IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
(zawody stopnia drugiego)
17 stycznia 2009 r.

Szkice rozwiązań

---

1. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb nieparzystych dodatnich spełniające zależność

$$\frac{a+c-b}{b+c-a}=\frac{a}{b}\,.$$

Rozwiązanie
Przekształcając równoważnie daną zależność uzyskujemy kolejno:

$$\begin{aligned} ab+bc-b^2&=ab+ac-a^2\,,\\ a^2-b^2-ac+bc&=0\,,\\ (a-b)(a+b)-(a-b)c&=0\,,\\ (a-b)(a+b-c)&=0\,. \end{aligned}$$

Ponieważ liczby a, b oraz c są nieparzyste, więc liczba $a+b-c$ jest także liczbą nieparzystą. W szczególności liczba $a+b-c$ jest różna od zera. Wobec tego dana w treści zadania zależność jest równoważna równości $a=b$.
Ostatecznie trójkami (a,b,c) spełniającymi warunki zadania są trójki postaci (a,a,c), gdzie a, c są dowolnymi liczbami nieparzystymi dodatnimi.

---

2. Każda z liczb $x_1,x_2,\ldots,x_{101}$ jest równa 1 lub -1. Wyznacz najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\ldots+x_{100}x_{101}+x_{101}x_1$.

Rozwiązanie
Liczby $x_1,x_2,\ldots,x_{101}$ są równe 1 lub -1, a więc każda z liczb x_1x_2, x_2x_3, $x_3x_4,\ldots$, $x_{100}x_{101}$, $x_{101}x_1$ jest też równa 1 lub -1.
Przypuśćmy, że każda z liczb x_1x_2, x_2x_3, $x_3x_4,\ldots$, $x_{100}x_{101}$, $x_{101}x_1$ jest równa -1. Wówczas

$$-1=(-1)^{101}=(x_1x_2)\cdot(x_2x_3)\cdot(x_3x_4)\cdot\ldots\cdot(x_{100}x_{101})\cdot(x_{101}x_1)=(x_1x_2\ldots x_{101})^2\,.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, z której wynika, że wśród liczb x_1x_2, x_2x_3, $x_3x_4,\ldots$, $x_{100}x_{101}$, $x_{101}x_1$ musi być co najmniej jedna równa 1. Zatem

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\ldots+x_{100}x_{101}+x_{101}x_1\geqslant 100\cdot(-1)+1=-99\,.$$

Wartość -99 możemy uzyskać przyjmując $x_1=x_3=\ldots=x_{101}=1$ oraz $x_2=x_4=\ldots=x_{100}=-1$. Stąd wynika, że -99 jest najmniejszą możliwą wartością, jaką może przyjąć dane wyrażenie.

---

3. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC. Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE. Na prostej k obieramy takie punkty K, L, że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

Rozwiązanie
Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$.
Równoległobok $ABCD$ oraz trójkąt ADE mają wspólną podstawę AD oraz wysokości równej długości opuszczone na tę podstawę. Wobec tego $[ABCD]=2[ADE]$.
Podobnie, równoległobok $AEKL$ oraz trójkąt ADE mają wspólną podstawę AE oraz wysokości równej długości opuszczone na tę podstawę. Stąd otrzymujemy $[AEKL]=2[ADE]$.
Łącząc uzyskane równości dostajemy $[ABCD]=[AEKL]$, co należało wykazać.

---

4. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział 50 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Taka sytuacja nie jest możliwa.

Przyjmijmy, że każdy zawodnik wygrał k meczów. Wówczas liczba wszystkich meczów wygranych, a więc i rozegranych w turnieju wynosi $50k$.

Z drugiej strony każdy zawodnik przegrał dokładnie $49-k$ meczów. Zatem liczba wszystkich meczów przegranych, a więc i rozegranych w turnieju wynosi $50(49-k)$.

Wobec tego $50k = 50(49-k)$, skąd obliczamy $k = 49/2$. Otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy rozwiązanie zadania.

---

5. Ostrosłup prawidłowy sześciokątny przecięto płaszczyzną, która przecina wszystkie jego krawędzie boczne. W przekroju otrzymano sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Wykaż, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie

Niech P oznacza punkt przecięcia prostej zawierającej wysokość danego ostrosłupa z płaszczyzną sześciokąta $ABCDEF$. Wykażemy, że punkt P leży na każdej z prostych AD, BE, CF. Punkt P jest wówczas punktem wspólnym prostych AD, BE i CF.

Niech S oznacza wierzchołek danego ostrosłupa. Ponieważ ostrosłup jest prawidłowy, więc wysokość tego ostrosłupa leży w płaszczyźnie ADS. Wobec tego prosta zawierająca wysokość ostrosłupa przecina prostą AD. Stąd wynika, że punkt P leży na prostej AD.

Analogicznie dowodzimy, że punkt P leży na prostych BE i CF, co kończy rozwiązanie zadania.