Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Nr 15
kwiecień 2015
ISSN 2300-0708

Wiatraczek

Na zawodach drugiego stopnia tegorocznej X edycji OMG uczestnicy rozwiązywali następujące zadanie.

Zadanie 5.

Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz tego trójkąta. Proste AP, BP, CP przecinają odcinki BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie cztery spośród trójkątów AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP miały równe pola? Odpowiedź uzasadnij.

Okazuje się, że wybór takiego punktu nie jest możliwy. Nie istnieje również taki punkt P, aby dokładnie pięć spośród wymienionych trójkątów miało równe pola. Nasuwa się więc naturalne pytanie, czy można znaleźć taki punkt P, jeśli zażądamy, by powstała mniejsza liczba trójkątów o równych polach:

Zadanie 5'.

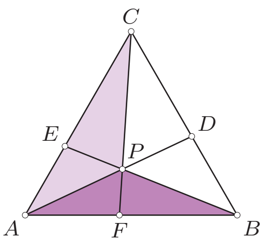
Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie *trzy* spośród trójkątów AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP miały równe pola?

Odpowiedź na to pytanie jest w dalszym ciągu negatywna. Zadanie 5' jest jednak ogólniejsze i jego rozwiązanie wymaga przeanalizowania dodatkowej konfiguracji: *wiatraczka*.

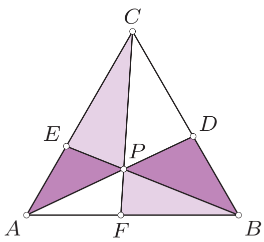
Rozwiązanie zadania 5'

Przypuśćmy, że pewne trzy z rozważanych sześciu trójkątów mają równe pola.

Zauważmy, że jeżeli pewne dwa trójkąty, które mają ten sam odcień na rysunku 1, mają równe pola, to jeden z odcinków AD, BE, CF jest środkową trójkąta ABC. Rzeczywiście, jeśli na przykład pola trójkątów APF i BPF są równe, to $AF = BF$, gdyż trójkąty te mają tę samą wysokość poprowadzoną z wierzchołka P.



rys. 1



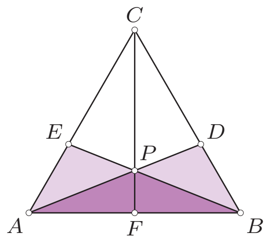
rys. 2

Podobnie, jeżeli równe pola mają pewne dwa trójkąty o tym samym odcieniu na rysunku 2, to wówczas jedna z prostych AD, BE, CF jest środkową trójkąta ABC. Istotnie, jeśli przez $[\mathcal{F}]$ oznaczymy pole figury $\mathcal{F}$, to z równości $[APE] = [BPD]$ wynika, że

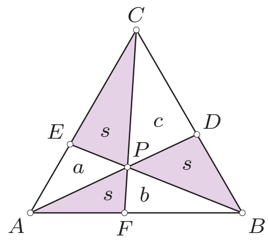
$$[ABE] = [APE] + [ABP] = [BPD] + [ABP] = [ABD].$$

Stąd wniosek, że proste AB i DE są równoległe, gdyż trójkąty ABE i ABD mają wspólną podstawę AB. Ponadto $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ABD$, co oznacza, że trapez $ABDE$ jest równoramienny i w konsekwencji punkty P i C leżą na symetralnej odcinka AB. Wobec tego punkt F jest środkiem tego odcinka.

Jeżeli zatem pewne dwa trójkąty o tym samym odcieniu z rysunku 1 lub 2 mają równe pola, to uzyskujemy trzy pary trójkątów o równych polach, symetrycznych względem jednej z prostych AD, BE, CF (na rysunku 3 jest to prosta CF). Wówczas liczba trójkątów o równych polach jest parzysta, czyli nie może być równa 3.



rys. 3



rys. 4

Wobec tego pozostała do rozpatrzenia tylko konfiguracja trzech trójkątów o równych polach, ułożonych w *wiatraczek* (rys. 4).

Oznaczmy pola trójkątów *wiatraczka* przez s, a pola pozostałych trzech trójkątów — przez a, b, c. Korzystając dwukrotnie z faktu udowodnionego na początku artykułu *Pole* (*Kwadrat* nr 10, wrzesień 2013), możemy zapisać równość

$$\frac{2s+a}{s+b+c} = \frac{[ACF]}{[BCF]} = \frac{AF}{BF} = \frac{[APF]}{[BPF]} = \frac{s}{b}.$$

Zależność tę przekształcamy następująco:

$$2bs + ab = s^2 + sb + sc,$$
$$b(a+s) = s(c+s).$$

W pełni analogicznie dochodzimy do związków

$$c(b+s) = s(a+s),$$
$$a(c+s) = s(b+s).$$

Dodając stronami trzy ostatnie równości, uzyskujemy

$$ab + bc + ca + s(a+b+c) = s(a+b+c) + 3s^2,$$
$$ab + bc + ca = 3s^2. \tag{1}$$

Z kolei mnożąc stronami te równości, otrzymujemy

$$abc(a+s)(b+s)(c+s) = s^3(a+s)(b+s)(c+s),$$
$$abc = s^3. \tag{2}$$

Zauważmy, że z równości (1) wynika, że

$$s^2 = \frac{ab+bc+ca}{3},$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

czyli liczba s^2 jest *średnią arytmetyczną* liczb ab, bc, ca. Z kolei równość (2) można przekształcić do postaci

$$s^2 = \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca},$$

skąd wynika, że liczba s^2 jest także *średnią geometryczną* liczb ab, bc, ca. Korzystając teraz z własności sformułowanej we wstępie do artykułu *Nierówność między średnimi* (*Kwadrat* nr 13, wrzesień 2014), wnioskujemy, że skoro średnia arytmetyczna liczb ab, bc, ca jest równa ich średniej geometrycznej, to wszystkie te liczby są równe, czyli $ab = bc = ca$. Stąd otrzymujemy $a = b = c$, co po skorzystaniu z równości (2) prowadzi do $a = b = c = s$. Ostatecznie doszliśmy do wniosku, że również w przypadku *wiatraczka* wszystkie sześć trójkątów ma równe pola, co kończy rozwiązanie zadania 5'.

Na koniec proponujemy Czytelnikom dwa zadania do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 5".

Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie *dwa* spośród trójkątów AEP, AFP, BFP, BDP, CDP, CEP miały równe pola oraz aby punkt P nie należał do żadnej z wysokości trójkąta ABC?

Zadanie 6.

Niech P będzie punktem leżącym wewnątrz czworościanu foremnego $ABCD$. Płaszczyzny ABP, ACP, ADP, BCP, BDP, CDP rozcinają ten czworościan na 24 mniejsze czworościany. Czy można punkt P wybrać w taki sposób, aby dokładnie 9 z tych czworościanów miało równe objętości?

Łukasz Bożyk

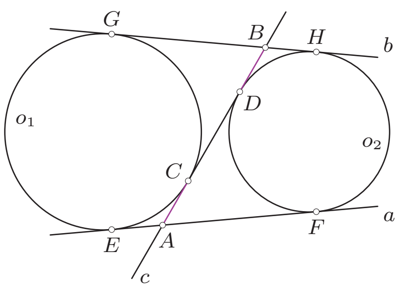
Kilka geometrycznych lematów

W rozwiązaniach zadań często formułuje się i udowadnia tzw. *lematy*, czyli pomocnicze twierdzenia. Dzięki nim rozumowanie staje się prostsze i bardziej przejrzyste.

Znajomość różnych lematów jest bardzo przydatna, o czym przekonaliśmy się w poprzednim numerze *Kwadratu*. Zaprezentowaliśmy tam rozwiązanie zadania geometrycznego z międzynarodowych zawodów MEMO przedstawione przez polską drużynę. Korzystało ono z dwóch użytecznych faktów, które teraz udowodnimy. Zaczniemy od innego, równie przydatnego zadania.

Zadanie 1.

Proste a i b są wspólnymi stycznymi zewnętrznymi do okręgów o_1 i o_2 (rys. 5). Wspólna styczna wewnętrzna c przecina proste a i b odpowiednio w punktach A i B. Punkty C i D są punktami styczności prostej c odpowiednio z okręgami o_1 i o_2. Udowodnij, że $AC = BD$.



rys. 5

Rozwiązanie

Oznaczmy pozostałe punkty styczności prostych a, b z okręgami o_1, o_2 jak na rysunku 5. Wówczas

$$AC + AD = AE + AF = EF = GH = BG + BH = BC + BD.$$

Ponadto $AD = AC + CD$ oraz $BC = BD + CD$, więc $2AC + CD = 2BD + CD$. Po odjęciu stronami wielkości CD, otrzymujemy $2AC = 2BD$. Stąd uzyskujemy $AC = BD$, co kończy rozwiązanie zadania.

Zauważmy, że tezę powyższego zadania można wysłowić w następujący sposób: *środki odcinków AB i CD się pokrywają*.

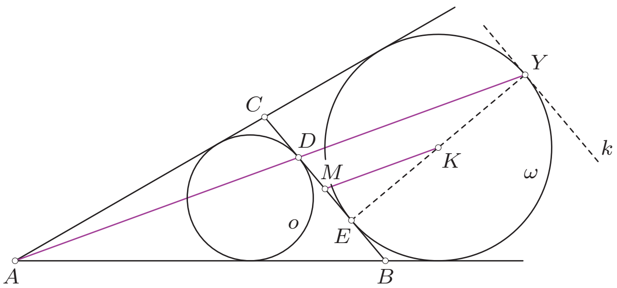
Jesteśmy już gotowi do wykazania pierwszego lematu z poprzedniego numeru *Kwadratu*.

Zadanie 2.

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku BC w punkcie D. Punkt K jest środkiem okręgu dopisanego, stycznego do boku BC, a punkt M jest środkiem BC. Udowodnij, że proste AD i MK są równoległe.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez o okrąg wpisany w trójkąt ABC, a przez ω okrąg dopisany, styczny do boku BC w punkcie E (rys. 6). Wybierzmy ponadto punkt Y tak, aby odcinek EY był średnicą okręgu ω. Wówczas styczna k do okręgu ω w punkcie Y jest równoległa do prostej BC.



rys. 6

Rozważmy jednokładność o środku w punkcie A, która przekształca okrąg o na okrąg ω. Przeprowadza ona wtedy także prostą BC na prostą k, a więc przekształca punkt D na punkt Y. Stąd wniosek, że punkty A, D i Y są współliniowe. Innymi słowy, proste AD i DY pokrywają się.

Z zadania 1 wynika, że punkt M jest środkiem odcinka DE. Wobec tego prosta MK przechodzi przez środki boków DE i YE trójkąta DEY, jest więc równoległa do prostej DY. To kończy rozwiązanie zadania.

Wykażemy teraz drugi z faktów użytych w poprzednim numerze *Kwadratu*.

Niech ABC będzie trójkątem, a punkt M — środkiem boku BC. *Symedianą* trójkąta ABC, poprowadzoną z wierzchołka A, nazywamy prostą symetryczną do środkowej AM względem dwusiecznej kąta BAC.

Zadanie 3.

Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o, przy czym $\sphericalangle A < 90°$. Punkt D jest punktem przecięcia stycznych do okręgu o w punktach B i C. Udowodnij, że prosta AD jest symedianą w trójkącie ABC.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez M środek odcinka BC. Wystarczy wykazać, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle MAC$.

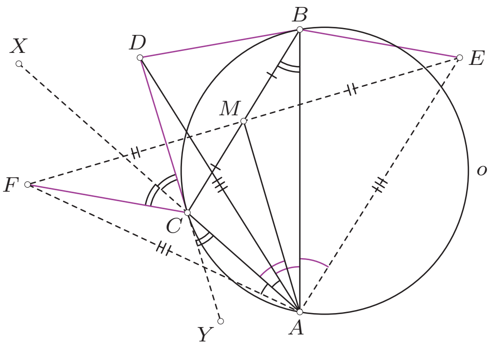
Równość ta jest spełniona, jeśli $AB=AC$. Przyjmijmy zatem, bez straty ogólności, że $AC<AB$.

Obierzmy na półprostej AC, poza odcinkiem AC, dowolny punkt X, a na półprostej DC, poza odcinkiem DC, dowolny punkt Y (rys. 7). Niech punkty E i F będą obrazami symetrycznymi punktu D odpowiednio względem prostych AB i AC. Wówczas $CF=CD=BD=BE$ oraz $AF=AD=AE$. Ponadto, z twierdzenia o kącie między styczną a sieczną, $\sphericalangle DCX=\sphericalangle YCA=\sphericalangle CBA$. Zachodzi więc następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}\sphericalangle MCD+\sphericalangle DCF&=\sphericalangle MBD+2\sphericalangle DCX=\\&=\sphericalangle MBD+2\sphericalangle CBA=\sphericalangle ABD+\sphericalangle MBA=\\&=\sphericalangle ABE+\sphericalangle MBA.\end{aligned}$$

Wobec tego $\sphericalangle MCF=\sphericalangle MBE$. Ponadto $MC=MB$ oraz $CF=BE$, zatem trójkąty MCF i MBE są przystające, na mocy cechy bok–kąt–bok. Stąd wniosek, że $MF=ME$. Skoro zaś $AF=AE$, to punkty A i M leżą na symetralnej odcinka EF. Wobec tego AM jest dwusieczną kąta EAF i w konsekwencji

$$\sphericalangle MAF=\tfrac{1}{2}\sphericalangle EAF.$$



rys. 7

Z drugiej strony, punkty E i F są obrazami symetrycznymi punktu D odpowiednio względem prostych AB i AC, a więc

$$\sphericalangle BAD=\tfrac{1}{2}\sphericalangle EAD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle DAC=\tfrac{1}{2}\sphericalangle DAF.$$

Po dodaniu tych równości stronami otrzymujemy

$$\sphericalangle BAC=\tfrac{1}{2}\sphericalangle EAF.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\sphericalangle BAD&=\sphericalangle BAC-\sphericalangle DAC=\\&=\sphericalangle MAF-\sphericalangle CAF=\sphericalangle MAC,\end{aligned}$$

co było do wykazania.

Czytelnikom proponujemy samodzielne rozwiązanie poniższych dwóch zadań, które są bardzo zbliżone do zaprezentowanych lematów.

Zadanie 4.

Okrąg dopisany do trójkąta ABC jest styczny do boku BC w punkcie E. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkt M jest środkiem odcinka BC. Udowodnij, że proste AE i IM są równoległe.

Zadanie 5.

Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o, przy czym $\sphericalangle A>90^\circ$. Punkt D jest punktem przecięcia stycznych do okręgu o w punktach B i C. Punkt M jest środkiem odcinka BC. Wykaż, że

$$\sphericalangle BAD+\sphericalangle MAC=180^\circ.$$

Tomasz Cieśla

Wzór (na) wirtuoza

Konkurs Chopinowski to jeden z najbardziej elitarnych konkursów muzycznych; odbywa się w Polsce co pięć lat, gromadząc setki pianistów z całego świata, rywalizujących nie tylko o wymierne nagrody pieniężne oraz kontrakty z największymi wytwórniami płytowymi, lecz przede wszystkim o ogromny prestiż związany z otrzymaniem tytułu laureata. Samo dopuszczenie do uczestnictwa poprzedzone jest nie tylko eliminacjami, lecz nawet kwalifikacją do eliminacji — spośród około 450 kandydatów, w kwietniowych eliminacjach do tegorocznej edycji udział weźmie jedynie 160. Wśród nich znajduje się 17-letni licealista z Gdańska, Piotr Pawlak, który od kilku lat figuruje również na listach laureatów kolejnych olimpiad matematycznych — najpierw OMG (gimnazjalistów), następnie OM (licealistów), by ostatecznie z sukcesem reprezentować Polskę na zawodach międzynarodowych, takich jak Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna (w 2014 r. brązowy medal), czy turniej Romanian Masters (w 2015 r. srebrny medal). W rozmowie z redaktorem *Kwadratu* Piotrek opowiada o rozwijaniu swoich zdolności, matematyczno-muzycznych refleksjach i planach na przyszłość.

Łukasz Rajkowski: Co było pierwsze w Twoim życiu, muzyka czy matematyka?

Piotr Pawlak: Zdaje się, że muzyka. Pierwsze ślady muzykalności pojawiły się u mnie w wieku 3-4 lat. U mojego dziadka stał fortepian, który służył głównie jako podstawka do wina. Zacząłem się nim interesować od strony zgodnej z jego przeznaczeniem — próbowałem na nim grać, z ciekawością zaglądałem pod pokrywę by sprawdzić, w jaki sposób wydobywany jest dźwięk. Rodzice zorientowali się w moich zainteresowaniach i zorganizowali mi keyboard, a następnie posłali do ogniska muzycznego. Nie wiązali z tym większych nadziei, gdyż nikt w mojej bliskiej rodzinie nie ma wykształcenia muzycznego, wobec czego brakowało im „punktu odniesienia", względem którego można by było ocenić moje zdolności. Dopiero pani z ogniska muzycznego zasugerowała zapisanie mnie do szkoły muzycznej, do czego rodzice początkowo nie byli przekonani — w naszej rodzinie dominuje wykształcenie inżynierskie i sam dziadek, w którego domu stał fortepian, był zdania, że *muzyk to nie zawód*. Czynnikiem, który zadecydował o posłaniu mnie do ogólnokształcącej szkoły muzycznej zamiast do przynależnej mi „rejonówki" była... bardzo miła wychowawczyni w szkole muzycznej. Moje kształcenie w tym kierunku rozpoczęło się więc niejako przez przypadek; podejrzewam z kolei, że matematyką zainteresowałbym się niezależnie od wybranej placówki — moja mama skończyła studia matematyczne, a mój tata informatyczne, więc zapewne i tak dopomogliby losowi w tym zakresie.

ŁR: Czy ciężko jest łączyć te dwie ścieżki? W Twoim planie jest miejsce na czas wolny?

PP: Na czas wolny zawsze znajdzie się u mnie miejsce (*śmiech*). W związku ze zbliżającymi się eliminacjami staram się jednak ćwiczyć coraz więcej; w tej chwili są to 2-3 godziny dziennie i pilnuję, by nie było żadnych odstępstw od tego planu. Jedynym wyjątkiem są tradycyjne, dwutygodniowe wakacje z rodzicami — całe szczęście, że jest to wyjazd rowerowy, dzięki temu nawet nie mam możliwości zabrania ze sobą instrumentu. Nawet na obozy olimpijskie przywożę ze sobą keyboard, by choć poruszać palcami na klawiaturze. Wiąże się z tym zresztą pewna zabawna sytuacja — podczas jednego z obozów OMG w Perzanowie ulokowani byliśmy w drewnianym domku, w którym niesamowicie nosił się dźwięk. Oczywiście, z tego względu podczas ćwiczenia podłączałem do keyboardu słuchawki. Pewnego wieczoru jednak zeszli do mnie mieszkańcy jednego z pokojów i poprosili o zaprzestanie prób, gdyż stukot klawiszy nie pozwalał im zasnąć. Strach pomyśleć, co by było, gdybym nie korzystał ze słuchawek...

ŁR: Powiedz, czy wobec tak wielkiej ilości czasu potrzebnego na ćwiczenie, zastanawiałeś się kiedyś nad wyborem między muzyką a matematyką?

PP: Będę starał się ciągnąć obie te rzeczy tak długo, jak się da i na razie nie myślę o ewentualnym wyborze. Odnośnie mojej przyszłej uczelni, to już teraz uczęszczam na niektóre zajęcia na Wydział Matematyki Uniwersytetu Gdańskiego, z drugiej strony od pewnego czasu mam lekcje u profesora Waldemara Wojtala z Akademii Muzycznej w Gdańsku, z którym świetnie mi się pracuje, więc być może nawet na etapie akademickim będę w stanie jednocześnie rozwijać moje zainteresowania.

ŁR: Niektórzy twierdzą, że zdolności matematyczne i muzyczne są ze sobą ściśle powiązane. Podpisałbyś się pod takim stwierdzeniem?

PP: Cóż... na pewno *jakiś* związek istnieje. W moim przypadku jest on raczej jednostronny — wydaje mi się, że to raczej matematyka pomaga mi w muzyce, niż odwrotnie. Od pewnego czasu uczęszczam na zajęcia z kompozycji i kiedy mam na przykład stworzyć jakieś kształtowanie lub rozłożyć kulminacje, moje analityczne zdolności wydają się to ułatwiać — nie jest to oczywiście zaawansowana matematyka, jednak pewne uporządkowanie myśli przy rozważaniu dostępnych możliwości jest bardzo pomocne. Dotyczy to również kwestii wykonywania utworów — niektórzy pianiści zdają się wówczas jedynie na swoją intuicję, ja natomiast wolę najpierw na spokojnie sobie rzecz przemyśleć i rozsądnie porozkładać akcenty w całym utworze. Mam wrażenie, że poszerza to moje pole manewru w kwestii interpretacji dzieła. Jest też niestety ciemna strona medalu. Zdarza mi się na przykład, że jeśli przez długi czas nie mogę rozwiązać jakiegoś zadania i przychodzi czas na ćwiczenie, mam niemałą trudność ze skoncentrowaniem się na muzyce i gdzieś tam z tyłu głowy wciąż zajmuję się nierozstrzygniętym problemem. Dlatego przed każdym koncertem robię sobie co najmniej pół dnia przerwy od matematyki.

ŁR: Co doradziłbyś gimnazjaliście chcącemu podążać Twoimi olimpijskimi śladami?

PP: Wiem, że to nie jest moja zasługa; dostałem pewne zdolności „z góry" i cieszę się, że mogę je rozwijać. Oczywiście, jest to również kwestia mojej pracy, jeśli jednak po prostu *chce* się coś robić, z pewnością praca nad tym jest o wiele łatwiejsza. Wystrzegałbym się jednak również pewnej przesady — przykładowo, jeśli ktoś próbuje rozwiązać zadanie konkursowe poprzez dopasowanie go do jednego z setek sposobów i problemów, jakie wcześniej godzinami przerabiał, wówczas... kto wie, może i nawet uda mu się coś wygrać, jednak wydaje się, że w ten sposób umyka mu coś ważnego...

ŁR: Jak opisałbyś rolę OMG w swoim matematycznym rozwoju?

PP: Dopiero na Olimpiadzie Matematycznej Gimnazjalistów zetknąłem się z problemami, które wymagały niestandardowego podejścia do zadań i nieszablonowego myślenia. Pamiętam, że podczas pierwszej OMG, w której brałem udział, na początku byłem przybity faktem, że na części korespondencyjnej zrobiłem tylko 5 z 7 zadań, a już z drugiego etapu wyszedłem zupełnie załamany, gdyż całkowicie zrobiłem jedynie dwa zadania i „ruszyłem" pewne dwa inne. Nie wiedziałem wówczas, że taka jest specyfika tych zawodów — każde z prezentowanych zadań wymaga osobnego, nietrywialnego pomysłu i mój „słaby" wynik okazał się wystarczająco dobry, abym został dopuszczony do finału. Tam z kolei udało mi się rozwiązać 4 zadania, dzięki czemu zaproszono mnie na obóz olimpijski do Perzanowa i myślę, że bez tego obozu nie byłbym ostatnio na Romanian Masters i nie byłbym wcześniej na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej, gdyż dopiero w Perzanowie miałem styczność z taką „porządną" matematyką i nauczyłem się wielu metod rozwiązywania zadań olimpijskich. Ponadto poznałem tam ludzi o podobnych zainteresowaniach i niektóre z tych znajomości przerodziły się w przyjaźnie, które szczęśliwie przetrwały do dziś.

ŁR: Eliminacje do Konkursu Chopinowskiego już w drugiej połowie kwietnia. Uczniom życzy się przed konkursem „połamania pióra", czego należy życzyć pianiście?

PP: Podobnie, bo połamania palców.

ŁR: Połamania palców zatem — trzymam kciuki, byśmy mogli usłyszeć Cię w październiku na koncercie laureatów. Dzięki za rozmowę i powodzenia!

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

O łukach równej długości

5. Zauważ, że na czworokącie $ADOB$ można opisać okrąg i skorzystaj z twierdzenia 1.

6. Z równości kątów wywnioskuj równość łuków i skorzystaj z twierdzenia 2.

7. Uzasadnij, że punkty A_2, B_2, C_2 są środkami pewnych łuków okręgu wpisanego w trójkąt ABC i skorzystaj z twierdzenia 1.

8. Korzystając z równości kątów opartych na odpowiednich łukach, uzasadnij, że punkty D i E są symetryczne względem prostej BC.

9. Z danych równoległości wywnioskuj odpowiednie równości łuków. Następnie skorzystaj z twierdzenia 2.

Zmagania z ułamkami

5. Skorzystaj z algorytmu Euklidesa.

6. Uzasadnij, że jeśli liczba p^2+q^2 jest podzielna przez $p+q$, to także liczba $2pq$ jest podzielna przez $p+q$. Następnie doprowadź do sprzeczności, korzystając z algorytmu Euklidesa oraz twierdzenia 2.

7. Postępuj podobnie do rozwiązania zadania 3.

8. Uzasadnij, że jeśli p jest dzielnikiem pierwszym obu liczb $a+b$ oraz a^2+ab+b^2, to p jest także dzielnikiem liczby ab. Wywnioskuj stąd dalej, że p jest wspólnym dzielnikiem liczb a i b.

„Kwadrat" redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk. Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 2000 egz.