Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria II (sierpień 2012) — rozwiązania zadań

6. *Czy prostokąt o wymiarach* 90×91 *można podzielić na prostokąty o wymiarach* 9×10 *?*

Rozwiązanie

Tak, można. Wystarczy zauważyć, że z 9 prostokątów o wymiarach 10×9 można złożyć prostokąt o wymiarach 90×9, a z 10 prostokątów o wymiarach 9×10 można złożyć prostokąt o wymiarach 90×10.

Z kolei prostokąt o wymiarach 90×91 można złożyć z 9 prostokątów o wymiarach 90×9 i jednego prostokąta o wymiarach 90×10.

7. *Dana jest taka liczba naturalna* k*, że liczby* $10k+1$*,* $40k+1$*,* $50k+1$ *są pierwsze. Niech* $n=(10k+1)\cdot(40k+1)\cdot(50k+1)$*. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej* a*, liczba* $a^{2n-1}-a$ *jest podzielna przez* n*.*

Rozwiązanie

Oznaczmy przez p, q, r odpowiednio liczby pierwsze $10k+1$, $40k+1$, $50k+1$.

Z małego twierdzenia Fermata wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej a

$$a^{10k+1}\equiv a \pmod{p},$$

co po przemnożeniu stronami przez a^{m-1}, gdzie m jest dowolną liczbą naturalną większą od 1, daje

$$a^{10k+m}\equiv a^m \pmod{p},$$

a to z kolei prowadzi do

$$a\equiv a^{10k+1}\equiv a^{20k+1}\equiv a^{30k+1}\equiv\ldots\equiv a^{10ks+1} \pmod{p}$$

dla dowolnej liczby naturalnej s.

Podobnie dochodzimy do

$$a^{40kt+1}\equiv a \pmod{q}$$

oraz

$$a^{50ku+1}\equiv a \pmod{r}$$

dla dowolnych liczb naturalnych t, u.

Dla dowolnej liczby naturalnej w przyjmijmy w powyższych kongruencjach $s=20w$, $t=5w$ oraz $u=4w$. Otrzymujemy

$$a^{200kw+1}\equiv a \pmod{p},$$
$$a^{200kw+1}\equiv a \pmod{q}$$

oraz

$$a^{200kw+1}\equiv a \pmod{r},$$

skąd

$$a^{200kw+1}\equiv a \pmod{n}. \tag{1}$$

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Bezpośrednio wyliczamy, że

$$n=20000k^3+2900k^2+100k+1\,,$$

skąd

$$2n-1=40000k^3+5800k^2+200k+1=200k(200k^2+29k+1)+1\,.$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy więc skorzystać z kongruencji (1) dla

$$w=200k^2+29k+1\,.$$

Uwagi

Można udowodnić, że jeżeli k jest liczbą nieparzystą, to dla dowolnej liczby całkowitej a liczba a^n-a jest podzielna przez n.

Najmniejsze liczby k, dla których liczby p, q, r są pierwsze, to 15, 57, 147, 162 i 183.

---

8. *Liczba naturalna n jest iloczynem k różnych liczb pierwszych nieparzystych. Ile istnieje takich liczb całkowitych dodatnich $a<n$, że liczba a^2-1 jest podzielna przez n?*

Rozwiązanie

Jeżeli p jest nieparzystą liczbą pierwszą, to liczba $a^2-1=(a-1)(a+1)$ jest podzielna przez p wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a\equiv 1 \pmod p \quad \textbf{albo} \quad a\equiv -1 \pmod p\,.$$

Niech $n=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k$ będzie rozkładem liczby n na iloczyn różnych czynników pierwszych. Liczba a^2-1 jest podzielna przez n wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a\equiv \pm 1 \pmod{p_i}$$

dla $i=1,2,3,\ldots,k$.

Na mocy chińskiego twierdzenia o resztach, każdemu układowi liczb

$$(z_1,z_2,z_3,\ldots,z_k)\,,$$

gdzie $z_i\in\{-1,1\}$, odpowiada dokładnie jedna liczba całkowita nieujemna $a<n$ spełniająca układ kongruencji

$$a\equiv z_i \pmod{p_i}$$

dla $i=1,2,3,\ldots,k$. W takim razie liczb nieujemnych a spełniających warunki zadania jest tyle, ile możliwych układów k liczb ze zbioru $\{-1,1\}$, czyli 2^k. Ponieważ liczba $a=0$ warunków zadania nie spełnia, liczb dodatnich $a<n$ spełniających te warunki jest tyle samo, co nieujemnych.

Odpowiedź

Istnieje 2^k liczb spełniających warunki zadania.

---

9. *Okręgi o_1 i o_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta styczna do okręgu o_1 w punkcie A przecina okrąg o_2 w punktach A i D. Prosta styczna do okręgu o_2 w punkcie A przecina okrąg o_1 w punktach A i C. Wykaż, że prosta AB zawiera dwusieczną kąta CBD.*

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie

Niech C' będzie takim punktem na prostej AC, że punkt A leży na odcinku CC'. Analogicznie niech punkt D' będzie takim punktem na prostej AD, że punkt A leży na odcinku DD'.

Wówczas z twierdzenia o stycznej i cięciwie dla cięciwy AC okręgu o_1 i stycznej w punkcie A otrzymujemy, że $\sphericalangle CAD' = \sphericalangle CBA$. Podobnie dla cięciwy AD okręgu o_2 i stycznej w punkcie A otrzymujemy $\sphericalangle C'AD = \sphericalangle ABD$. W takim razie

$$\sphericalangle CBA = \sphericalangle CAD' = \sphericalangle C'AD = \sphericalangle ABD\,,$$

co daje tezę.

---

10. *Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$, spełniających warunek $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2012} = 2012$, zachodzi nierówność*

$$\frac{x_1^3}{x_2} + \frac{x_2^3}{x_3} + \frac{x_3^3}{x_4} + \ldots + \frac{x_{2011}^3}{x_{2012}} + \frac{x_{2012}^3}{x_1} \geqslant 2012\,.$$

Rozwiązanie

Skorzystamy z twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych w następującym brzmieniu:

Niech $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Rozważamy wszystkie iloczyny postaci

$$a_{p(1)}b_{q(1)} + a_{p(2)}b_{q(2)} + a_{p(3)}b_{q(3)} + \ldots + a_{p(n)}b_{q(n)}\,,$$

gdzie $(p(1), p(2), p(3), \ldots, p(n))$ oraz $(q(1), q(2), q(3), \ldots, q(n))$ są permutacjami zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Wówczas najmniejszą wartość ma iloczyn otrzymany dla permutacji spełniających warunki

$$a_{p(1)} \leqslant a_{p(2)} \leqslant a_{p(3)} \leqslant \ldots \leqslant a_{p(n)} \quad \text{oraz} \quad b_{q(1)} \geqslant b_{q(2)} \geqslant b_{q(3)} \geqslant \ldots \geqslant b_{q(n)}\,.$$

Przechodząc do rozwiązania zadania, przyjmijmy

$$a_i = x_i^3 \quad \text{oraz} \quad b_i = \frac{1}{x_i} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, 2012\,.$$

Uporządkujmy liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$ niemalejąco:

$$x_{p(1)} \leqslant x_{p(2)} \leqslant x_{p(3)} \leqslant \ldots \leqslant x_{p(2012)}$$

i zauważmy, że wówczas

$$x_{p(1)}^3 \leqslant x_{p(2)}^3 \leqslant x_{p(3)}^3 \leqslant \ldots \leqslant x_{p(2012)}^3\,,$$

czyli

$$a_{p(1)} \leqslant a_{p(2)} \leqslant a_{p(3)} \leqslant \ldots \leqslant a_{p(2012)}\,.$$

Ponadto

$$\frac{1}{x_{p(1)}} \geqslant \frac{1}{x_{p(2)}} \geqslant \frac{1}{x_{p(3)}} \geqslant \ldots \geqslant \frac{1}{x_{p(2012)}}\,,$$

czyli

$$b_{p(1)} \geqslant b_{p(2)} \geqslant b_{p(3)} \geqslant \ldots \geqslant b_{p(2012)}\,.$$

Zatem dane w zadaniu wyrażenie ma wartość nie mniejszą od

$$a_{p(1)}b_{p(1)}+a_{p(2)}b_{p(2)}+a_{p(3)}b_{p(3)}+\ldots+a_{p(2012)}b_{p(2012)}=\frac{x_{p(1)}^3}{x_{p(1)}}+\frac{x_{p(2)}^3}{x_{p(2)}}+\frac{x_{p(3)}^3}{x_{p(3)}}+\ldots+\frac{x_{p(2012)}^3}{x_{p(2012)}}=$$

$$=x_{p(1)}^2+x_{p(2)}^2+x_{p(3)}^2+\ldots+x_{p(2012)}^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_{2012}^2\,.$$

Oznaczmy $y_i=x_i-1$. Wówczas $x_i=1+y_i$ oraz

$$y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{2012}=0\,.$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_{2012}^2=\\
&\qquad=\left(1+2y_1+y_1^2\right)+\left(1+2y_2+y_2^2\right)+\left(1+2y_3+y_3^2\right)+\ldots+\left(1+2y_{2012}+y_{2012}^2\right)=\\
&\qquad=2012+2\left(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{2012}\right)+y_1^2+y_2^2+y_3^2+\ldots+y_{2012}^2=\\
&\qquad=2012+y_1^2+y_2^2+y_3^2+\ldots+y_{2012}^2\geqslant 2012\,,
\end{aligned}$$

co kończy rozwiązanie zadania.

Urszula Swianiewicz
Kierownik naukowy obozu

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Ośrodek Rozwoju Edukacji
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego