III Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
(zawody stopnia drugiego)
12 stycznia 2008 r.

1. Liczby dodatnie a, b spełniają warunek

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab+3}\,.$$

Wykaż, że co najmniej jedna z liczb a, b jest niewymierna.

2. W każde pole tablicy o wymiarach 4×4 wpisano liczbę 0 lub 1. Następnie obliczono sumy liczb stojących w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych. Wykaż, że co najmniej trzy sumy są jednakowe.

3. Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.

4. Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, dla której liczbę 2^n można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb całkowitych? Odpowiedź uzasadnij.

5. Czy można tak przeciąć sześcian płaskim cięciem na dwie bryły o równych objętościach, aby w przekroju otrzymać pięciokąt? Odpowiedź uzasadnij.