II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia drugiego)

13 stycznia 2007 r.

1. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=23 \\ a+2b+4c=22 \end{cases}$$

2. Miara każdego kąta sześciokąta $ABCDEF$ jest równa $120°$. Udowodnij, że symetralne odcinków AB, CD i EF przecinają się w jednym punkcie.

3. W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.

4. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, że liczba $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ jest w systemie dziesiętnym zakończona cyframi „10”?
Odpowiedź uzasadnij.

5. Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$, w którym

$$\measuredangle ASB = \measuredangle BSC = \measuredangle CSA = 20^\circ\,.$$

Wykaż, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości każdej z krawędzi AS, BS i CS.