IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego

17 stycznia 2009 r.

1. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb nieparzystych dodatnich spełniające zależność

$$\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}\,.$$

2. Każda z liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{101}$ jest równa 1 lub -1. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \ldots + x_{100}x_{101} + x_{101}x_1\,.$$

3. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE. Na prostej k obieramy takie punkty K, L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

4. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział 50 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów? Odpowiedź uzasadnij.

5. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny przecięto płaszczyzną, która przecina wszystkie jego krawędzie boczne. W przekroju otrzymano sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Wykaż, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.