STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Treści zadań Obozu Naukowego OMG

Poziom OM
2016 rok

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

SZCZYRK 2016

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Na zewnątrz tego trójkąta zbudowano trójkąty równoboczne ABF, BCD, CAE. Udowodnij, że

$$[BCD]+[CAE]=[ACBF].$$

Uwaga: Symbol $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

2. Liczby p, $2p+1$, $4p^2+1$ oraz $8p+1$ są pierwsze. Udowodnij, że liczba $6p+1$ również jest pierwsza.

3. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby całkowite a, b, c, d, e, że liczby a^2-b, a^3-c, c^5-d, b^7-e są podzielne przez p. Udowodnij, że liczba $ae-d$ jest podzielna przez p.

4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, który nie jest trapezem. Symetralne odcinków AB i CD przecinają się w punkcie K, zaś symetralne odcinków AD i BC przecinają się w punkcie L, przy czym punkty K i L leżą wewnątrz czworokąta $ABCD$. Wykaż, że jeżeli $\sphericalangle AKB = \sphericalangle CKD$, to $\sphericalangle ALD = \sphericalangle BLC$.

5. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}+\frac{d}{d^2+1}\leqslant\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{d^2+1}+\frac{d}{a^2+1}.$$

6. Wzdłuż ulicy stoją lampy ponumerowane liczbami od 1 do 100. Początkowo wszystkie lampy są zgaszone. W pojedynczym ruchu możemy zmienić stan (zapalona/zgaszona) trzech różnych lamp o numerach tworzących trójwyrazowy ciąg geometryczny. Czy po pewnej liczbie takich ruchów można uzyskać sytuację, w której dokładnie jedna lampa jest zapalona? Odpowiedź uzasadnij.

7. Środek sfery wpisanej w czworościan $ABCD$ ma taką samą odległość od wszystkich jego krawędzi. Udowodnij, że czworościan ten jest foremny.

8. Czy zbiór liczb $\{1,2,3,\ldots,3n-2,3n-1,3n+1\}$ można podzielić na n podzbiorów trójelementowych tak, aby liczby w każdym z podzbiorów były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Odpowiedź uzasadnij.

Drugie zawody indywidualne

9. Udowodnij, że wśród liczb $n^{n^n}+1$, gdzie n przebiega dodatnie liczby całkowite mniejsze od 10^{100}, jest nie więcej niż 10 liczb pierwszych.

10. Dany jest trapez $ABCD$. Punkt E leży na podstawie AB, przy czym obwody trójkątów ADE, BCE, CDE są równe. Udowodnij, że

$$AB = 2 \cdot CD.$$

11. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$abc < \frac{a^2 + b^3 + c^6}{\sqrt{7}}.$$

12. Ciąg (a_n) jest zdefiniowany wzorami

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n^2 + a_n \qquad \text{dla} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej k liczba $a_{(k+1)!} - a_{k!}$ jest podzielna przez k.

Trzecie zawody indywidualne

13. Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o. Punkt $P \neq C$ leży na prostej stycznej do okręgu o w punkcie C. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste AC i BC. Udowodnij, że proste AB i KL są prostopadłe.

14. Czy istnieje liczba pierwsza $p \neq 3$ oraz takie liczby całkowite a, b, c niepodzielne przez p, że liczby $a+b+c$ oraz $a^2+b^2+c^2$ są podzielne przez p?

15. Czy istnieje liczba pierwsza $p \neq 3$ oraz takie liczby całkowite a, b, c niepodzielne przez p, że liczby $a+b+c$ oraz $a^3+b^3+c^3$ są podzielne przez p?

16. Wykaż, że dowolny nierównoramienny trójkąt rozwartokątny można rozciąć na trzy trójkąty o równych promieniach okręgów opisanych.

17. Czy prostokątnymi paskami papieru o wymiarach 1×4 można okleić trzy ściany prostopadłościanu $10 \times 10 \times 11$ mające wspólny wierzchołek? Paski można zaginać wzdłuż krawędzi prostopadłościanu, ale nie mogą na siebie zachodzić ani wystawać poza oklejane ściany.

Czwarte zawody indywidualne

18. Udowodnij, że dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej p istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że

$$n^n \equiv (n+1)^{n+1} \pmod{p}.$$

19. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają nierówności

$$x+y+z \geqslant 6,$$

$$xy+yz+zx \geqslant 11,$$

$$xyz \leqslant 6.$$

Udowodnij, że

$$x^2y+y^2z+z^2x+x^2z+y^2x+z^2y \geqslant 48.$$

20. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt F jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Okrąg o średnicy AB przecina odcinek CF w punkcie G. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Udowodnij, że jeśli H jest środkiem odcinka GF, to G jest środkiem odcinka CF.

21. Udowodnij, że równanie

$$2a^2+7b^2=11c^2$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, których największy wspólny dzielnik jest równy 1.

Mecz matematyczny

22. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m, n spełniających warunek

$$m \equiv n \pmod{220}$$

zachodzi

$$m^{m^m} \equiv n^{n^n} \pmod{11}.$$

23. Dany jest trójkąt ABC oraz okrąg ω, który przecina odcinki BC, CA, AB odpowiednio w punktach A_1 i A_2, B_1 i B_2 oraz C_1 i C_2 różnych od wierzchołków A, B, C. Wykaż, że jeśli pewne trzy spośród sześciu odcinków AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 przecinają się w jednym punkcie, to pozostałe trzy odcinki też przecinają się w jednym punkcie.

24. Udowodnij, że równanie

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^m+\left(3+\sqrt{5}\right)^n=\left(4+\sqrt{5}\right)^k$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych m, n, k.

25. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$(n-2)^{3n-2}\cdot(n+1)^{6n-4}\cdot n^{12} < (n+2)^{3n+2}\cdot(n-1)^{6n+4}.$$

26. Punkt P należy do wnętrza wielokąta wypukłego $\mathcal{W}$. Wykaż, że na obwodzie tego wielokąta istnieją takie punkty A, B, C, że punkt P jest środkiem ciężkości (być może zdegenerowanego) trójkąta ABC.

27. Rozstrzygnij, czy istnieje sześcian o wierzchołkach w punktach kratowych, którego długość krawędzi nie jest liczbą całkowitą.

28. Udowodnij, że równanie

$$\left[m\sqrt{15}\right] = 5n + \left[n\sqrt{15}\right]$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych m, n.

Uwaga: Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

29. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 30^\circ$. Na bokach BC, AC znajdują się odpowiednio takie punkty D i E, że

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle AEB = \sphericalangle DEC.$$

Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie K, a odcinki DE i CK przecinają się w punkcie L. Wykaż, że $AD + DL = BE + EL$.

30. Czy kwadrat o boku 1000 można tak podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 2×7 lub 3×5, aby dłuższe boki wszystkich prostokątów podziału były równoległe?

31. Na Wyspach Bergamutach podobno jest Kot w Butach i podobno żyje tam po 2016 zwierząt każdego z pięciu gatunków: alfaurów, betaurów, centaurów, deltaurów i elfaurów.

- Gdy betaur spotyka alfaura, zjada go i zamienia się w centaura.
- Gdy centaur spotyka betaura, zjada go i zamienia się w deltaura.
- Gdy deltaur spotyka centaura, zjada go i zamienia się w elfaura.
- Gdy elfaur spotyka deltaura, zjada go i zamienia się w alfaura.
- Gdy alfaur spotyka elfaura, zjada go i zamienia się w betaura.

Udowodnij, że na Wyspach Bergamutach zostaną co najmniej 3 zwierzęta (nie licząc Kota w Butach).

32. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym każdy kąt płaski przy wierzchołku A ma miarę 60°. Udowodnij, że zachodzi nierówność

$$AB + AC + AD \leqslant BC + CD + DB.$$