II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
(zawody stopnia trzeciego)
10 marca 2007 r.

Szkice rozwiązań

---

1. *Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:*

$$\begin{cases} ab = a+b \\ bc = b+c \\ ca = c+a \end{cases}$$

Rozwiązanie
Odejmujemy stronami równanie drugie od pierwszego. W efekcie uzyskujemy $ab-bc=a-c$, czyli po przekształceniach $(b-1)(a-c)=0$. Stąd $b=1$ lub $a=c$. Przypadek $b=1$ nie może być spełniony, gdyż wtedy pierwsze równanie przybrałoby sprzeczną postać $a=a+1$. Wobec tego $a=c$. Analogicznie, rozpatrując równanie drugie i trzecie dowodzimy, że $b=a$. W efekcie otrzymujemy $a=b=c$.
Z pierwszego równania mamy wówczas $a^2=2a$, czyli $a=0$ lub $a=2$. Stąd $(a,b,c)=(0,0,0)$ lub $(a,b,c)=(2,2,2)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że uzyskane trójki (a,b,c) istotnie są rozwiązaniem danego układu równań.

---

2. *Każdemu wierzchołkowi 100-kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują? Odpowiedź uzasadnij.*

Rozwiązanie
Przypuśćmy, że takie przyporządkowanie istnieje oraz niech a będzie największą spośród wszystkich przyporządkowanych liczb. Oznaczmy ponadto przez b i c liczby sąsiadujące z liczbą a oraz przyjmijmy, że $b \geqslant c$. Skoro liczba a jest największa spośród rozpatrywanych liczb, więc $b \leqslant a$.
Z drugiej strony, ponieważ $c>0$, więc $b>b-c=|b-c|=a$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że opisane w treści zadania przyporządkowanie nie istnieje.

---

3. *W trójkącie ostrokątnym ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC. Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina odcinek MN w punkcie D. Symetralna boku AB przecina odcinek MN w punkcie E. Wykaż, że $MD=NE$.*

Rozwiązanie
Niech K będzie środkiem boku AB oraz przyjmijmy, że prosta CK przecina odcinek MN w punkcie L. Korzystając z twierdzenia Talesa uzyskujemy

$$\frac{LD}{LE} = \frac{CD}{KE} = 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{LM}{LN} = \frac{AK}{KB} = 1,$$

skąd $LD=LE$ oraz $LM=LN$. Zatem ostatecznie $MD=LM-LD=LN-LE=NE$.

---

4. *Ile jest takich liczb n należących do zbioru $\{1,2,\dots,2007\}$, dla których liczba n^4-1 jest podzielna przez 9 ? Odpowiedź uzasadnij.*

Rozwiązanie
Zauważmy, że $n^4-1=(n-1)(n+1)(n^2+1)$. Liczba n^2+1 daje z dzielenia przez 3 resztę 1 lub 2, więc liczba n^4-1 jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(n-1)(n+1)$ jest podzielna przez 9. Ponadto oba czynniki $n-1$ oraz $n+1$ nie mogą być jednocześnie podzielne przez 3, gdyż ich różnica wynosi 2. Wobec tego liczba n^4-1 jest podzielna przez 9 wtedy i tylko wtedy, gdy $9|n+1$ lub $9|n-1$. Liczb z rozpatrywnego zbioru spełniających każdą z tych podzielności jest 223, a więc łącznie istnieje dokładnie 446 liczb spełniających warunki zadania.

---

5. *Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym? Odpowiedź uzasadnij.*

Rozwiązanie
Taki ostrosłup istnieje. Niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie prostopadłościanem. Wówczas ostrosłup czworokątny $ABCDA'$ spełnia warunki zadania.
Istotnie: Równości $\sphericalangle BAA'=90^\circ=\sphericalangle DAA'$ nie ulegają wątpliwości. Z drugiej strony, prosta BC jest prostopadła do płaszczyzny ABA', co oznacza, że prosta ta jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie ABA'. A ponieważ prosta BA' leży w płaszczyźnie ABA', więc $\sphericalangle CBA'=90^\circ$. Analogicznie uzasadniamy równość $\sphericalangle CDA'=90^\circ$.