3$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że dane równanie posiada co najmniej jedno rozwiązanie (x,y,z) w dodatnich liczbach całkowitych. Spośród wszystkich takich trójek (x,y,z) wybierzmy tę, dla której liczba $x+y+z$ jest najmniejsza.

Zauważmy teraz, że skoro liczby $2y^3$ i $4z^3$ są parzyste, to liczba x dzieli się przez 2. Wobec tego możemy napisać $x=2x_1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej x_1. Wstawiając ostatnią zależność do wyjściowego równania i dzieląc dane równanie stronami przez 2, otrzymujemy

$$4x_1^3+y^3=2z^3.$$

W takim razie, podobnie jak wyżej, liczba y jest parzysta, skąd $y=2y_1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej y_1. Wstawiając tę równość do powyższego równania i dzieląc przez 2, dostajemy

$$2x_1^3+4y_1^3=z^3.$$

I analogicznie $z=2z_1$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej z_1. Stąd uzyskujemy

$$x_1^3+2y_1^3=4z_1^3.$$

Wobec tego trójka (x_1,y_1,z_1) także jest rozwiązaniem danego w treści zadania równania oraz

$$x_1+y_1+z_1=\frac{1}{2}(x+y+z)<x+y+z.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że dane równanie nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

Zadanie 2.

Wykaż, że równanie $x^2+y^2=3(z^2+t^2)$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z, t.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że istnieje rozwiązanie danego równania w liczbach całkowitych. Spośród wszystkich rozwiązań wybierzmy taką czwórkę (x,y,z,t), dla której suma $x+y+z+t$ jest najmniejsza.

Z danego równania wnioskujemy natychmiast, że liczba x^2+y^2 jest podzielna przez 3. Z kolei z równości

$$(3k)^2=9k^2=3\cdot(3k^2),$$
$$(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3\cdot(3k^2+2k)+1,$$
$$(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3\cdot(3k^2+4k+1)+1$$

wynika, że kwadraty liczb całkowitych podzielnych przez 3 dają resztę 0 z dzielenia przez 3, a niepodzielnych przez 3 — resztę 1.

Gdyby zatem któraś z liczb x lub y nie była podzielna przez 3, to liczba x^2+y^2 dawałaby resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 3. Skoro więc liczba x^2+y^2 dzieli się przez 3, to obie liczby x, y także dzielą się przez 3. Stąd

$$x=3x_1 \quad \text{oraz} \quad y=3y_1$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x_1 oraz y_1. Po wstawieniu obu powyższych zależności do danego równania, sprowadzamy je do postaci

$$3(x_1^2+y_1^2)=z^2+t^2.$$

Pozostaje zauważyć, że trójka (z,t,x_1,y_1) także spełnia dane równanie, a ponadto

$$z+t+x_1+y_1=z+t+\frac{1}{3}(x+y)<x+y+z+t.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, skąd wniosek, że dane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

Zadanie 3.

Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z, dla których $(3x+4y)(4x+5y)=7^z$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy przeciwnie, że takie liczby istnieją. Spośród wszystkich trójek (x,y,z) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają dane równanie, wybierzmy taką, dla której suma $x+y+z$ jest najmniejsza.

Zauważmy najpierw, że każdy z czynników po lewej stronie jest większy niż 1. Skoro prawa strona jest potęgą 7, to oba czynniki po lewej stronie muszą być potęgami liczby 7 o wykładnikach będących dodatnimi liczbami całkowitymi. W szczególności więc oba te czynniki są podzielne przez 7. W takim razie liczba

$$x+y=(4x+5y)-(3x+4y)$$

też dzieli się przez 7, a skąd wniosek, że liczba

$$y=(3x+4y)-3(x+y)$$

również dzieli się przez 7. Ostatecznie także liczba $x=(x+y)-y$ jest podzielna przez 7. Innymi słowy

$$x=7x_1 \quad \text{oraz} \quad y=7y_1$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych x_1 oraz y_1. Wstawiając te warunki do danego równania i dzieląc obie strony przez 49, otrzymujemy

$$(3x_1+4y_1)(4x_1+5y_1)=7^{z-2}.$$

Lewa strona uzyskanej zależności jest większa od 1, skąd wniosek, że wykładnik $z-2$ jest dodatni. Trójka $(x_1,y_1,z-2)$ jest więc rozwiązaniem danego równania w dodatnich liczbach całkowitych. Jednak

$$x_1+y_1+(z-2)=\frac{1}{7}(x+y)+(z-2)<x+y+z.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc dane równanie nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych.

Na koniec proponujemy Czytelnikom kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4.

Udowodnij, że równanie $2a^2+3b^2=c^2$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c.

Zadanie 5.

Wykaż, że równanie

$$x^2+2y^2=5(z^2+2t^2)$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z, t.

Zadanie 6.

Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, dla których zachodzą równości

$$a^2+6b^2=c^2 \quad \text{oraz} \quad b^2+6a^2=d^2.$$

Zadanie 7.

Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, n, dla których zachodzą równości

$$a^2+b^2=8n^2, \quad c^2+d^2=4n^2, \quad ac+bd=2n^2.$$

Zadanie 8.

Wykaż, że równanie $(x+3y)(3x+5y)=11^z$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z.

Zadanie 9.

Wyznacz wszystkie czwórki (x,y,z,t) liczb całkowitych, dla których $x^4+4y^4=2(z^4+4t^4)$.

Michał Kieza

Baltic Way 2017

W dniach 9–13 listopada 2017 w Sorø (Dania) odbyły się zawody *Baltic Way* 2017. Polskę reprezentowali:

- Jadwiga Czyżewska, XIV LO w Warszawie;
- Piotr Kowalewski, III LO w Gdyni;
- Stanisław Strzelecki, XIV LO w Warszawie;
- Radosław Żak, Katolickie Gimn. w Krakowie;
- Antoni Żewierżejew, III LO w Gdyni.

Skład ten wyłoniono na podstawie wyników LXVIII Olimpiady Matematycznej (2016/17). Przewodniczącym delegacji polskiej był Wojciech Nadara, natomiast zastępcą przewodniczącego — Beata Bogdańska.

Baltic Way to drużynowe zawody matematyczne, w których każdego roku biorą udział reprezentacje dziesięciu krajów (Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Litwy, Łotwy, Niemiec, Norwegii, Polski, Szwecji) oraz jednego miasta (Sankt Petersburga). W ciągu 4,5 godziny każdy zespół ma do rozwiązania 20 zadań (po 5 z działów: algebra, kombinatoryka, geometria i teoria liczb). Za każde z zadań można dostać maksymalnie 5 punktów, a więc łącznie można otrzymać do 100 punktów.

Nasza reprezentacja dobrze się spisała, zajmując trzecie miejsce z wynikiem 75 punktów. Zawody wygrała drużyna z Sankt Petersburga, zdobywając 85 punktów, a na drugim miejscu znalazła się drużyna z Niemiec, uzyskując 78 punktów.

Drużyna gospodarzy zajęła czwarte miejsce z wynikiem 68 punktów, rozwiązując jako jedyna trudne zadanie dwudzieste. Pozostałe kraje skandynawskie zajęły miejsca od 7 do 9 w następującej kolejności: Szwecja (60 punktów), Norwegia (58 punktów) oraz Finlandia (41 punktów).

Na zakończenie omówimy jedno zadanie z tych zawodów, którego rozwiązanie wydaje się proste, lecz, jak pokazują wyniki zawodów, okazało się ono trudne do zauważenia: jedynie cztery drużyny rozwiązały to zadanie w pełni poprawnie.

Zadanie

Czy istnieje skończony zbiór liczb rzeczywistych, których suma wynosi 2, suma ich kwadratów wynosi 3, suma ich sześcianów wynosi 4, …, oraz suma ich dziewiątych potęg wynosi 10?

Rozwiązanie

Udowodnimy, że taki zbiór nie istnieje.

Przypuśćmy, że istnieją liczby spełniające warunki zadania. Oznaczmy je przez $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Wtedy w szczególności:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=3,$$
$$a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3=4,$$
$$a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4=5.$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność

$$x^2+x^4\geqslant 2x^3,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=0$ lub $x=1$. Istotnie:

$$x^2+x^4-2x^3=x^2(1-2x+x^2)=x^2(1-x)^2\geqslant 0,$$

co dowodzi postulowanej nierówności. Równość natomiast ma miejsce jedynie wtedy, gdy $x^2(1-x)^2=0$, a więc dokładnie wtedy, gdy $x=0$ lub $x=1$.

Po podstawieniu do tej nierówności w miejsce x kolejno liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$, a następnie dodaniu uzyskanych n nierówności stronami, otrzymujemy

$$(a_1^2+a_1^4)+(a_2^2+a_2^4)+\ldots+(a_n^2+a_n^4)\geqslant$$
$$\geqslant 2(a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3)=2\cdot 4=8.$$

Jednak lewa strona tej zależności jest równa $3+5=8$. W związku z tym powyższa nierówność musi być równością, co implikuje, że wszystkie nierówności sumowane stronami muszą być równościami. Stąd wynika, że każda z liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ jest równa 0 lub 1.

Jednak wtedy zależność

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=3$$

implikuje, że wśród liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ są dokładnie trzy jedynki, podczas gdy z równości

$$a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4=5$$

wynika, że wśród tych samych liczb $a_1,a_2,\ldots,a_n$ jest dokładnie pięć jedynek. Uzyskaliśmy sprzeczność, skąd wynika, że liczby o postulowanej własności nie istnieją.

Kolejne zawody *Baltic Way* odbędą się w Sankt Petersburgu jesienią 2018 roku.

Wojciech Nadara

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Między kwadratami

6. Uzasadnij, że dana liczba leży pomiędzy kwadratami liczb $n+4$ i $n+5$.

7. *Odpowiedź:* Takie pary (x,y) nie istnieją. Postępuj analogicznie, jak w rozwiązaniu zadania 3.

8. *Odpowiedź:* $(x,y)=(2,1)$. Rozważ kwadraty liczb y^2 i y^2+1.

9. Zapisz dane równanie w postaci $(2y-1)^2=4x^4-4x^3+1$. Znajdź dwa kwadraty najbliższe liczbie $4x^4-4x^3+1$.

10. Załóż przeciwnie. Najpierw przyjmij $n=(2s)^2$ i rozważ kwadraty liczb $(2s)^3+as-1$ oraz $(2s)^3+as+1$ dla dużych wartości s. Wywnioskuj stąd, że $c=0$. Następnie przyjmij jako n odpowiednio dobraną liczbę pierwszą.

Dorysujmy równoległobok

Dorysuj taki punkt X, że równoległobokiem jest...

6. $AXBQ$. Zauważ, że APX jest równoboczny.

7. $AXBC$. Zauważ, że $AXBH$ jest wpisany w okrąg.

8. $BDEX$. Zauważ, że AEX jest równoboczny.

9. $AXBP$. Zauważ, że $AXBQ$ jest wpisany w okrąg.

10. $AEXD$. Rozważ pole tego czworokąta.

11. $BCXD$. Zauważ, że kąt ADX jest prosty.

12. $AEXG$. Poprowadź odcinki XB oraz XC.

„Kwadrat" redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk.
Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omj@gmail.com Nakład: 2000 egz.

Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

Kwadrat

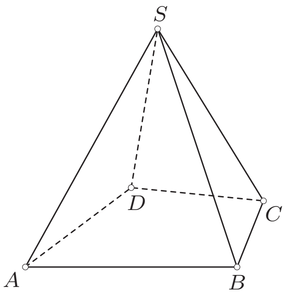
Gazetka Olimpiady Matematycznej Juniorów

Nr 22
wrzesień 2018

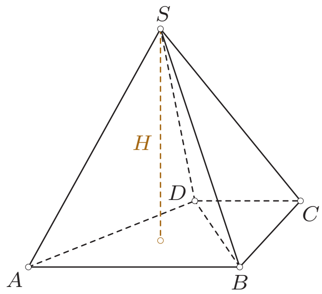
ISSN 2300-0708

Objętość ostrosłupa

Jeżeli punkt S, który nie leży w płaszczyźnie wielokąta $\mathcal{W}$, połączymy odcinkami z wierzchołkami tego wielokąta, to otrzymamy bryłę przestrzenną zwaną *ostrosłupem* o podstawie wielokąta $\mathcal{W}$ oraz wierzchołku S. Na rysunku 1 przedstawiono ostrosłup o podstawie czworokąta $ABCD$. Ostrosłup o podstawie trójkąta nazywamy *czworościanem*.



rys. 1



rys. 2

Ostrosłupy można wykorzystać przy konstruowaniu przeróżnych wielościanów oraz obliczaniu ich objętości. Przydatny jest wówczas wzór na objętość V ostrosłupa:

$$V=\frac{1}{3}\cdot[\mathcal{W}]\cdot H\,,$$

gdzie $[\mathcal{W}]$ oznacza pole wielokąta $\mathcal{W}$, a H — wysokość ostrosłupa, czyli odległość od punktu S do płaszczyzny, w której znajduje się wielokąt $\mathcal{W}$.

Wzór ten ma wiele zastosowań. Oto jedno z nich. Przypuśćmy, że podstawą ostrosłupa jest trapez $ABCD$, w którym boki AB i CD są równoległe oraz $CD=\frac{1}{2}AB$. Oznaczmy przez h wysokość trapezu $ABCD$. Wówczas

$$[ABD]=\frac{1}{2}AB\cdot h=CD\cdot h=2[BCD]\,.$$

Ostrosłupy $ABDS$ oraz $BCDS$ mają wspólną wysokość H opuszczoną z wierzchołka S (rys. 2). Z powyższego wzoru na objętość ostrosłupa wynika wtedy natychmiast, że objętość czworościanu $ABDS$ jest dwa razy większa od objętości czworościanu $BCDS$.

W dalszej części pisząc *sześcian* $ABCDA'B'C'D'$, będziemy rozumieli, że jego wierzchołki A, B, C, D oraz A', B', C', D' oznaczone są w taki sposób, by kwadraty $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$ były przeciwległymi ścianami sześcianu, a odcinki AA', BB', CC', DD' jego krawędziami (rys. 3).

Zadanie 1.

Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi a. Oblicz objętość czworościanu $ACB'D'$ (rys. 3).

Rozwiązanie

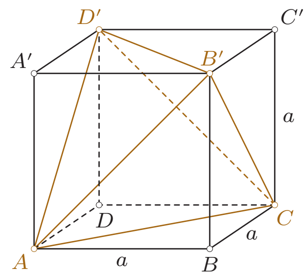
Czworościan $ACB'D'$ powstaje z danego sześcianu poprzez odcięcie od niego czterech ostrosłupów trójkątnych: $ABCB'$, $B'A'D'A$, $B'C'D'C$ oraz $ADCD'$. Każdy z tych ostrosłupów ma objętość równą

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a=\frac{a^3}{6}\,.$$

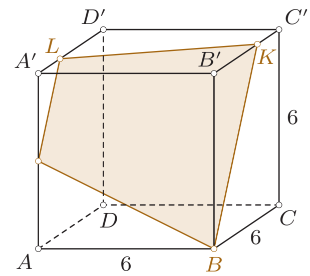
Wobec tego objętość czworościanu $ACB'D'$ jest równa

$$a^3-4\cdot\frac{a^3}{6}=\frac{a^3}{3}\,,$$

co kończy rozwiązanie zadania.



rys. 3



rys. 4

Zadanie 2.

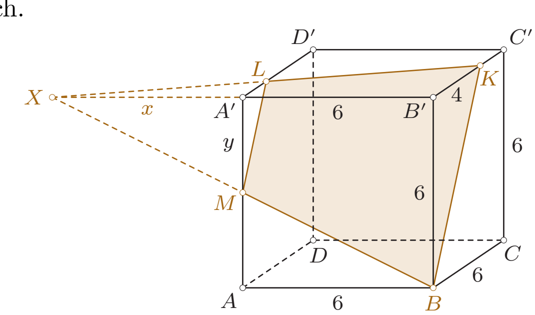
Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi 6 (rys. 4). Punkty K, L leżą odpowiednio na krawędziach $B'C'$ oraz $A'D'$, przy czym

$$B'K=D'L=4\,.$$

Płaszczyzna przechodząca przez punkty B, K, L rozcina sześcian na dwie bryły. Wyznacz objętości obu tych brył.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostych KL i $A'B'$, a przez M punkt przecięcia prostych BX i AA' (rys. 5). Wówczas punkty K, L, M, B leżą w jednej płaszczyźnie (wyznaczonej przez punkty K, B, X), a czworokąt $KLMB$ jest przekrojem wyznaczającym podział sześcianu na dwie bryły o szukanych objętościach.



rys. 5

Jedną z tych brył jest wielościan $\mathcal{V}$ o wierzchołkach B, B', K, M, A', L. Powstaje on z ostrołupa $BB'KX$ poprzez odcięcie od niego mniejszego ostrosłupa $MA'LX$.

Aby wyznaczyć objętości obu tych ostrosłupów, obliczymy najpierw długości x, y odpowiednio odcinków XA', MA'. Z podobieństwa trójkątów $XA'L$ oraz

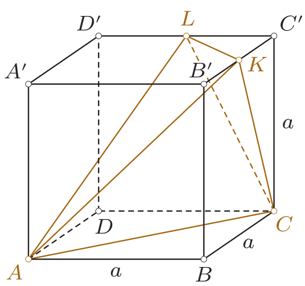
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

$XB'K$ uzyskujemy
$$\frac{x}{x+6}=\frac{2}{4},$$
skąd $x=6$. Z kolei z podobieństwa trójkątów $XA'M$ oraz $XB'B$ otrzymujemy
$$\frac{y}{6}=\frac{x}{x+6},$$
skąd, po uwzględnieniu wyznaczonej wartości $x=6$, dostajemy $y=3$.

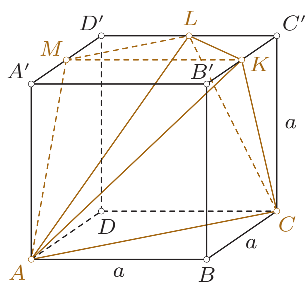
Możemy już teraz bez trudu wyznaczyć objętość wielościanu $\mathcal{V}$, która równa się
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{6\cdot4}{2}\cdot(x+6)-\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot y}{2}\cdot x=42.$$
Objętość pozostałej części sześcianu wynosi $6^3-42=174$, co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 3.

Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi a (rys. 6). Punkty K, L są odpowiednio środkami krawędzi $B'C'$, $C'D'$. Oblicz objętość czworościanu $ACKL$.



rys. 6



rys. 7

Rozwiązanie

Niech M będzie środkiem krawędzi $A'D'$ (rys. 7). Wtedy ML jest linią środkową w trójkącie $A'C'D'$, a zatem odcinki ML i $A'C'$ są równoległe oraz $ML=\frac{1}{2}A'C'$. W związku z tym również odcinki ML oraz AC są równoległe oraz $ML=\frac{1}{2}AC$.

Innymi słowy, czworokąt $ACLM$ jest trapezem o podstawach AC oraz ML, których długości spełniają warunek $ML=\frac{1}{2}AC$. W myśl obserwacji z początku artykułu, objętość czworościanu $ACKL$ jest dwa razy większa od objętości czworościanu $AMLK$. Z kolei objętość czworościanu $AMLK$ równa się
$$\frac{1}{3}\cdot[KML]\cdot AA'=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot a=\frac{a^3}{12}.$$
W konsekwencji objętość czworościanu $ACKL$ wynosi $a^3/6$, co kończy rozwiązanie zadania.

Tradycyjnie proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4. (XIII OMJ, zawody I stopnia)

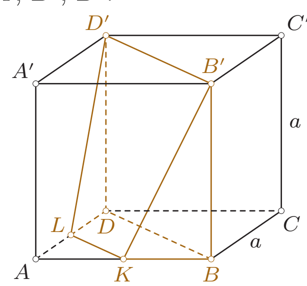
Kwadrat $ABCD$ o boku 4 jest podstawą prostopadłościanu $ABCDA'B'C'D'$. Krawędzie boczne AA', BB', CC', DD' tego prostopadłościanu mają długość 7. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na odcinkach AA', BB', CC', przy czym
$$AK=3,\quad BL=2,\quad CM=5.$$
Płaszczyzna przechodząca przez punkty K, L, M rozcina prostopadłościan na dwie bryły. Wyznacz objętości obu tych brył.

Zadanie 5.

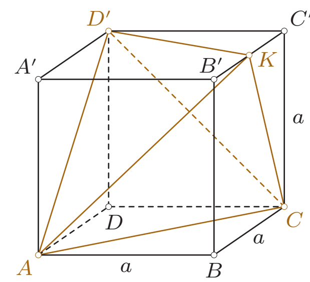
Punkty K, L są odpowiednio środkami krawędzi $B'C'$ oraz $C'D'$ sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi 6. Płaszczyzna przechodząca przez punkty A, K, L rozcina sześcian na dwie bryły. Oblicz objętości obu tych brył.

Zadanie 6.

Punkty K, L są odpowiednio środkami krawędzi AB oraz AD sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi 6 (rys. 8). Oblicz objętość bryły o wierzchołkach B, D, L, K, B', D'.



rys. 8



rys. 9

Zadanie 7.

Punkt K jest środkiem krawędzi $B'C'$ sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ o krawędzi a (rys. 9). Oblicz objętość czworościanu $ACKD'$.

Waldemar Pompe

Parzystość

Nie ma takiej liczby całkowitej, która jest jednocześnie parzysta i nieparzysta. To stwierdzenie, mimo swej prostoty, okazuje się niezwykle użyteczne.

Zadanie 1.

Wykaż, że nie istnieje wielościan wypukły, który ma dokładnie dziewięć ścian i którego każda ściana jest trójkątem.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że taki wielościan istnieje. Niech k będzie liczbą jego krawędzi. Ponumerujmy krawędzie liczbami od 1 do k. Dla każdej ściany naszego wielościanu zapiszmy na tablicy numery krawędzi, które są bokami tej ściany. Ponieważ mamy dziewięć ścian, a każda z nich ma trzy boki, więc na tablicy pojawi się $9\cdot3=27$ liczb.

Z drugiej strony, każda krawędź jest bokiem dokładnie dwóch ścian. Wobec tego każda z liczb $1,2,\ldots,k$ zostanie wypisana dwukrotnie. Oznacza to, że na tablicy wypiszemy $2k$ liczb.

Zatem $2k=27$. Otrzymujemy sprzeczność, gdyż 27 nie jest liczbą parzystą. Udowodniliśmy więc, że taki dziewięciościan nie istnieje.

Zadanie 2.

Czy istnieją takie liczby całkowite a, b, c, d, e, f, że liczby
$$a-b,\ b-c,\ c-d,\ d-e,\ e-f,\ f-a,$$
wypisane w pewnym porządku, są kolejnymi liczbami całkowitymi?

Rozwiązanie

Udowodnimy, że takie liczby nie istnieją.

Rozważmy sześć kolejnych liczb całkowitych n, $n+1$, …, $n+5$. Ich suma wynosi
$$n+(n+1)+\ldots+(n+5)=6n+15=2\cdot(3n+7)+1,$$

jest więc liczbą nieparzystą. Z drugiej strony,

$$(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-e)+(e-f)+(f-a)=0.$$

Ponieważ 0 jest liczbą parzystą, więc liczby o własności opisanej w treści zadania nie istnieją.

W rozwiązaniach wielu zadań olimpijskich pojawiają się tzw. *niezmienniki*, czyli pewne wielkości lub własności, które nie zmieniają się podczas wykonywania operacji opisanych w treści zadania. Często spotykanym niezmiennikiem jest parzystość pewnej liczby.

Zadanie 3.

Na tablicy narysowano 20 kółek i 25 krzyżyków. Ruch polega na starciu z tablicy pewnych dwóch symboli, a następnie dorysowaniu jednego symbolu zgodnie z następującymi regułami:

- Jeśli starte zostały dwa kółka lub dwa krzyżyki, to dorysowujemy na tablicy kółko.
- Jeśli starte zostały kółko i krzyżyk, to dorysowujemy na tablicy krzyżyk.

Udowodnij, że po wykonaniu 44 ruchów na tablicy pozostanie krzyżyk, niezależnie od doboru ruchów.

Rozwiązanie

Zauważmy, że po wykonaniu ruchu liczba krzyżyków nie zmienia swej parzystości, gdyż albo liczba ta w ogóle się nie zmienia, albo zmniejsza się o dwa.

Na początku liczba krzyżyków jest nieparzysta, więc po wykonaniu każdego ruchu liczba krzyżyków pozostanie nieparzysta. Oznacza to w szczególności, że po każdym ruchu na tablicy znajduje się co najmniej jeden krzyżyk. W takim razie symbol, który pozostaje na tablicy na samym końcu, musi być krzyżykiem.

Zadanie 4.

Pola szachownicy o wymiarach 9×9 pokolorowano w tradycyjny w sposób, przy czym jej narożne pola są białe. Ruch polega na wybraniu dwóch sąsiednich pól i przemalowaniu ich na przeciwny kolor (tzn. jeśli wybrane pole jest białe, to zmieniamy jego kolor na czarny i vice versa). Czy można dobierać ruchy w taki sposób, aby w pewnym momencie wszystkie pola były czarne?

Rozwiązanie

Zauważmy, że po każdym ruchu liczba czarnych pól zwiększa się o dwa, gdy wybierzemy dwa pola białe, nie zmienia się, gdy wybierzemy po jednym polu w każdym kolorze oraz zmniejsza się o dwa, gdy wybierzemy dwa pola czarne. Zatem wykonanie każdego ruchu nie zmienia parzystości liczby czarnych pól. Ponieważ na początku liczba czarnych pól wynosi 40, to po każdym ruchu liczba czarnych pól jest parzysta. Na całej planszy znajduje się 81 pól, a więc jest to liczba nieparzysta. Nie da się zatem tak dobierać ruchów, aby wszystkie pola stały się czarne.

Zadanie 5.

Na tablicy narysowano 10 kółek, 11 krzyżyków oraz 12 kwadracików. Ruch polega na starciu dwóch różnych symboli, a następnie narysowaniu symbolu różnego od obu startych przed chwilą. Antkowi udało się wykonać 32 ruchy i na tablicy pozostał jeden symbol. Jaki?

Rozwiązanie

Zauważmy, że w każdym ruchu albo ścieramy jeden krzyżyk albo dorysowujemy jeden krzyżyk. Zatem liczba krzyżyków po każdym ruchu zmienia swoją parzystość. Po wykonaniu 32 ruchów liczba krzyżyków zmieni swoją parzystość 32 razy, a więc na końcu jej parzystość będzie taka sama jak na początku. Skoro na początku było 11 krzyżyków, to na końcu liczba krzyżyków jest nieparzysta. Ponieważ na końcu na tablicy pozostał tylko jeden symbol, musi być to krzyżyk.

Zadanie 6.

Na tablicy wypisano liczby $1,2,\ldots,10$. Ruch polega na wybraniu trzech liczb a, b, c znajdujących się na tablicy i zastąpieniu ich liczbami $2a+b$, $2b+c$, $2c+a$. Czy po wykonaniu pewnej liczby ruchów możemy otrzymać sytuację, w której wszystkie 10 liczb na tablicy jest równych?

Rozwiązanie

Udowodnimy, że wykonanie ruchu nie zmienia parzystości sumy wszystkich liczb. Istotnie, gdy wykonamy ruch na liczbach a, b, c, to suma wszystkich liczb zwiększy się o

$$(2a+b)+(2b+c)+(2c+a)-a-b-c=2(a+b+c),$$

czyli o liczbę parzystą. Zatem parzystość sumy liczb na tablicy nie zmienia się.

Ponieważ $1+2+\ldots+10=55$, więc suma liczb na tablicy zawsze pozostanie nieparzysta. Nie jest więc możliwe uzyskanie dziesięciu równych liczb na tablicy, gdyż wówczas ich suma byłaby postaci $10n$, czyli byłaby liczbą parzystą.

Na koniec proponujemy Czytelnikowi zadania do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich pojawią się w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 7.

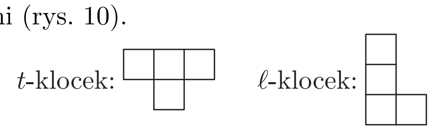
Czy istnieje wielościan, który ma 11 wierzchołków oraz tę własność, że w każdym wierzchołku schodzą się dokładnie trzy krawędzie?

Zadanie 8.

Na tablicy napisano liczby $1,2,3,\ldots,2018$. Ruch polega na wybraniu dwóch liczb z tablicy i zastąpieniu ich wartością bezwzględną ich różnicy. Po wykonaniu 2017 ruchów na tablicy pozostanie jedna liczba. Czy może być nią 0?

Zadanie 9.

Udowodnij, że szachownicy o wymiarach 8×8 nie można pokryć siedmioma t-klockami i dziewięcioma ℓ-klockami (rys. 10).



rys. 10

Klocki można obracać i odwracać na drugą stronę.

Tomasz Cieśla

Sukces Polek na EGMO

W dniach 9–15 kwietnia 2018 r. we Florencji we Włoszech odbyła się siódma edycja Europejskiej Olimpiady Matematycznej Dziewcząt (European Girls' Mathematical Olympiad — EGMO). Polskę reprezentowały:

- Aleksandra Cynk (V LO, Kraków)
- Jadwiga Czyżewska (XIV LO, Warszawa)

- Aleksandra Kowalska (LO Sióstr Prezentek, Rzeszów)
- Weronika Lorenczyk (VIII LO, Katowice)

Delegacja została wyłoniona na podstawie wyników LXVIII Olimpiady Matematycznej. Wszystkie dziewczęta były w przeszłości laureatkami OMG lub OMJ.

EGMO z roku na rok się rozrasta. W tym roku uczestniczyło aż 195 dziewcząt z 52 krajów. Szczególnie zauważalny jest wzrost liczby uczestniczących krajów spoza Europy. W tegorocznej edycji było ich aż 16.

Konkurs składał się z dwóch dni zawodów. Każdego dnia uczestniczki rozwiązywały po 3 zadania. Miały na to 4,5 godziny.

Polki zaprezentowały się znakomicie. Aleksandra Kowalska z wynikiem 40 punktów (na 42 możliwe do uzyskania) zajęła 7. miejsce i została nagrodzona złotym medalem. Srebra wywalczyły Weronika Lorenczyk (25 punktów, 35. miejsce) oraz Aleksandra Cynk (23 punkty, 46. miejsce), a Jadwiga Czyżewska (20 punktów, 62. miejsce) zdobyła medal brązowy. W klasyfikacji drużynowej Polska zajęła 4. miejsce, ustępując jedynie zawodniczkom z Rosji, Stanów Zjednoczonych oraz Wielkiej Brytanii.

Organizatorzy zapewnili też rozrywkę w postaci zawodów drużynowych, które polegały na rozwiązaniu w ośmioosobowych grupach jak największej liczby zagadek matematycznych. Dziewczyny połączyły siły z ekipą z Izraela i zajęły drugie miejsce, tuż za drużyną złożoną z zawodniczek z Ukrainy i Stanów Zjednoczonych.

Tydzień pełen wrażeń został zwieńczony uroczystą ceremonią zamknięcia w Teatro Verdi, a następnie pożegnalnym bankietem połączonym z zabawą taneczną w spektakularnym Palazzo Borghese.

W wolnym czasie dziewczęta zwiedziły przepiękną Florencję, uczestnicząc w grze terenowej i poznając przy okazji pasjonatki matematyki z całego świata. Odbyła się również wycieczka do Pizy, w trakcie której dziewczyny oprócz podziwiania zabytków miały okazję zjeść tradycyjną włoską pizzę.

Na koniec przedstawimy rozwiązanie jednego z zadań z tegorocznych zawodów. Nie sprawiło ono naszym zawodniczkom większych kłopotów — wszystkie uzyskały maksymalną liczbę 7 punktów. Autorką poniższego krótkiego rozwiązania jest Weronika Lorenczyk.

Zadanie 1.

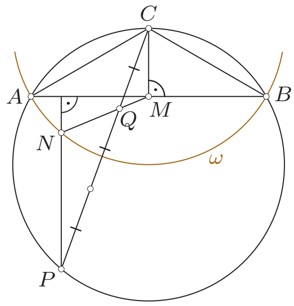
Dany jest trójkąt ABC, w którym spełnione są równości $CA = CB$ oraz $\sphericalangle ACB = 120°$. Niech M będzie środkiem boku AB. Punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Na odcinku CP wybrano taki punkt Q, że $QP = 2QC$. Prosta przechodząca przez punkt P prostopadła do prostej AB przecina prostą MQ w punkcie N. Dowieść, że dla zmieniającego położenie punktu P, punkt N leży na ustalonym okręgu.

Rozwiązanie

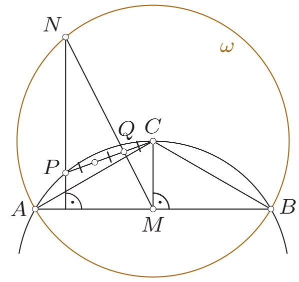
Proste CM, PN są równoległe, gdyż obie są prostopadłe do prostej AB (rys. 11 oraz 12). Wobec tego

$$\frac{PN}{CM} = \frac{PQ}{CQ} = 2,$$

czyli $PN = 2 \cdot CM$. Stąd wniosek, że punkt N leży na okręgu ω powstałym poprzez przesunięcie okręgu opisanego na trójkącie ABC o wektor $\overrightarrow{PN} = 2 \cdot \overrightarrow{MC}$. Ale zarówno okrąg opisany na trójkącie ABC, jak i wektor $\overrightarrow{MC}$ nie zależą od wyboru punktu P, wobec czego okrąg ω również od niego nie zależy. To kończy rozwiązanie.



rys. 11



rys. 12

W rozwiązaniu Weronika nie wykorzystała założenia $\sphericalangle ACB = 120°$; można więc je pominąć, a teza zadania pozostanie wciąż prawdziwa. Co więcej, jeśli zdefiniujemy punkt M nie jako środek odcinka AB, a jako spodek wysokości trójkąta ABC opuszczonej z wierzchołka C (w przypadku $CA = CB$ te definicje są oczywiście równoważne), możemy pominąć założenie o równości odcinków CA i CB. Dodatkowo do rozwiązania zadania nie potrzebujemy, by punkt Q dzielił odcinek CP w stosunku $1:2$. Wystarczy jedynie, by dzielił go w ustalonym stosunku, niezależnym od wyboru punktu P.

Dominika Regiec

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Dorysujmy lustrzane odbicie

6. Odbij symetrycznie punkt B względem dwusiecznej kąta zewnętrznego przy C.

7. *Odpowiedź:* 20°. Odbij symetrycznie punkty A i B odpowiednio względem prostych BC i AC. Znajdź trójkąt równoboczny.

8. *Odpowiedź:* $\frac{1}{2}(AC+BC-AB)$. Odbij symetrycznie punkt C względem prostych AI oraz BI.

9. Odbij symetrycznie punkt C względem prostej AB, otrzymując punkt C'. Uzasadnij, że łuk $C'D$ stanowi $\frac{1}{4}$ okręgu ω.

10. Uzasadnij, że opisaną własność ma średnica d równoległa do odcinka łączącego końce łamanej s. Załóż nie wprost, że punkt wspólny istnieje i odbij symetrycznie fragment łamanej s względem d.

11. Uzasadnij, że istnieje punkt P symetryczny jednocześnie do punktu A względem prostej KM oraz do punktu B względem prostej LM. Zauważ, że trójkąt KLP jest prostokątny.

12. Wykaż, że każda z sum jest równa CL. Odbij symetrycznie punkty A i E względem prostej BC, a punkt B — względem prostej AC, otrzymując odpowiednio punkty A', E', B'. Zauważ, że trójkąt CEE' jest równoboczny, a punkty C, E, K, E' leżą na jednym okręgu. Uzasadnij, że punkt L leży na symetralnej odcinka $A'C$.

Najmniejsze rozwiązanie

4., 5. Postępuj podobnie jak w rozwiązaniu zadania 2.

6. Dodaj oba równania stronami i wykaż, że otrzymane równanie nie ma rozwiązań.

7. Udowodnij, że liczby a, b, c, d są parzyste. Wywnioskuj stąd, że liczba n jest parzysta.

8. Postępuj podobnie jak w rozwiązaniu zadania 3.

9. Postępuj podobnie jak w rozwiązaniu zadania 1.

„Kwadrat" redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk.
Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omj@gmail.com Nakład: 2000 egz.

Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Juniorów

Nr 23
wrzesień 2019

ISSN 2300-0708

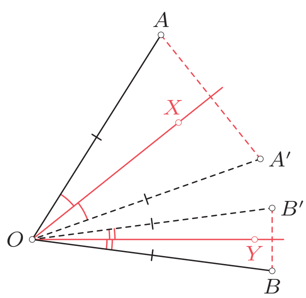
Zaginamy

Rozpatrzmy odcinki OA, OB o równej długości tworzące kąt o mierze α, wewnątrz którego znajduje się kąt XOY o mierze β. Ustalmy oznaczenia w taki sposób, by odcinki OA, OX, OY, OB były ustawione w tej właśnie kolejności wokół punktu O (rys. 1).

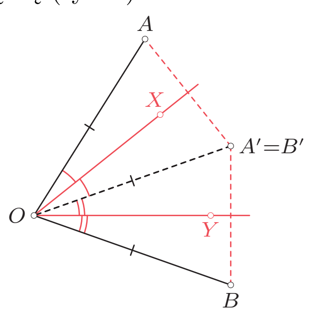
Jeśli przez A', B' oznaczymy obrazy odpowiednio punktów A, B w symetriach względem prostych OX, OY, to wówczas $OA = OA'$ oraz $OB = OB'$ i w konsekwencji $OA' = OB'$. Ponadto, jeśli $2\beta \geqslant \alpha$, to

$$\begin{aligned}\sphericalangle A'OB' &= \sphericalangle XOY - (\sphericalangle XOA' + \sphericalangle YOB') = \\ &= \sphericalangle XOY - (\sphericalangle XOA + \sphericalangle YOB) = \\ &= \beta - (\alpha - \beta) = 2\beta - \alpha\,.\end{aligned}$$

Z rachunku tego wynika w szczególności, że jeśli $\alpha = 2\beta$, to punkty A' i B' pokrywają się (rys. 2).



rys. 1



rys. 2

Zobaczmy, jak „zagięcie" punktów A, B do wnętrza kąta XOY może pomóc w rozwiązaniu zadań.

Zadanie 1.

Dany jest kwadrat $ABCD$ (rys. 3). Punkty E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CD, przy czym $\sphericalangle EAF = 45°$. Udowodnij, że $BE + DF = EF$.

Rozwiązanie

W naszej konfiguracji rolę odcinków OA i OB pełnią odcinki AB i AD, tworzące kąt o mierze $\alpha = 90°$. Wewnątrz tego kąta znajduje się kąt EAF o mierze $\beta = 45°$.

Odbijmy więc punkty B, D symetrycznie względem prostych AE, AF, uzyskując odpowiednio punkty B', D'. Ponieważ $\alpha = 2\beta$, więc punkty B' i D' pokrywają się z pewnym punktem X. Ponadto

$$\sphericalangle AXE + \sphericalangle AXF = \sphericalangle ABE + \sphericalangle ADF = 90° + 90° = 180°,$$

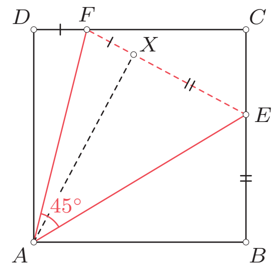
skąd wniosek, że punkt X leży na odcinku EF. Zatem

$$BE + DF = XE + XF = EF\,,$$

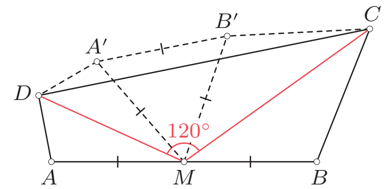
co kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 2.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt M jest środkiem boku AB oraz $\sphericalangle CMD = 120°$ (rys. 4). Udowodnij, że $DA + \frac{1}{2}AB + BC \geqslant DC$.



rys. 3



rys. 4

Rozwiązanie

Rolę odcinków OA i OB pełnią teraz odcinki MA i MB wyznaczające kąt $\alpha = 180°$. Wewnątrz tego kąta znajduje się kąt CMD o mierze $\beta = 120°$.

Odbijmy zatem punkty A, B symetrycznie kolejno względem prostych DM, CM, uzyskując odpowiednio punkty A', B'. Wówczas $MA' = MB'$ oraz

$$\sphericalangle A'MB' = 2\beta - \alpha = 240° - 180° = 60°\,.$$

Wobec tego trójkąt $MA'B'$ jest równoboczny. W szczególności $A'B' = MA' = MA = \frac{1}{2}AB$. W związku z tym

$$DA + \tfrac{1}{2}AB + BC = DA' + A'B' + B'C \geqslant DC\,,$$

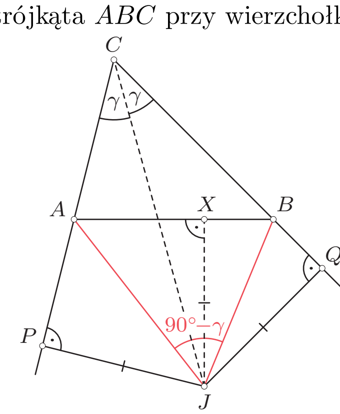
co kończy dowód.

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 2\gamma$. Punkt J leży na dwusiecznej kąta ACB oraz na zewnątrz trójkąta ABC, przy czym spełniony jest warunek

$$\sphericalangle AJB = 90° - \gamma\,.$$

Wykaż, że punkt J leży na dwusiecznych kątów zewnętrznych trójkąta ABC przy wierzchołkach A i B.



rys. 5

Rozwiązanie

Oznaczmy przez P i Q rzuty prostokątne punktu J odpowiednio na proste AC i BC (rys. 5). Ponadto $\sphericalangle AJC < \sphericalangle AJB = 90° - \gamma$, skąd wynika, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle CAJ &= 180° - \sphericalangle ACJ - \sphericalangle AJC > \\ &> 180° - \gamma - (90° - \gamma) = 90°\,.\end{aligned}$$

Podobnie, $\sphericalangle CBJ > 90°$. Stąd wniosek, że punkty P i Q leżą na przedłużeniach boków AC i BC.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Ponieważ punkt J leży na dwusiecznej kąta ACB, więc odcinki PJ oraz QJ są równej długości i tworzą kąt PJQ o mierze

$$\alpha = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \sphericalangle ACB) = 180^\circ - 2\gamma.$$

Wewnątrz tego kąta znajduje się kąt AJB o mierze

$$\beta = 90^\circ - \gamma.$$

Zauważmy, że $\alpha = 2\beta$. W związku z tym obrazy symetryczne punktów P i Q odpowiednio względem prostych AJ i BJ pokrywają się z pewnym punktem X. Ponadto

$$\sphericalangle AXJ + \sphericalangle BXJ = \sphericalangle APJ + \sphericalangle BQJ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

skąd wniosek, że punkt X leży na odcinku AB, a odcinek JX jest prostopadły do prostej AB.

Odległość punktu J od prostej AB jest równa długości odcinka JX, a ta z kolei równa się wspólnej długości odcinków JP i JQ. Stąd wniosek, że punkt J leży na dwusiecznych kątów zewnętrznych trójkąta ABC przy wierzchołkach A i B, co kończy dowód.

Oznaczmy przez r wspólną długość odcinków JP, JQ, JX. Wówczas okrąg o środku J i promieniu r leży na zewnątrz trójkąta i jest styczny do prostych zawierających boki tego trójkąta. Okrąg taki nazywamy *okręgiem dopisanym do trójkąta ABC*.

Na koniec proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy jak zwykle w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 4.
Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkt M jest środkiem boku AB, przy czym $\sphericalangle CMD = 90^\circ$. Wykaż, że $BC + DA \geqslant CD$.

Zadanie 5.
Dany jest romb $ABCD$, w którym kąt DAB jest ostry. Punkty E, F leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $\sphericalangle EAF = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = \alpha$. Udowodnij, że z odcinków o długościach BE, DF oraz EF można zbudować trójkąt oraz że miara jednego z kątów tego trójkąta jest równa 4α.

Zadanie 6.
Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle BAD = 120^\circ$. Punkty E i F leżą odpowiednio na odcinkach BC i CD, przy czym $BE = CF$. Proste AE i AF przecinają przekątną BD odpowiednio w punktach P i Q. Wykaż, że z odcinków o długościach BP, PQ i QD można zbudować trójkąt oraz miara jednego z kątów tego trójkąta wynosi 60°.

Zadanie 7. (XIII OMJ, zawody III stopnia)
Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta równobocznego ABC. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach AC i BC, przy czym $\sphericalangle DME = 60^\circ$. Wykaż, że

$$AD + BE = DE + \tfrac{1}{2}AB.$$

Waldemar Pompe

Teoria cyfr

Każda liczba całkowita przy dzieleniu przez 9 daje taką samą resztę, jak suma jej cyfr. Ta ogólna, dobrze znana cecha podzielności pokazuje, że cyfry nie są tylko znakami graficznymi służącymi do zapisu liczby, ale mają także znaczenie matematyczne. Mówiąc, że liczba całkowita dodatnia a w systemie dziesiętnym jest zapisana za pomocą cyfr $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$, co oznaczamy $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$, mamy na myśli równość

$$a = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1.$$

Zadanie 1.
Znajdź najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, która ma tę własność, że po dopisaniu takiej samej cyfry na jej początku i końcu otrzymamy liczbę 29 razy większą od wyjściowej.

Rozwiązanie
Niech $a = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}$ będzie szukaną liczbą. Jeśli przez c oznaczymy pierwszą (i jednocześnie ostatnią) cyfrę rozwinięcia dziesiętnego liczby $29a$, to z założeń zadania otrzymamy

$$\begin{aligned} 29a &= \overline{c a_n a_{n-1} \ldots a_1 c} = \\ &= c \cdot 10^{n+1} + a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + c = \\ &= c \cdot 10^{n+1} + (a_n \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1) \cdot 10 + c = \\ &= c \cdot 10^{n+1} + a \cdot 10 + c. \end{aligned}$$

Równość tę możemy zapisać w równoważnej postaci

$$19a = c \cdot (10^{n+1} + 1).$$

Ponieważ 19 jest liczbą pierwszą, więc musi ona dzielić jeden z czynników po prawej stronie równości. Z pewnością nie jest to jednak c, które jest (niezerową) cyfrą, zatem $19 \mid 10^{n+1} + 1$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że najmniejszą liczbą n o tej własności jest 8. Wówczas $10^{n+1} + 1 = 19 \cdot 52631579$, skąd wynika $a = 52631579 \cdot c$. Przyjmując $c = 1$, uzyskujemy najmniejszą liczbę spełniającą warunki zadania: $a = 52631579$. To kończy rozwiązanie.

Zadanie 2.
Pewna liczba całkowita dodatnia zaczyna się cyfrą 1. Jeśli cyfrę tę przestawimy na koniec, to liczba zwiększy się trzykrotnie. Jaka jest najmniejsza liczba o tej własności?

Rozwiązanie
Zadanie to można rozwiązać bardzo podobnie do poprzedniego. Tu zastosujemy jednak inną, algorytmiczną metodę wyznaczenia rozwiązania.

Niech $a = \overline{1 \ldots a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}$ będzie szukaną liczbą. Z treści zadania wynika równość

$$3 \cdot \overline{1 \ldots a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} = \overline{\ldots a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 1}.$$

Ponieważ dalsze rozumowanie będzie w pewnym sensie „odwróceniem” dobrze znanego ze szkoły algorytmu pisemnego mnożenia, zapiszmy to działanie w postaci

$$\begin{array}{r} 1 \ldots\ a_6\, a_5\, a_4\, a_3\, a_2\, a_1 \\ \cdot \qquad\qquad\qquad 3 \\ \hline \ldots\ a_5\, a_4\, a_3\, a_2\, a_1\, 1 \end{array}$$

Na początku znajdziemy cyfrę a_1 taką, że ostatnią cyfrą iloczynu $3a_1$ jest 1. W języku kongruencji oznacza to $3a_1 \equiv 1 \pmod{10}$. Mnożąc obie strony przez 7, otrzymujemy $21a_1 \equiv 7 \pmod{10}$, co jest równoważne $a_1 \equiv 7 \pmod{10}$, czyli $a_1 = 7$. Możemy więc wykonać pierwszy krok pisemnego mnożenia:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\ \\ 1 \ldots\ a_6\, a_5\, a_4\, a_3\, a_2\, 7 \\ \cdot \qquad\qquad\qquad 3 \\ \hline \ldots\ a_5\, a_4\, a_3\, a_2\ 7\ 1 \end{array}$$

Teraz szukamy cyfry a_2 takiej, że $3a_2+2\equiv 7 \pmod{10}$, czyli $3a_2\equiv 5 \pmod{10}$. Znów mnożąc obie strony przez 7, otrzymujemy $a_2\equiv 5 \pmod{10}$, czyli $a_2=5$, co pozwala nam wykonać następny krok pisemnego mnożenia:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\;\;2\;\;\;\;} \\ 1\ldots a_6\,a_5\,a_4\,a_3\,5\,7 \\ \cdot \qquad\qquad\qquad 3 \\ \hline \ldots a_5\,a_4\,a_3\,5\;7\;1 \end{array}$$

Rozumując analogicznie, po kolejnych czterech krokach otrzymamy

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\;\;\;2\,1\,2\;\;\;} \\ \ldots 1\,4\,2\,8\,5\,7 \\ \cdot \qquad\qquad 3 \\ \hline \ldots 1\,4\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

Uzyskaliśmy $a_6=1$, a więc 142857 jest najmniejszą liczbą o zadanych własnościach. To kończy rozwiązanie zadania.

Poniżej proponujemy kilka zadań do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 3.
Z cyfr $1,2,\ldots,8$ utworzono dwie liczby 4-cyfrowe, wykorzystując każdą cyfrę dokładnie raz. Wykaż, że suma uzyskanych liczb jest podzielna przez 9.

Zadanie 4.
Czy można z cyfr $1,2,\ldots,6$, wykorzystując każdą dokładnie raz, utworzyć liczbę sześciocyfrową podzielną przez 11?

Zadanie 5.
Znajdź wszystkie liczby trzycyfrowe, które po dowolnej zmianie kolejności cyfr dają liczbę podzielną przez 27.

Zadanie 6.
Znajdź wszystkie liczby sześciocyfrowe, które zwiększą się 6 razy, gdy ostatnie trzy cyfry przestawi się na początek, nie zmieniając ich kolejności.

Zadanie 7.
Liczbę pięciocyfrową, która ma wszystkie cyfry różne, pomnożono przez 4. W wyniku otrzymano wyjściową liczbę zapisaną wspak. Jaka to liczba?

Zadanie 8. (XX OM, zawody II stopnia)
Znajdź wszystkie liczby czterocyfrowe, w których cyfra tysięcy jest równa cyfrze setek, a cyfra dziesiątek — cyfrze jedności i które są kwadratami liczb całkowitych.

Bartłomiej Zawalski

Wietnamskie zawody matematyczne

W dniach 2–6 kwietnia 2019 r. w Wietnamie odbyły się zawody *16th Hanoi Open Mathematics Competition* (HOMC). Polskę reprezentowali:

- Jakub Izdebski (SP nr 5, Grodzisk Mazowiecki),
- Michał Mańka (SP nr 65, Katowice),
- Gabriela Pietras (Publiczna SP, Leszczyna),
- Natalia Siwek (Społeczna SP nr 2, Poznań),
- Konstanty Smolira (Dwujęzyczna SP *Europejczyk*, Lublin),
- Mateusz Wójcicki (SP nr 2, Piotrków Trybunalski).

Reprezentacja została wyłoniona spośród uczniów szkół podstawowych na podstawie wyników zawodów II stopnia XIV Olimpiady Matematycznej Juniorów.

Opiekunem polskiej drużyny był Waldemar Rożek, a przewodniczącą polskiej delegacji — Dominika Regiec.

Była to już szesnasta edycja konkursu, jednak dopiero po raz drugi organizatorzy zaprosili do uczestnictwa delegacje spoza Wietnamu. W tym roku w zawodach wzięły udział reprezentacje następujących czternastu krajów: Birmy, Chin, Filipin, Hiszpanii, Indonezji, Iranu, Malezji, Nepalu, Polski, Tajlandii, Tajwanu, Węgier, Wietnamu i Zjednoczonych Emiratów Arabskich.

Konkurs odbywał się w dwóch kategoriach wiekowych: Junior (7–8 rok edukacji) oraz Senior (9–10 rok edukacji). Każdy kraj reprezentowały maksymalnie dwie drużyny (po jednej z każdej kategorii) składające się najwyżej z sześciu zawodników, przy czym gospodarze mieli przywilej wystawienia dwóch drużyn w każdej kategorii. W ubiegłym roku Polska uczestniczyła tylko w kategorii Senior; w tym roku reprezentanci naszego kraju rywalizowali jedynie w kategorii Junior.

W obu kategoriach wiekowych odbywają się zawody indywidualne oraz drużynowe. W trakcie zawodów indywidualnych uczestnicy mierzą się z piętnastoma zadaniami. Pięć z nich to zadania testowe jednokrotnego wyboru (każde warte 5 punktów). Kolejne pięć to tzw. *zadania krótkiej odpowiedzi* (po 10 punktów). Tutaj, w odróżnieniu od pytań testowych, nie są sugerowane odpowiedzi liczbowe. Uczestnicy muszą więc sami wyprowadzić i podać poprawny wynik liczbowy, przy czym nie przedstawiają rozumowania, które do niego doprowadziło. Pozostałe pięć zadań to *zadania rozwiniętej odpowiedzi*, a więc takie, w których należy podać pełne rozumowanie (po 15 punktów). Na rozwiązanie tych piętnastu zadań uczestnicy mają zaledwie dwie godziny. W tak krótkim czasie niezwykle trudno jest rozwiązać wszystkie zadania, dlatego oprócz umiejętności matematycznych kluczowy jest też wybór odpowiedniej strategii.

W całej 16-letniej historii indywidualnych zawodów HOMC, maksymalna suma punktów została osiągnięta tylko raz i to w kategorii Senior. Ten spektakularny wynik uzyskał *Radosław Żak*, ubiegłoroczny reprezentant Polski, wówczas uczeń Katolickiego Gimnazjum im. Świętej Rodziny z Nazaretu w Krakowie.

Właściwa taktyka odgrywa jeszcze większą rolę w trakcie zawodów drużynowych. Do drużyny wybranych zostaje czworo uczestników z danego kraju. Początkowo każda drużyna otrzymuje osiem zadań, z których cztery to zadania testowe (każde warte 5 punktów), a cztery pozostałe to zadania krótkiej odpowiedzi (po 10 punktów). Zawodnicy mają dziesięć minut na naradę, jednak nie mogą korzystać z przyborów do pisania. Muszą w tym czasie rozdzielić między siebie zadania, po dwa dla każdego.

Następnie przez kolejne 20 minut uczestnicy pracują niezależnie nad przydzielonymi zadaniami. Po upływie tego czasu oddają przygotowane rozwiązania. Drużyna ponownie spotyka się i otrzymuje dwa zadania rozwiniętej odpowiedzi, które rozwiązuje zespołowo w czasie 30 minut. Taka formuła zawodów zapewniła ogromną dawkę emocji i radości ze wspólnego rozwiązywania problemów matematycznych.

W zawodach indywidualnych w kategorii Junior przyznano 9 złotych, 17 srebrnych i 26 brązowych medali. Zwyciężył reprezentant Tajlandii Sarunyu Thongharast. Czworo Polaków wróciło do kraju z brązowymi medalami, byli to: Gabriela, Natalia, Konstanty i Michał.

W zawodach drużynowych w kategorii Junior zwyciężyła reprezentacja Chin, uzyskując maksymalną sumę punktów. Drugie miejsce zajęła drużyna Wietnamu.

Warto tu wspomnieć, że program nauczania matematyki uczniów szkół podstawowych jest w krajach azjatyckich znacznie obszerniejszy niż w Polsce. Uczniowie z Azji już w ósmym roku edukacji posługują się metodami związanymi z funkcją kwadratową i wielomianami.

Zestawy zadań zostały przygotowane przez komisję złożoną z matematyków z Wietnamu w oparciu o propozycje nadesłane przez uczestniczące kraje. Cztery zadania wybrane na zawody były zaproponowane przez Polskę — autorem dwóch był Tomasz Przybyłowski, dwa inne były natomiast modyfikacją propozycji Łukasza Bożyka i Dominiki Regiec.

Jednym z celów konkursu jest także wymiana doświadczeń i zawarcie znajomości z rówieśnikami z innych krajów. Sprzyjały temu wycieczki, w trakcie których uczestnicy mogli poznać zwyczaje i historię Wietnamu, jak również gala kulturowa, podczas której każda drużyna zaprezentowała krótkie wystąpienie nawiązujące do tradycji swojego kraju. Pomysły były różne — można było poznać narodowe tańce, śpiewy i obrzędy. Polacy przygotowali krótkie skecze przybliżające postaci i momenty ważne dla polskiej nauki i w szczególności dla matematyki.

Przedstawimy trzy przykładowe zadania, z którymi mierzyli się uczestnicy, po jednym z każdego typu.

Zadanie 1. (Junior, ind., testowe)

Ile niepustych *spójnych podciągów* (tj. złożonych z następujących po sobie elementów) zawiera ciąg $1,2,3,\ldots,99,100$?

A. 1010 **B.** 2020 **C.** 3030 **D.** 4040 **E.** 5050

Rozwiązanie

Odpowiedź: **E.**

Dla $n=1,2,\ldots,100$ istnieje dokładnie n spójnych podciągów kończących się w n, toteż wszystkich takich podciągów jest $1+2+3+\ldots+99+100=5050$.

Zadanie 2. (Junior, ind., krótkiej odpowiedzi)

Niech p, q będą nieparzystymi liczbami pierwszymi. Załóżmy, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że $pq-1=n^3$. Wyznacz wartość $p+q$ w zależności od n.

Rozwiązanie

Odpowiedź: n^2+2.

Na mocy założenia, $pq=n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)$. Ponieważ $p,q\geqslant 3$, więc $n\geqslant 2$, skąd $n+1, n^2-n+1>1$. Wobec tego na mocy pierwszości p, q, jedna z liczb p, q musi być równa $n+1$, natomiast druga n^2-n+1. Toteż ich suma wynosi n^2+2.

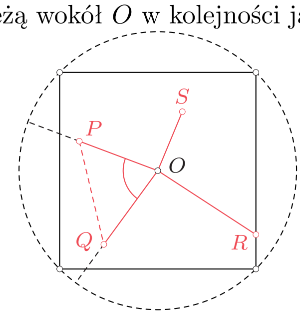
Zadanie 3. (Senior, ind., rozwiniętej odpowiedzi)

We wnętrzu lub na brzegu kwadratu o boku długości 1 zaznaczono cztery punkty. Wykaż, że pewne dwa z nich są odległe o co najwyżej 1.

Rozwiązanie

Niech O będzie środkiem kwadratu. Jeśli jeden z zaznaczonych punktów pokrywa się z punktem O, to teza jest natychmiastowa — wszystkie punkty kwadratu są zawarte w kole o środku O i o promieniu $r=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$.

Załóżmy więc, że żaden z zaznaczonych punktów P, Q, R, S nie pokrywa się z punktem O i dorysujmy odcinki OP, OQ, OR, OS. Bez straty ogólności załóżmy, że odcinki te leżą wokół O w kolejności jak na rysunku.



rys. 6

Wówczas $\sphericalangle POQ+\sphericalangle QOR+\sphericalangle ROS+\sphericalangle SOP=360°$ oraz miary tych kątów są nieujemne. Wobec tego któryś z nich wynosi co najwyżej 90°; przyjmijmy, że jest to kąt POQ. Ale wtedy $PQ^2\leqslant PO^2+QO^2\leqslant r^2+r^2=1$, czyli $PQ\leqslant 1$. To kończy rozwiązanie zadania.

Zadanie 1 jest modyfikacją propozycji Łukasza Bożyka: Jaka jest średnia suma elementów spójnego podciągu ciągu $1,2,3,\ldots,99,100$?

Z kolei zadanie 2 to modyfikacja zadania zaproponowanego przez Dominikę Regiec; w oryginalnym sformułowaniu warunkiem wiążącym p, q, n był $pq-4=n^4$.

Polskie akcenty posiada także zadanie 3. Jego autorem jest Do Minh Khoa, absolwent Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, a powyższe rozwiązanie zaproponował Hung Son Nguyen, profesor wspomnianej warszawskiej uczelni.

Dominika Regiec

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

Objętość ostrosłupa

4. *Odpowiedź:* 64 *i* 48. Oznacz przez A'', B'', C'', D'' punkty będące obrazami odpowiednio punktów C, D, A, B w symetrii względem środka odcinka KM. Uzasadnij, że $ABCDA''B''C''D''$ jest prostopadłościanem oraz że płaszczyzna przechodząca przez punkty K, L, M rozcina go na dwie przystające bryły.

5. *Odpowiedź:* 75 *i* 141. Oznacz przez X, Y punkty przecięcia prostej KL odpowiednio z prostymi $A'B'$ oraz $A'D'$. Wówczas jedna z brył, których objętości szukamy powstaje z ostrosłupa $XYA'A$ poprzez odcięcie dwóch innych ostrosłupów.

6. *Odpowiedź:* 45. Oblicz najpierw objętość bryły o wierzchołkach A, K, L, A', B', D'. W tym celu przedłuż odcinki $B'K$ i $D'L$ do przecięcia z przedłużeniem krawędzi AA'.

7. *Odpowiedź:* $a^3/4$. Oznacz przez L środek krawędzi $A'B'$. Rozumując podobnie do rozwiązania zadania 3, uzasadnij, że objętość czworościanu $ACKD'$ jest dwa razy większa od objętości czworościanu $AKLD'$.

Parzystość

7. *Odpowiedź: Nie.* Naśladuj rozwiązanie zadania 1.

8. *Odpowiedź: Nie.* Wykaż, że po wykonaniu ruchu suma wszystkich liczb nie zmienia parzystości.

9. Zauważ, że każdy t-klocek pokrywa nieparzystą liczbę czarnych pól, a każdy ℓ-klocek — dokładnie dwa czarne pola.

„Kwadrat" redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk.
Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omj@gmail.com Nakład: 2000 egz.