Zadania II Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów
1 września 2006 r. – 16 października 2006 r.
(zawody stopnia pierwszego)

1. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, że suma cyfr każdej z nich jest równa 2006, a suma cyfr liczby $a\cdot b$ jest równa 2006^2? Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ oraz $AC \neq BC$. Punkty P i Q są takie, że czworokąt $APBQ$ jest kwadratem. Udowodnij, że proste CP i CQ są prostopadłe.

3. Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r spełniające układ równań

$$\begin{cases} q = p^2 + 6 \\ r = q^2 + 6 \end{cases}$$

4. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB oraz $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Udowodnij, że

$$CM \geqslant \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot AB\,.$$

5. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: Dla każdej pary liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzi nierówność

$$xy^n < x^4 + y^4\,.$$

6. Czy istnieje taki czworościan, w którym co najmniej jedna ściana jest trójkątem rozwartokątnym, a środek sfery opisanej na tym czworościanie leży w jego wnętrzu? Odpowiedź uzasadnij.

7. Spośród wszystkich wierzchołków 17-kąta foremnego wybrano dziesięć. Wykaż, że wśród wybranych punktów są cztery będące wierzchołkami trapezu.