III Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
(zawody stopnia drugiego)
12 stycznia 2008 r.

Szkice rozwiązań

---

1. Liczby dodatnie a, b spełniają warunek
$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab+3}\,.$$
Wykaż, że co najmniej jedna z liczb a, b jest niewymierna.

Rozwiązanie
Daną w treści zadania równość przekształcamy równoważnie uzyskując kolejno:
$$a^2+2ab+b^2=4(ab+3)\,, \quad a^2-2ab+b^2=12\,, \quad (a-b)^2=12\,, \quad |a-b|=2\sqrt{3}\,.$$
Gdyby obie liczby a, b były wymierne, to wymierna byłaby także liczba $|a-b|$. Jednak liczba $2\sqrt{3}$ jest niewymierna. Uzyskana sprzeczność oznacza, że co najmniej jedna z liczb a, b jest niewymierna.

---

2. W każde pole tablicy o wymiarach 4×4 wpisano liczbę 0 lub 1. Następnie obliczono sumy liczb stojących w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych. Wykaż, że co najmniej trzy sumy są jednakowe.

Rozwiązanie
Przypuśćmy, że wśród uzyskanych 10 sum żadna nie powtarza się więcej niż dwa razy.
Dodając cztery liczby, z których każda równa się 0 lub 1 możemy uzyskać 5 możliwych wyników: 4, 3, 2, 1 lub 0. Ponieważ wszystkich sum jest 10, więc każda z nich musiałaby wystąpić dokładnie dwa razy.
Tymczasem wśród uzyskanych 10 sum nie mogą się pojawić dwie równe 4 i jednocześnie dwie równe 0. Jeśli bowiem sumę 4 uzyskamy dodając liczby z pewnej przekątnej, to na tej przekątnej muszą występować same jedynki. W efekcie otrzymamy co najwyżej jedną sumę równą 0 (tę na drugiej przekątnej).
Jeśli natomiast wynik 4 otrzymamy dodając cztery jedynki stojące w pewnej kolumnie, to sumę 0 możemy uzyskać jedynie dodając cztery zera w innej kolumnie. Wobec tego drugą sumę 4 oraz drugą sumę 0 uzyskamy dodając liczby stojące w pozostałych dwóch kolumnach. Wtedy jednak w wierszach otrzymamy cztery sumy równe 2.
Analogicznie rozumujemy, jeśli wynik 4 uzyskamy sumując cztery jedynki stojące w pewnym wierszu. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że co najmniej trzy uzyskane sumy są jednakowe.

---

3. Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.

Rozwiązanie
Niech a będzie długością boku sześciokąta $ABCDEF$. Wówczas
$$[ABCDEF]=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\,,$$
gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.
Niech P będzie punktem przecięcia prostych EF i AB, Q punktem przecięcia prostych AB i CD, a R punktem przecięcia prostych CD i EF.
Każdy z trójkątów PFA, QBC, RDE jest równoboczny o boku długości a. Wobec tego trójkąty SAB, SPA i SBQ mają równe pola — każdy z nich ma podstawę długości a i jednakową wysokość opuszczoną na tę podstawę. Zatem
$$[ABS]=\frac{1}{3}[PQS]\,.$$
Analogicznie uzyskujemy równości
$$[CDS]=\frac{1}{3}[QRS] \quad \text{oraz} \quad [EFS]=\frac{1}{3}[RPS]\,.$$
Ponieważ trójkąt PQR jest równoczny o boku $3a$, więc na mocy otrzymanych zależności uzyskujemy
$$[ABS]+[CDS]+[EFS]=\frac{1}{3}([PQS]+[QRS]+[RPS])=\frac{1}{3}[PQR]=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{2}[ABCDEF]\,.$$

---

4. Czy istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, dla której liczbę 2^n można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb całkowitych? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Taka liczba n nie istnieje.

Przyjmijmy, że $2^n = k+(k+1)+\ldots+(k+m)$, gdzie $k,m \geqslant 1$ są liczbami całkowitymi. Korzystając ze wzoru $1+2+\ldots+m = \frac{1}{2}m(m+1)$ sprowadzamy powyższą zależność do postaci:

$$2^n = (m+1)k + \frac{m(m+1)}{2}.$$

Rozpatrzymy dwa przypadki:

(a) m jest liczbą parzystą. Wówczas $m = 2l$, gdzie $l \geqslant 1$. Wobec tego uzyskana zależność przybiera postać $2^n = (2l+1)(k+l)$. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż liczba nieparzysta $2l+1$ ($l \geqslant 1$), nie może być dzielnikiem liczby 2^n.

(b) m jest liczbą nieparzystą. Wtedy $m = 2l-1$, gdzie $l \geqslant 1$. Dana zależność przybiera postać $2^n = l(2k+2l-1)$. Podobnie jak w poprzednim przypadku otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż liczba nieparzysta $2k+2l-1$ ($k,l \geqslant 1$) nie może być dzielnikiem liczby 2^n.

---

5. Czy można tak przeciąć sześcian płaskim cięciem na dwie bryły o równych objętościach, aby w przekroju otrzymać pięciokąt? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Nie można.

Niech α będzie płaszczyzną dzielącą sześcian na dwie bryły o równych objętościach. Niech z kolei β będzie płaszczyzną, która przechodzi przez środek sześcianu i jest równoległa do płaszczyzny α. Każda płaszczyzna przechodząca przez środek symetrii sześcianu rozcina go na dwie przystające bryły, a więc na bryły o równych objętościach. Wobec tego płaszczyzna β również dzieli sześcian na dwie bryły równych objętościach, a zatem objętość części sześcianu zawartej pomiędzy płaszczyznami α i β musi być równa 0. Stąd wynika, że płaszczyzna α musi przechodzić przez środek sześcianu. Przekrój sześcianu płaszczyzną α jest więc wielokątem mającym środek symetrii, a więc wielokątem o parzystej liczbie boków. Zatem nie istnieje przekrój sześcianu spełniający warunki zadania.