III Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia trzeciego)

8 marca 2008 r.

1. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby

$$ab+bc, \quad bc+ca, \quad ca+ab$$

są dodatnie. Udowodnij, że liczby a, b, c mają jednakowy znak, tzn. wszystkie są dodatnie lub wszystkie są ujemne.

2. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek (a,b,c) dodatnich liczb całkowitych spełniających równość

$$a^3+3b^6=c^2\,.$$

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC>BC$. Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu B na dwusieczną kąta ACB. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wiedząc, że

$$BC=a, \quad CA=b, \quad AB=c,$$

oblicz długość odcinka PM.

4. Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1,2,\ldots,20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była mniejsza od 43? Odpowiedź uzasadnij.

5. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego każda krawędź ma długość 1. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przecinającą jego wszystkie krawędzie boczne i uzyskano w przekroju czworokąt wypukły $ABCD$ nie będący trapezem. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Wyznacz wszystkie wartości, jakie może przyjąć odległość punktu P od płaszczyzny podstawy ostrosłupa.