I Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
rok szkolny 2005/06
Zadania zawodów I stopnia

1. Dowieść, że

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=1\,.$$

2. Dany jest czworokąt wypukły o następujących własnościach:
- w czworokąt można wpisać okrąg,
- przekątne czworokąta są prostopadłe.

Dowieść, że jedna z przekątnych czworokąta dzieli drugą na połowy.

3. W kole o promieniu 10 wybrano 99 punktów. Dowieść, że wewnątrz koła istnieje punkt odległy od każdego z wybranych punktów o więcej niż 1.

4. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} 25x^2+\ \ 9y^2=12yz \\ \ \ 9y^2+\ \ 4z^2=20xz \\ \ \ 4z^2+25x^2=30xy \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych x, y, z.

5. Ogrodnik włożył 121 jabłek do 15 wiader w taki sposób, że w każdym wiadrze znalazło się co najmniej jedno jabłko. Czy jest możliwe, że w każdym wiadrze znajduje się inna liczba jabłek?

6. Wiadomo, że prawdziwa moneta waży 10 gramów, a fałszywa 9 gramów. Mamy 5 monet o łącznej wadze 48 gramów i dysponujemy wagą elektroniczną. Wykonując ważenie możemy położyć ma wagę dowolną liczbę wybranych przez nas monet i odczytać ich łączną wagę. Czy wykonując nie więcej niż 3 ważenia możemy zawsze rozpoznać, które z danych monet są fałszywe, a które prawdziwe?

7. Na płaszczyźnie dane są punkty A, B, C, D. Punkt B jest środkiem odcinka AC, a przy tym $AB=BC=BD=17$ oraz $AD=16$. Obliczyć długość odcinka CD.