STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ JUNIORÓW

Treści zadań Obozu Naukowego OMJ

Poziom OM
2017 rok

Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

SZCZYRK 2017

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$ oraz takie punkty D i E, że punkt D należy do odcinka AC, B zaś do odcinka CE, przy czym $AD = BE$. Udowodnij, że środek odcinka DE leży na prostej AB.

2. Początkowo na jednym polu szachownicy 8×8 znajdują się 64 ziarenka ryżu, a pozostałe pola są puste. W pojedynczym ruchu wybieramy dwa pola szachownicy, na których znajdują się liczby ziarenek ryżu różniące się o co najmniej dwa, a następnie przekładamy jedno ziarenko ryżu z pola zawierającego więcej ziarenek na pole zawierające mniej ziarenek. Udowodnij, że nie jest możliwe wykonanie 2017 kolejnych ruchów.

3. Wierzchołki 4444-kąta foremnego podzielono na 2222 pary. Udowodnij, że odcinki wyznaczone przez pewne dwie pary są tej samej długości.

4. Punkt D wybrano na krótszym łuku BC okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC. Prosta CD przecina prostą AB w punkcie L, a prosta BD przecina prostą AC w punkcie K. Wykaż, że prosta KL przechodzi przez pewien punkt niezależny od wyboru punktu D.

5. Dane są różne nieparzyste liczby pierwsze p, q, r oraz takie dodatnie liczby całkowite $a < p$, $b < q$, $c < r$, że liczby $aqr + 1$, $bpr + 1$ i $cpq + 1$ są podzielne odpowiednio przez p, q i r.

Udowodnij, że jeżeli liczba $aqr + bpr + cpq$ jest parzysta, to jest ona mniejsza od pqr.

6. Liczba *palindromiczna* to liczba, która nie zmieni się po odwróceniu kolejności cyfr. Palindromiczne są np. liczby $7^1 = 7$ i $7^3 = 343$. Czy istnieje potęga siódemki, która jest liczbą palindromiczną o parzystej liczbie cyfr?

7. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym M jest środkiem boku AB. Proste ℓ_A i ℓ_B są prostopadłe do AB i przechodzą odpowiednio przez A i B. Prosta prostopadła do AC przechodząca przez punkt M przecina ℓ_A w punkcie E, a prosta prostopadła do BC przechodząca przez punkt M przecina ℓ_B w punkcie F. Proste CM i EF przecinają się w punkcie D. Wykaż, że $\sphericalangle ADB = \sphericalangle EMF$.

8. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności

$$a + b + c + d \leqslant 2 \qquad \text{oraz} \qquad ab + bc + cd + da \geqslant 1.$$

Udowodnij, że

$$|a - b + c - d| \leqslant \frac{1}{16}.$$

Drugie zawody indywidualne

9. Dla dodatniej liczby całkowitej n niech $K(n)$ będzie liczbą kwadratów o wierzchołkach w punktach kratowych o obu współrzędnych ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. W szczególności $K(1)=0$, $K(2)=1$, $K(3)=6$, $K(4)=20$. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p>3$ liczba $K(p)$ jest podzielna przez p^2.

10. Odcinek BC jest najkrótszym bokiem nierównoramiennego trójkąta ABC. Punkt X wybrano na boku BC. Punkty K i L należą odpowiednio do odcinków AB i AC, przy czym $BK=BX$ oraz $CL=CX$. Wykaż, że środek odcinka KL leży na pewnej prostej niezależnej od wyboru punktu X.

11. Udowodnij, że spośród dowolnych 205 parami różnych liczb całkowitych można wybrać takie trzy parami różne liczby a, b, c, że liczba

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

jest podzielna przez 103.

12. Udowodnij nierówność $\sqrt[100]{1,1}<1,001$.

13. Udowodnij nierówność $\sqrt[100]{1,1}>1,0009$.

Trzecie zawody indywidualne

14. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty M i N leżą na przekątnej AC, przy czym $AM=CN$. Wykaż, że jeśli $\sphericalangle ADM=\sphericalangle CDB$, to $\sphericalangle ABD=\sphericalangle CBN$.

15. *Prostokątem magicznym* o wymiarach $m\times n$ nazywamy tablicę rozmiaru $m\times n$ wypełnioną różnymi liczbami całkowitymi od 1 do mn w taki sposób, że sumy liczb we wszystkich wierszach są równe, a także sumy liczb we wszystkich kolumnach są równe.

Udowodnij, że dla żadnej dodatniej liczby całkowitej k nie istnieje prostokąt magiczny o wymiarach $k\times(k+1)$.

16. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek $(a,\,b,\,c)$ dodatnich liczb całkowitych spełniających warunki $a<b<c$, $\mathrm{NWW}(a,\,b,\,c)\leqslant a^2$ oraz $c\leqslant a+\sqrt{a}$.

17. Udowodnij, że nie istnieje trójka $(a,\,b,\,c)$ dodatnich liczb całkowitych spełniających warunki $a<b<c$, $\mathrm{NWW}(a,\,b,\,c)\leqslant a^2$ oraz $c\leqslant a+\sqrt[3]{a}$.

18. Dany jest trójkąt ABC oraz punkty K i L leżące odpowiednio na bokach BC i AC. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków AK i BL. Proste KN i LM przecinają się w punkcie P. Wykaż, że jeżeli punkt P leży na dwusiecznej kąta ACB, to $AL=BK$.

Czwarte zawody indywidualne

19. Dane są takie liczby całkowite m, n, że liczba $m^{12}-n^{13}$ dzieli się przez 157. Wykaż, że liczba $m^{13}-n^{14}-m+n$ dzieli się przez 157.

20. Dany jest trójkąt równoboczny ABC, który jest opisany na okręgu ω i wpisany w okrąg Γ. Styczna do okręgu ω w punkcie X przecina odcinki AC i BC odpowiednio w punktach P i Q.

(a) Wykaż, że okrąg o środku P i promieniu PB oraz okrąg o środku Q i promieniu QA mają punkt wspólny Y należący do Γ.

(b) Udowodnij, że proste XY oraz PQ są prostopadłe.

Uwaga. Za rozwiązanie każdego z podpunktów można otrzymać 6 punktów.

21. Dana jest liczba $n \geqslant 1$ oraz pewien zbiór $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ dodatnich liczb całkowitych. Na okręgu wyróżniono 2^n punktów i każdemu z nich przyporządkowano jedną z liczb ze zbioru A. Udowodnij, że iloczyn liczb znajdujących się na pewnym łuku tego okręgu (zawierającym co najmniej jedną z nich) jest kwadratem liczby całkowitej.

22. Rozstrzygnij, czy prawdziwe jest następujące stwierdzenie:

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_8 spełniających równanie $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ldots+a_8^3=8$ zachodzi nierówność

$$a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+a_3^2a_4^2+\ldots+a_7^2a_8^2+a_8^2a_1^2 \leqslant 8.$$

23. Rozstrzygnij, czy prawdziwe jest następujące stwierdzenie:

Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, a_4 spełniających równanie $a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3=4$ zachodzi nierówność

$$a_1^2a_2^2+a_2^2a_3^2+a_3^2a_4^2+a_4^2a_1^2 \leqslant 4.$$

Mecz matematyczny

24. Rozstrzygnij, czy kwadrat o boku 35 można podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 1×14 lub 1×15.

25. Dany jest kąt wypukły α oraz punkt K należący do wnętrza tego kąta. Wykaż, że istnieje punkt M o następującej własności: Jeśli prosta przechodząca przez punkt K przecina ramiona kąta α w punktach A i B, to półprosta MK jest dwusieczną kąta AMB.

26. *Prostokątem magicznym* o wymiarach $m\times n$ nazywamy tablicę rozmiaru $m\times n$ wypełnioną różnymi liczbami całkowitymi od 1 do mn w taki sposób, że sumy liczb we wszystkich wierszach są równe, a także sumy liczb we wszystkich kolumnach są równe.

Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych k, dla których istnieje prostokąt magiczny o wymiarach $k\times(k+2)$.

27. Niech $p>5$ będzie liczbą pierwszą. Dodatnie liczby całkowite m, n są mniejsze od $p/2$ i spełniają kongruencję $m^5+n^5\equiv(m+n)^5 \pmod{p}$. Udowodnij, że $m^{25}+n^{25}\equiv(m+n)^{25} \pmod{p^2}$.

28. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC<BC$. Punkt M jest środkiem boku AB, a odcinki AE i BF są wysokościami trójkąta ABC. Punkty K i L są środkami odpowiednio odcinków EM i FM. Prosta przechodząca przez punkt C i równoległa do prostej AB przecina prostą KL w punkcie T. Wykaż, że $TC=TM$.

29. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n spełniającej nierówności $1000\leqslant n\leqslant 2000$ liczba 4^n+2^n+1 jest złożona.

30. Liczba wymierna $q>1$ oraz liczba naturalna $n>1$ spełniają równanie

$$q^n=n^q.$$

Udowodnij, że liczba q jest całkowita.

31. Dany jest różnoboczny trójkąt ostrokątny ABC. Symetralna boku BC przecina proste CA i AB odpowiednio w punktach A_1 i A_2, symetralna boku CA przecina proste AB i BC odpowiednio w punktach B_1 i B_2, a symetralna boku AB przecina proste BC i CA odpowiednio w punktach C_1 i C_2. Wykaż, że środki okręgów opisanych na trójkątach ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ leżą na jednej prostej.

32. Niech

$$P(n,k)=(kn+1)\cdot(kn+2)\cdot(kn+3)\cdot\ldots\cdot(kn+k-1)\cdot(kn+k).$$

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych n, k, ℓ zachodzi nierówność

$$P(n,k+\ell)\cdot k^k\cdot\ell^\ell<P(n,k)\cdot P(n,\ell)\cdot(k+\ell)^{k+\ell}.$$

33. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej $n\geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{1^2+1}+\sqrt{2^2+1}+\sqrt{3^2+1}+\ldots+\sqrt{n^2+1}>\frac{n}{2}\cdot\sqrt{n^2+2n+5}.$$

34. Dany jest czworościan $ABCD$ oraz punkt P wewnątrz tego czworościanu. Punkty A', B', C', D' są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na płaszczyzny BCD, CDA, DAB, ABC, przy czym należą one do ścian czworościanu. Prosta a przechodzi przez punkt A i jest prostopadła do płaszczyzny $B'C'D'$. Analogicznie definiujemy proste b, c, d. Udowodnij, że proste a, b, c, d przecinają się w jednym punkcie.