Bartłomiej Bzdęga

NIEZMIENNIKI, PÓŁNIEZMIENNIKI I ZMIENNIKI

Pleszew, 13 stycznia 2023 r.

NIEZMIENNIKI

1. W sumie $1 + 2 + \ldots + 50$ chcemy zmienić niektóre znaki $+$ na $-$, tak żeby wynik był równy 0. Wykazać, że to niemożliwe.

2. Na tablicy napisano kilka liczb naturalnych. Ruch polega na zmazaniu dwóch spośród tych liczb i zapisaniu wartości bezwzględnej ich różnicy. Czynność powtarzamy, póki na tablicy zostanie jedna liczba. Wykazać, że jeśli ta liczba może być jedynką, to nie może być zerem.

3. W wierzchołkach kwadratu stoją pionki. Ruch polega na wyborze dwóch pionków, a następnie przestawieniu jednego z nich na punkt płaszczyzny symetryczny względem punktu zajmowanego przez drugi pionek. Czy jest możliwe, aby po pewnej liczbie ruchów dwa pionki stanęły w tym samym miejscu?

4. Na każdym polu szachownicy 1024×1 leży moneta. Wykonujemy następujące ruchy. Wybieramy trzy takie pola A, M, B, że środek pola M jest środkiem odcinka łączącego środki pól A i B oraz na polach A i B leży co najmniej po jednej monecie. Następnie zabieramy po jednej monecie z pól A i B i przekładamy te monety na pole M. Czy można doprowadzić do tego, żeby wszystkie monety leżały na jednym polu?

5. Jedno dziecko ma 10 cukierków, drugie 15, a trzecie 20. Każde z nich może w dowolnej chwili dać po jednym swoim cukierku pozostałej dwójce. Czy dzieląc się w ten sposób, dzieci mogą doprowadzić do tego, by każde z nich miało 15 cukierków?

6. Na kolorowej wyspie mieszkają kameleony w trzech kolorach: 5 żółtych, 10 czerwonych, 15 niebieskich. Jeśli spotkają się dwa kameleony różnych kolorów, to oba zmienią kolor na taki, którego nie ma żaden z nich (na przykład żółty i czerwony staną się niebieskie). Czy jest możliwe, by za jakiś czas było po tyle samo kameleonów w pewnych dwóch kolorach?

7. Na podłodze znajdują się trzy pchły, przy czym nie siedzą one na jednej prostej. Co sekundę jedna z pcheł skacze przez inną i ląduje za nią w takiej samej odległości, w jakiej była od niej oddalona przed skokiem. Czy jest możliwe, żeby po jakimś czasie jedna z pcheł wylądowała na innej?

8. W kręgu stoi 16 drzew, na każdym siedzi jeden wróbel. Wróble przelatują czasem na inne drzewa, ale zgodnie z regułą: dwa wróble lecą jednocześnie, każdy na drzewo sąsiadujące z tym, na którym siedział, jeden zgodnie, a drugi przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Czy jest możliwe, aby w pewnej chwili wszystkie wróble siedziały na tym samym drzewie?

9. Płaszczyznę podzielono na trójkąty równoboczne w ten sposób, że w każdym wierzchołku (węźle) spotyka się sześć trójkątów. W każdym węźle znajduje się lampka, natomiast na każdym trójkącie jest włącznik, który zmienia stan lampek (świeci / nie świeci) znajdujących się w węzłach będących wierzchołkami tego trójkąta. Rozstrzygnąć, czy zaczynając od sytuacji w której świeci się dokładnie jedna lampka, możemy doprowadzić do zgaszenia wszystkich lampek.

PÓŁNIEZMIENNIKI

1. Na szachownicy 8×8 panuje epidemia – niektóre pola są chore. Jeśli jakieś pole sąsiaduje z dwoma lub więcej chorymi, to też zostaje zarażone. Na koniec tego procesu cała szachownica zaostała zarażona. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba chorych pól na początku?
   (Pola nazywamy sąsiadującymi, jeśli mają wspólny bok.)

2. Z kostek domina 2×1 zbudowano kwadrat $n \times n$. Następnie usuwano kolejno po jednej kostce sąsiadującej z przynajmniej trzema innymi, jeszcze nie usuniętymi kostkami. Czynność tę powtarzano, dopóki było to możliwe. Dowieść, że na końcu pozostało co najmniej $\frac{2}{3}n$ kostek. (Kostki sąsiadują, jeśli mają co najmniej jedną jednostkę wspólnego brzegu.)

3. Na okręgu ω znajdują się punkty A, B i C, przy czym trójkąt ABC nie jest równoboczny. Ruch polega na wyborze jednego z wierzchołków i przesunięcie go na środek łuku okręgu ω utworzonego przez dwa pozostałe wierzchołki, przy czym przesuwany wierzchołek musi pozostać na tym samym łuku. Czy jest możliwe, by po pewnej liczbie ruchów otrzymać trójkąt przystający do ABC? (Liczą się jedynie te ruchy, w których wierzchołek został rzeczywiście przesunięty.)

ZMIENNIKI

1. Na każdym polu szachownicy 5×5 stoi czerwony lub zielony pionek. Możemy wybrać dowolny wiersz lub kolumnę szachownicy i zamienić tam wszystkie czerwone pionki na zielone, a wszystkie zielone na czerwone. Czy wykonując takie ruchy, zawsze można doprowadzić do tego, by w każdym wierszu i w każdej kolumnie było więcej czerwonych pionków niż zielonych?

2. W każdym polu tabeli $m \times n$ wpisano pewną liczbę rzeczywistą. W danej chwili możemy wybrać jedną kolumnę lub wiersz tej tabeli i zmienić znaki występujących w nim liczb na przeciwne. Wykazać, że stosując takie operacje, można doprowadzić do tego, by suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie była nieujemna.

3. W szeregu stoi 10 żołnierzy. Na komendę *na lewo patrz!* część z nich odwraca się w lewo, a część w prawo. Następnie co sekundę wszyscy żołnierze, którzy stoją obok siebie i są zwróceni do siebie twarzami, obracają się o $180°$. Czy zawsze po pewnym czasie żołnierze przestaną się obracać?

4. Trójkąt równoboczny o boku 10 zbudowano ze 100 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1. Każda z płytek ma dwie strony – czerwoną i niebieską. Jeśli płytka odwrócona jest do góry stroną koloru innego niż większość płytek sąsiednich (mających wspólny bok), to można tę płytkę odwrócić. Udowodnić, że da się wykonać tylko skończenie wiele takich operacji.

5. Na okręgu znajduje się $n \geqslant 2$ punktów czarnych i n białych. Rysujemy n cięciw, z których każda ma jeden koniec biały a drugi czarny. Czy zawsze można zrobić to tak, by żadne dwie narysowane cięciwy nie przecinały się?

6. Mamy dany wielokąt wklęsły. Ruch polega na wyborze przekątnej AB leżącej na zewnątrz tego wielokąta, przy czym cały wielokąt poza punktami A i B musi leżeć po jednej stronie prostej AB. Następnie jedną z łamanych, na które punkty A i B dzielą brzeg wielokąta, odbijamy środkowo-symetrycznie względem środka odcinka AB, otrzymując nowy wielokąt. Dowieść, że po pewnej, skończonej liczbie takich operacji, otrzymamy wielokąt wypukły.