LICZBA TO WIĘCEJ NIŻ SUMA CYFR

Zapis $\overline{abc...}$ oznacza zapis dziesiętny liczby, której kolejnymi cyframi są a, b, c, ...

1. Wyznacz wszystkie cyfry a, dla których liczba $\overline{10a}$ jest liczbą pierwszą.

2. Wyznacz wszystkie cyfry c, dla których liczba $\overline{1234c}$ jest podzielna przez 6.

3. Ile jest liczb pięciocyfrowych postaci $\overline{a567b}$ podzielnych przez 36?

4. Wyznacz wszystkie liczby postaci $\overline{aa2024bb}$, które są podzielne przez 36.

5. Czy wśród liczb 111, 10101, 1001001, 100010001,... znajduje się kwadrat liczby całkowitej?

6. Liczba A ma 2024 cyfry i jest podzielna przez 9. Liczba B jest sumą cyfr liczby A. Liczba C jest sumą cyfr liczby B. Jaka może być suma cyfr liczby C?

7. (18 OMJ, 3 etap) Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych m, n o tej własności, że liczba $(m+n)$-cyfrowa

$$\underbrace{33...3}_{m}\underbrace{66...6}_{n}$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

8. Określ, czy podane liczby są podzielne przez 7:

a) 1472805621 **b)** 35077728021154 **c)** 91343015287

9. Uprość ułamki:

a) $\frac{1212}{4242}$ **b)** $\frac{3193}{1751}$ **c)** $\frac{224466}{122436}$

10. Znajdź takie cyfry a i b, dla których $\overline{baa} - \overline{aab} = \overline{bb}$.

11. Wyznacz wszystkie liczby trzycyfrowe $\overline{abc}$, o cyfrach różnych od zera, dla których spełniona jest równość

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 888.$$

12. Wyznacz wszystkie czterocyfrowe liczby naturalne $\overline{abcd}$ spełniające równanie

$$\overline{abcd} = 20 \cdot \overline{ab} + 21 \cdot \overline{cd}.$$

13. Znajdź wszystkie czterocyfrowe liczby naturalne, których pierwsze dwie cyfry są jednakowe, ostatnie dwie cyfry są jednakowe oraz liczby te są kwadratami liczb całkowitych.

14. (19 OMJ, 1 etap) Wyznacz wszystkie takie liczby naturalne n, że liczba $\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{99...9}_{n}$ jest pierwsza.

15. (17 OMJ, 3 etap) Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby

$$1\underbrace{77...7}_{n} \text{ oraz } 3\underbrace{77...7}_{n}$$

są pierwsze.

16. Wyznacz wszystkie dwucyfrowe liczby naturalne, które są trzy razy większe od sumy swoich cyfr.

17. Wyznacz wszystkie dwucyfrowe liczby naturalne, które są cztery razy większe od sumy swoich cyfr.

18. Wykaż, że iloczyn cyfr liczby trzycyfrowej jest zawsze mniejszy od tej liczby.

19. Udowodnij, że liczba naturalna i suma jej cyfr dają tę samą resztę przy dzieleniu przez 9.

20. (18 OMJ, 2 etap) Liczba naturalna n jest co najmniej dwucyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę dziesiątek a cyfrę jedności tej liczby wpiszemy pewną cyfrę, to uzyskamy sześciokrotność liczby n. Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

21. (15 OMJ, 1 etap) Do pewnej dodatniej liczby całkowitej n dopisano na końcu pewną cyfrę, uzyskując w ten sposób liczbę 13 razy większą od liczby n. Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

22. Cyfry a, b, c, d są różne od zera. Wykaż, że jeśli liczba
$$A = \overline{abcd} + \overline{bcda}$$
jest podzielna przez 101, to również liczba
$$B = \overline{cdab} + \overline{dabc}$$
jest podzielna przez 101.

23. Czy niezależnie od cyfr a i b przez 11 dzieli się liczba:

a) $\overline{abababab}$, **b)** $\overline{aabbaabb}$, **c)** $\overline{aababbab}$, **d)** $\overline{aaababbb}$?

24. Rozstrzygnij, czy istnieją takie cyfry a, b i c, dla których sześciocyfrowa liczba:

a) $\overline{abcabc}$, **b)** $\overline{aaabbb}$, **c)** $\overline{ababab}$

jest kwadratem liczby całkowitej.

25. Szymon wybrał swoją ulubioną jedenastocyfrową liczbę naturalną, pomnożył ją przez 3 i dodał do niej jeszcze 2021. Otrzymał w ten sposób liczbę A. Liczba B jest sumą cyfr liczby A, a jednocyfrowa liczba C jest sumą cyfr liczby B. Jakie wartości może przyjąć C?

26. (17 OMJ, 1 etap) Wybrano n (niekoniecznie różnych) cyfr, z których żadna nie jest równa 0 ani 7. Okazało się, że każda liczba n-cyfrowa zapisana wszystkimi wybranymi cyframi jest podzielna przez 7. Udowodnij, że liczba n jest podzielna przez 6.

27. (16 OMJ, 3 etap) Dane są liczby naturalne a, b, które w zapisie dziesiętnym są zapisane takimi samymi cyframi (tzn. każda z cyfr od 0 do 9 występuje tyle samo razy w zapisie a co w zapisie b). Wykaż, że jeżeli $a + b = 10^{1000}$, to liczby a i b są podzielne przez 10.

28. Czy istnieje:

a) liczba podzielna przez 2023, w której zapisie występują tylko cyfry 1 i 0?

b) liczba podzielna przez 2023, w której zapisie wszystkie cyfry $0 - 9$ występują tyle samo razy?

c) liczba podzielna przez 2023, w której zapisie występuje tylko cyfra 1?

d) liczba podzielna przez 2023, w której zapisie nie ma cyfry 0, a wszystkie cyfry $1 - 9$ występują tyle samo razy?

Jak zmienią się odpowiedzi, jeśli liczbę 2023 zmienimy na 2024? 2025? 2030?