

# Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013  
Seria X (kwiecień 2013)



**46.** Na szachownicy  $75 \times 75$  umieszczono 120 kwadratów  $3 \times 3$  tak, że każdy pokrywa 9 pól. Udowodnij, że na tej szachownicy można umieścić dodatkowo kwadrat  $5 \times 5$  tak, aby pokrywał 25 wolnych pól.

**47.** Rozstrzygnij, czy dla dowolnej liczby pierwszej  $p$  istnieje taka dodatnia liczba całkowita  $n$ , że liczba  $3^n + n^2$  jest podzielna przez  $p$ .

**48.** Rozstrzygnij, czy dla dowolnej liczby pierwszej  $p$  istnieje taka dodatnia liczba całkowita  $n$ , że liczba  $3^n + n^p$  jest podzielna przez  $p$ .

**49.** W trójkącie  $ABC$  o polu 1 punkty  $A_1, B_1, C_1$  są odpowiednio środkami boków  $BC, CA$  i  $AB$ . Punkty  $K, L, M$  należą odpowiednio do odcinków  $AB_1, BC_1, CA_1$ . Wykaż, że pole części wspólnej trójkątów  $A_1B_1C_1$  i  $KLM$  jest nie mniejsze niż  $\frac{1}{8}$ .

**50.** Wewnątrz kuli o promieniu 10 umieszczono 3803 odcinki o łącznej długości 3803. Udowodnij, że istnieje kula o promieniu 1, której wnętrze ma punkty wspólne z co najmniej sześcioma z tych odcinków.



*Urszula Pastwa*  
Kierownik naukowy obozu

