Budujemy trójkąt

1. Wysokości pewnego trójkąta mają długości odpowiednio h_a, h_b, h_c. Wykaż, że z odcinków o długościach $\frac{1}{h_a}$, $\frac{1}{h_b}$, $\frac{1}{h_c}$ można zbudować trójkąt.

2. Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC. Wykaż, że z odcinków o długościach PA, PB, PC można zbudować trójkąt.

Typowe nierówności

3. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że $AO + BO < AC + BC$.

4. Trójkąt PQR leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że obwód trójkąta PQR jest mniejszy od obwodu trójkąta ABC.

5. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że
$$\frac{1}{2}(AB + BC + CA) < AO + BO + CO < AB + BC + CA.$$

6. Niech AD będzie środkową w trójkącie ABC. Udowodnij, że $2AD < AB + AC$.

7. Niech punkty $D,\ E,\ F$ będą środkami boków $BC,\ AC$ i AB trójkąta ABC. Udowodnij, że
$$\frac{1}{2}(AB + BC + CA) < AD + BE + CF < AB + BC + CA.$$

8. Udowodnij, że suma długości przekątnych czworokąta wypukłego jest mniejsza od obwodu tego czworokąta, zaś większa od połowy obwodu tego czworokąta.

Najkrótsza droga, najmniejszy obwód

9. Dana jest prosta k oraz punktu A i B leżące po tej samej stronie prostej k. Na prostej k wyznacz taki punkt C, aby suma długości odcinków AC i BC była najmniejsza.

10. Dwie wsie znajdują się po dwóch stronach rzeki, której brzegi tworzą parę równoległych prostych. W którym miejscu trzeba zbudować most prostopadle do brzegów, aby droga z jednej wsi do drugiej była jak najkrótsza?

11. Punkt P leży na boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Wyznacz punkty Q i R odpowiednio na bokach BC i CA tak, aby obwód trójkąta PQR był najmniejszy.

W parze z Pitagorasem

12. Udowodnij nierówność
$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geqslant \sqrt{2}(a+b+c).$$

13. Udowodnij nierówność
$$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \geqslant \sqrt{6(a+b+c)}.$$

W przestrzeni

14. Na przeciwległych wierzchołkach sześciennego pudła o krawędzi 1 siedzą pająk i mucha. Pająk chce przejść najkrótszą możliwą drogą po powierzchni pudła do wierzchołka, w którym znajduje się mucha. Jak długą drogę musi pokonać?

15. Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$, w którym

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 20^\circ.$$

Wykaż, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości każdej z krawędzi AS, BS i CS.

Nierówności z gwiazdką

16. Dany jest okrąg o promieniu 1 oraz punkty $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$. Udowodnij, że na tym okręgu istnieje taki punkt P, że zachodzi

$$PA_1 + PA_2 + \ldots PA_n \geqslant n.$$

17. Dany jest $(2n)$-kąt wypukły o obwodzie 1. Wykaż, że suma długości przekątnych tego wielokąta jest mniejsza niż $\frac{1}{2}n^2 - 1$.

18. Dany jest wielokąt wypukły. Wykaż, że średnia arytmetyczna długości boków tego wielokąta jest mniejsza niż średnia arytmetyczna długości jego przekątnych.